

图书在版编目(CIP)数据

小学六年级奥数训练 100 类举一反三. / 徐彪主编.

南京 : 南京大学出版社, 2006.5

ISBN 7 - 305 - 04734 - 1

I. 小... II. 徐... III. 数学课 - 小学 - 教学参考资料 IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 042424 号

书 名 小学六年级奥数训练 100 类举一反三
编 者 王学金
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
发行电话 025-83596923 025-83592317 传真 025-83328362
网 址 <http://press.nju.edu.cn>
电子邮件 nupress1@public1.ptt.js.cn
sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 7.75 字数 190 千
版 次 2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7 - 305 - 04734 - 1 / G · 942
定 价 8.50 元

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

目 录

1	分数等差数列求和	(1)	34	连续多个单位“1”	(34)
2	分数等比数列求和	(2)	35	设数法解分数应用题	(35)
3	运用定律简算分数	(3)	36	比例法解分数应用题	(36)
4	拆数法简算分数	(4)	37	一般工程问题	(37)
5	约分法简算分数	(5)	38	两两合作工程问题	(38)
6	设元法简算分数	(6)	39	假设法解工程问题	(39)
7	裂项法简算分数(一)	(7)	40	周期工程问题	(40)
8	裂项法简算分数(二)	(8)	41	复杂周期工程问题	(41)
9	繁分数化简	(9)	42	工程问题的应用——求总数量	(43)
10	通分法比较大小	(10)	43	工程问题的应用——求工程款	(44)
11	倒数法比较大小	(11)	44	水管问题	(45)
12	差数法比较大小(一)	(12)	45	列方程解工程问题	(46)
13	差数法比较大小(二)	(13)	46	整、小数估算	(47)
14	乘法法比较大小	(14)	47	分数估算(一)	(48)
15	乘式的大小比较	(15)	48	分数估算(二)	(49)
16	变化的分数	(16)	49	圆周长的计算	(50)
17	最简分数	(17)	50	运动弧长的计算	(51)
18	分数的最大公约数	(18)	51	求和法求面积	(52)
19	分数的最小公倍数	(19)	52	求差法求面积	(53)
20	分数化小数	(20)	53	设元法求面积	(54)
21	循环小数化分数	(21)	54	放大法求面积	(55)
22	循环小数的计算	(22)	55	割补法求面积	(56)
23	分数乘法应用题	(23)	56	辅助线法求面积	(57)
24	量率对应(一)	(24)	57	辅助图形法求面积	(58)
25	量率对应(二)	(25)	58	列方程解求面积	(59)
26	统一单位“1”(一)	(26)	59	容斥原理求面积	(60)
27	统一单位“1”(二)	(27)	60	运动图形求面积	(61)
28	分数还原应用题(一)	(28)	61	运动变化的几何问题	(62)
29	分数还原应用题(二)	(29)	62	最短线路	(63)
30	寻找不变量——部分量不变	(30)	63	牛吃草问题(一)	(64)
31	寻找不变量——总数量不变	(31)	64	牛吃草问题(二)	(65)
32	假设法解分数应用题(一)	(32)	65	牛吃草问题(三)	(66)
33	假设法解分数应用题(二)	(33)	66	比的意义	(67)

67	比的应用(一)	(68)	85	利率、利税	(87)
68	比的应用(二)	(69)	86	统计图	(89)
69	按比例分配(一)	(70)	87	浓度问题——求浓度	(90)
70	按比例分配(二)	(71)	88	浓度问题——求溶质	(91)
71	按比例分配(三)	(72)	89	浓度问题——求溶剂	(92)
72	按比例分牛	(73)	90	浓度问题——综合类型	(93)
73	综合按比例分配	(74)	91	表面积计算(一)	(94)
74	分数与比的转化(一)	(75)	92	表面积计算(二)	(95)
75	分数与比的转化(二)	(76)	93	圆柱的体积计算	(96)
76	比例的应用	(77)	94	圆锥的体积计算	(97)
77	比例法解几何图形	(78)	95	形体的等积变形	(98)
78	钟表问题(一)	(80)	96	旋转体体积	(99)
79	钟表问题(二)	(81)	97	不规则物体求体积	(100)
80	百分数应用题(一)	(82)	98	行程问题	(101)
81	百分数应用题(二)	(83)	99	流水行船问题	(102)
82	利润和利润率(一)	(84)	100	最大、最小	(103)
83	利润和利润率(二)	(85)		参考答案	(104)
84	折扣	(86)			

举一反三 1

分数等差数列求和

计算有规律排列的分数等差数列的和时,我们可以依据已学的等差数列求和的有关知识进行计算,这样可以使计算简便、迅速。



典型题例

【例题】 计算： $\frac{1}{1998} + \frac{2}{1998} + \frac{3}{1998} + \frac{4}{1998} + \dots + \frac{1998}{1998}$

【思路】 这是一道分母相同,分子为连续自然数的等差分数数列。计算时,可运用同分母分数加法的计算方法进行计算。分子相加即要计算 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1998$,可运用等差数列求和公式计算。

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \frac{1}{1998} + \frac{2}{1998} + \frac{3}{1998} + \frac{4}{1998} + \dots + \frac{1998}{1998} \\ &= \frac{1+2+3+4+\dots+1998}{1998} \\ &= \frac{(1+1998) \times 1998 \div 2}{1998} \\ &= 999.5 \end{aligned}$$

【诀窍】 对于分数等差数列求和,计算时首先要明确这个数列是不是等差数列,再确定数列首项、末项和项数,最后依据等差数列求和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 进行计算。



好题精练

① 计算： $\frac{1}{1997} + \frac{2}{1997} + \frac{3}{1997} + \frac{4}{1997} + \dots + \frac{1996}{1997}$

② 计算： $\frac{1}{49} + \frac{2}{49} + \frac{3}{49} + \frac{4}{49} + \dots + \frac{47}{49} + \frac{48}{49} + \frac{47}{49} + \frac{46}{49} + \dots + \frac{1}{49}$

③ 计算： $(1 + \frac{1}{97}) + (2 + \frac{1}{97} \times 2) + (3 + \frac{1}{97} \times 3) + \dots + (96 + \frac{1}{97} \times 96) + (97 + \frac{1}{97} \times 97)$

奥数100类

2 分数等比数列求和

像 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{3^2}$ 、 $\frac{1}{3^3}$ 、 $\frac{1}{3^4}$ 、 \dots 、 $\frac{1}{3^{10}}$ 这样后项与前项的比都相等的数列称为等比数列。这个数列的首项为 $\frac{1}{3}$ ，末项为 $\frac{1}{3^{10}}$ ，项数为 10 项，公比为 $\frac{1}{3}$ 。计算和时可依据等比数列求和公式

求得和。a 为首项，n 为项数，q 为公比。 $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ ($q \neq 1$)



典型题例

【例题】 计算： $2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} + 6\frac{1}{27} + 8\frac{1}{81} + 10\frac{1}{243} + 12\frac{1}{729}$

【思路】 求和式中每一项都可分拆成整数与真分数的和。 $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ ， $4\frac{1}{9} = 4 + \frac{1}{9}$ ， \dots 这样可把整数相加用等差数列求和的方法求得和，分数相加用等比数列求和的方法求得，最后把它们合起来。

【详解】 原式 $= (2 + \frac{1}{3}) + (4 + \frac{1}{9}) + (6 + \frac{1}{27}) + \dots + (12 + \frac{1}{729})$
 $= (2 + 4 + 6 + \dots + 12) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{729})$
 $= (2 + 12) \times 6 \div 2 + \frac{\frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{729})}{1 - \frac{1}{3}} = 42 + \frac{364}{729} = 42\frac{364}{729}$

【诀窍】 等比数列求和有时会与等差数列混淆，计算时要认真观察数列特点，计算出是公差相等，还是公比相等？再选择相应的公式正确计算。



好题精练

① 计算： $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

② 计算： $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$

③ 计算： $2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} + 8\frac{1}{8} + 11\frac{1}{16} + 14\frac{1}{32} + 17\frac{1}{64} + 20\frac{1}{128} + 23\frac{1}{256}$

举一反三 3

运用定律简算分数

分数四则混合运算中,既要按照四则运算的顺序进行计算,同时又要依据数据的特点,灵活运用加法、乘法的运算定律使计算简便合理。



典型题例

【例题】 计算： $(4.85 \div \frac{5}{18} - 3.6 + 6.15 \times 3 \frac{3}{5}) \times (1 - \frac{8}{9})$

【思路】 观察发现 $4.85 \div \frac{5}{18}$ 可转化为 $4.85 \times 3 \frac{3}{5}$,于是把前面括号里的式子除法转化为乘法,分数转化为小数,我们就可以发现其中有一个因数 3.6 是相同的,这样可以运用乘法分配律进行简便计算。

【详解】 原式 $= (4.85 \times 3.6 - 3.6 + 6.15 \times 3.6) \times \frac{1}{9}$
 $= [3.6 \times (4.85 - 1 + 6.15)] \times \frac{1}{9}$
 $= 36 \times \frac{1}{9}$
 $= 4$

【诀窍】 在进行分数四则运算时,对于乘法中有一个因数相等(或通过变形相等)时,一定要认真观察另一个因数特点,看能否运用乘法分配律进行简便计算,从而提高计算的速度。



好题精练

① 计算： $\frac{1}{4} \times (3.73 \div 1.75 + 6.27 \times \frac{4}{7})$

② 计算： $1 \frac{4}{17} \times (2 \frac{2}{3} - \frac{3}{4}) + 17 \frac{11}{12} \div \frac{17}{21}$

③ 计算： $(1) 139 \times \frac{137}{138} + 137 \times 1 \frac{1}{138}$

$(2) 14 \times \frac{3}{7} + 0.65 \div 1 \frac{5}{8} - \frac{2}{7} \times 14 + \frac{5}{13} \times \frac{13}{20}$

奥数100类

4 拆数法简算分数

对于求两个乘积的和的算式,有时乍看起来似乎不可简便计算,但通过仔细观察、研究每个乘式中两个因数的数据特点,可以通过把其中一个数分拆出一个与前一算式中相同的因数来,运用乘法分配律进行简便计算。



典型题例

【例题】 计算： $3\frac{3}{5} \times 25\frac{2}{5} + 37.9 \times 6\frac{2}{5}$

【思路】 我们注意观察 $3\frac{3}{5}$ 和 $6\frac{2}{5}$, 因为它们的和为 10。但是,只有当分别与它们相乘的另一个因数相同时,我们才能运用乘法分配律简算。因此,我们不难想到把 37.9 分拆成 25.4 ($25\frac{2}{5}$) 与 12.5 两部分。当出现 12.5 与 6.4 相乘时,我们又可以将 6.4 看成 8×0.8 , 这样计算就简便多了。

【详解】 原式 $= 3\frac{3}{5} \times 25\frac{2}{5} + (25.4 + 12.5) \times 6.4$
 $= 3.6 \times 25.4 + 25.4 \times 6.4 + 12.5 \times 6.4$
 $= (3.6 + 6.4) \times 25.4 + 12.5 \times 8 \times 0.8$
 $= 254 + 80$
 $= 334$

【诀窍】 拆数法简算时,通常两个乘式中有一对数正好可以凑成整十、整百数,这时可以考虑把另两个数中较大的数分拆为包含另一较小数的两个数的和,这时再运用乘法分配律进行简算。



好题精练

① 计算： $84\frac{14}{19} \times 1.375 + 105\frac{5}{19} \times 0.9$

② 计算： $41.2 \times 8.1 + 11 \times 9\frac{1}{4} + 53.7 \times 1.9$

③ 计算： $455 \times 7\frac{3}{5} + 111 \div \frac{5}{96} + 43.3 \times 76$

举一反三 5

约分法简算分数

把 $\frac{48}{120}$ 约分同学们已很熟练了,运用约分方法对较复杂的分数计算有时可起到事半功倍的作用,对于分数的分子、分母中又含有运算的,我们可提取相同的因数进行约简,从而简便计算。



典型题例

【例题】 计算：
$$\frac{1 \times 2 \times 3 + 3 \times 6 \times 9 + 7 \times 14 \times 21}{1 \times 3 \times 5 + 3 \times 9 \times 15 + 7 \times 21 \times 35}$$

【思路】 若将分子、分母分别算出,再计算出最后结果,显得比较麻烦,但通过仔细审题发现仍有规律可循。因为 $1 \times 2 \times 3 = 1^3 \times 1 \times 2 \times 3$, $3 \times 6 \times 9 = 3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 = 3^3 \times 1 \times 2 \times 3$, $7 \times 14 \times 21 = 7 \times 1 \times 7 \times 2 \times 7 \times 3 = 7^3 \times 1 \times 2 \times 3$; $1 \times 3 \times 5 = 1^3 \times 1 \times 3 \times 5$, $3 \times 9 \times 15 = 3^3 \times 1 \times 3 \times 5$; $7 \times 21 \times 35 = 7^3 \times 1 \times 3 \times 5$ 。这样可提取公因式进行约分来简算。

【详解】 原式 =
$$\frac{1^3 \times 1 \times 2 \times 3 + 3^3 \times 1 \times 2 \times 3 + 7^3 \times 1 \times 2 \times 3}{1^3 \times 1 \times 3 \times 5 + 3^3 \times 1 \times 3 \times 5 + 7^3 \times 1 \times 3 \times 5}$$
$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times (1^3 + 3^3 + 7^3)}{1 \times 3 \times 5 \times (1^3 + 3^3 + 7^3)}$$
$$= \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 3 \times 5} = \frac{2}{5}$$

【诀窍】 约分法进行简算时,通常是观察寻找分数的分子、分母中含有哪一个相同的算式,或是通过变形得到一个相同的算式,再依据约分的方法进行约简,提高计算速度。



好题精练

① 计算：
$$\frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 8}{2 \times 3 + 4 \times 6 + 6 \times 9 + 8 \times 12}$$

② 计算：
$$\frac{1985 + 1987 + 1989 + \dots + 1999}{1986 + 1988 + 1990 + \dots + 2000}$$

③ 计算：
$$\frac{1991 \times 1992 + 1992 \times 1993 + 1991 \times 1993 - 2}{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1991 + 1992}$$

奥数100类

6 设元法简算分数

在分数四则运算中,对于式子中几个分数的和多次出现参与运算的算式,我们可以运用设元法,把这几个分数的和用一个字母代替,再进行运算化简,直至达到最简捷的形式,再去求和,求结果。



典型题例

【例题】 计算： $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \times (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5})$

【思路】 观察后发现,在求积运算的两个算式中,都包含有 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 。于是我们设 $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 来代换,并运用乘法分配律,可使计算化繁为简。若直接通分计算,显然十分繁琐。

【详解】 解:设 $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$,则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (A + \frac{1}{5}) \times (1 + A) - A \times (1 + A + \frac{1}{5}) \\ &= A(1 + A) + \frac{1}{5}(1 + A) - A(1 + A) - \frac{1}{5}A \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}A - \frac{1}{5}A = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

【诀窍】 在四则运算中,多次出现连续几个分数的和,我们通常把这几个分数的和设为一个字母表示,让这个字母代替原分数进行运算化简,直至最简形式,再去求这几个分数的和(有时已消去)。



好题精练

① 计算： $(2890 + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{7}{10}) \div (\frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{7}{10})$

② 计算： $(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) \times (\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}) \times (\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11})$

③ 计算： $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999})$

举一反三 7

裂项法简算分数(一)

像 $\frac{1}{2 \times 3}$ 、 $\frac{1}{3 \times 4}$ 这样一些分数,其分子相同、分母有规律的排列的一列数求和时,我们可以把 $\frac{1}{2 \times 3}$ 裂项为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \times 4}$ 裂项为 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ 。把一个分数拆成两个分数相减的形式,这就是裂项法。裂项法简算一系列分数之和既简便又迅速。



典型题例

【例题】 计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{49 \times 50}$

【思路】 这道题中加数很多,共有49个。如果先通分,后计算,公分母肯定非常大。这是非常麻烦且不切实际的。

因为 $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$...这样裂项后可使其中两个数前后抵消,从而使计算过程简便。

【详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{49 \times 50} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\ &= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} \end{aligned}$$

【诀窍】 分数的分子相同,分母是两个连续的自然数的乘积,这样的一系列分数求和时,我们依据裂项的公式： $\frac{1}{a \times b} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \times \frac{1}{b-a}$ 。把一个数裂项为两个分数求差,然后前后抵消求得和,这就是裂项法计算的基本思路。



好题精练

① 计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{98 \times 99} + \frac{1}{99 \times 100}$

② 计算： $1 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{12} + 4 \frac{1}{20} + 5 \frac{1}{30} + 6 \frac{1}{42} + 7 \frac{1}{56} + 8 \frac{1}{72} + 9 \frac{1}{90}$

③ 计算： $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{95 \times 98} + \frac{1}{98 \times 101}$

奥数100类

8 裂项法简算分数(二)

对于分子相同分母为三个连续自然数相乘的分数,运用裂项法计算时,首先将它们裂项分为分母是两个连续自然数相乘的形式,再依据前面所学进行简化,并计算。



典型题例

【例题】 计算： $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10} + \frac{1}{9 \times 10 \times 11}$

【思路】 这道题与前面例题有相似之处,很容易想到把题中的每个加数分解成两个分数之差,并且前一个数的减数与后一个数的被减数相同,这样可以前后抵消,化繁为简。

$$\text{因为 } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}\right) \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}\right) \times \frac{1}{2} \quad \dots$$

这样就达到了裂项简算的目的。

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10} + \frac{1}{9 \times 10 \times 11} \\ & = \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}\right) \times \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{8 \times 9} - \frac{1}{9 \times 10}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{9 \times 10} - \frac{1}{10 \times 11}\right) \times \frac{1}{2} \\ & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{8 \times 9} - \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{9 \times 10} - \frac{1}{10 \times 11}\right) \\ & = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{10 \times 11}\right) = \frac{27}{110} \end{aligned}$$

【诀窍】 分母是三个连续自然数 a, b, c 的乘积时(且 $a < b < c$) 我们通常先把它们裂项为分母是两个连续自然数的乘积的形式： $\frac{1}{a \times b \times c} = \left(\frac{1}{a \times b} - \frac{1}{b \times c}\right) \times \frac{1}{2}$ 。

这样前一个数的减数与后一个数的被减数相同,可以抵消,从而简算。



好题精练

① 计算： $\frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10}$

② 计算： $\frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{2}{28 \times 29 \times 30}$

③ 计算： $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100}$

举一反三 9

繁分数化简

两个分数相除或分子与分母中又含有分数或四则混合运算的称为繁分数。它是一种特殊的分数,通常无法直接运用运算定律和运算性质进行计算,运算过程就是化简过程,即把繁分数化成最简分数。



典型题例

【例题】 计算：
$$\frac{1\frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times 1\frac{1}{14}}{(4\frac{1}{12} + 3.625) \div 20\frac{5}{9}}$$

【思路】 繁分数的化简需要扎实的基本功。这里可以分别对分子、分母化简,写成乘积的形式,便于约分。也可计算出分子与分母,再用分子除以分母得到结果。

【详解】 分子 = $1\frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{15}{14} = 1\frac{3}{8} + \frac{5}{7} = \frac{117}{56}$
分母 = $(4\frac{1}{12} + 3\frac{5}{8}) \div \frac{185}{9} = \frac{185}{24} \times \frac{9}{185} = \frac{3}{8}$
所以原式 = $\frac{117}{56} \div \frac{3}{8} = \frac{117}{56} \times \frac{8}{3} = 5\frac{4}{7}$

【诀窍】 化简时,用较长的分数线分出分子部分和分母部分,再分别计算出繁分数的分子部分和分母部分的结果,然后用分子部分除以分母部分,求出结果。当然,我们还可以利用分数的基本性质,先消去分母部分分数的分母,再求出结果。



好题精练

① 计算：
$$\frac{987 \times 655 - 321}{666 + 987 \times 654}$$

② 计算：
$$\frac{2\frac{2}{3} \times (1\frac{7}{8} - \frac{5}{6})}{3\frac{1}{4} \div (\square + 1\frac{5}{6})} = 2\frac{17}{54} \quad \square = ?$$

③ 计算：
$$\frac{9}{\frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{900}}$$

奥数100类

10 通分法比较大小

对于分数大小的比较有分子相同、分母相同、分子和分母都不相同三种情况,前两种判别大小的方法我们已经掌握,而分子分母都不相同的,通常我们通过通分把它们化成分子或分母相同的分数再比较它们的大小。



典型题例

【例题】 将下列分数由小到大排成一列： $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{15}{23}$ $\frac{10}{17}$ $\frac{12}{19}$

【思路】 比较分数大小的一般方法是：先通分使各分数的分母相同，再比较分子的大小。但对于本题，我们注意到分子的最小公倍数可以方便求得，应用分数的基本性质，使各分数的分子相同，然后比较各分数的分母，分母大的分数反而小。

【详解】 $[2, 5, 15, 10, 12] = 60$ $\frac{2}{3} = \frac{60}{90}$ $\frac{5}{8} = \frac{60}{96}$ $\frac{15}{23} = \frac{60}{92}$ $\frac{10}{17} = \frac{60}{102}$ $\frac{12}{19} = \frac{60}{95}$

因为 $90 < 92 < 95 < 96 < 102$ ，又因为分子相同，所以 $\frac{10}{17} < \frac{5}{8} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23} < \frac{2}{3}$ 。

【诀窍】 比较分数大小时，先观察分数的分子和分母，分子和分母其中哪一个最小公倍数较小，容易求得，就使它们通分成相同的部分，再来比较分数大小。



好题精练

① 将下列分数由小到大排成一列：

$$\frac{10}{17} \quad \frac{12}{19} \quad \frac{15}{23} \quad \frac{60}{101}$$

② 比较下列各分数的大小：

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{19}{20} \quad \frac{5}{6}$$

③ 将下列分数按顺序排列：

$$\frac{9}{11} \quad \frac{12}{13} \quad \frac{18}{19} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{6}{7}$$

举一反三

倒数法比较大小

我们知道 $\frac{1}{7}$ 的倒数是7, $\frac{1}{2}$ 的倒数是2,虽然 $\frac{1}{7}$ 小于 $\frac{1}{2}$,但它们的倒数正好相反 $7 > 2$ 。在分数大小比较时,我们可以依据倒数愈大原分数愈小,倒数愈小原分数愈大,来进行分数大小的比较。



典型题例

【例题】 比较下列三个分数的大小： $\frac{4443}{5554}$ 、 $\frac{5557}{6668}$ 、 $\frac{6668}{7779}$

【思路】 对于这三个分数,无论化分母为相同(即“通分母”)还是化分子为相同(即“通分子”)都不太方便。这里可以讨论它们的倒数,根据倒数愈大,原分数反而愈小(即分子均为1,分母大的反而小)来比较分数的大小。

【详解】 $\frac{4443}{5554}$ 的倒数为 $\frac{5554}{4443} = 1 + \frac{1111}{4443}$, $\frac{5557}{6668}$ 的倒数为 $\frac{6668}{5557} = 1 + \frac{1111}{5557}$,

$\frac{6668}{7779}$ 的倒数为 $\frac{7779}{6668} = 1 + \frac{1111}{6668}$,

由 $\frac{1111}{4443} > \frac{1111}{5557} > \frac{1111}{6668}$, 即 $1 + \frac{1111}{4443} > 1 + \frac{1111}{5557} > 1 + \frac{1111}{6668}$ 。

根据倒数愈大,原分数反而愈小可得到 $\frac{4443}{5554} < \frac{5557}{6668} < \frac{6668}{7779}$ 。

【诀窍】 在比较大小的几个分数中,如果我们发现每个分数分子与分母的差是相同的,这时我们可借助倒数法,使这些分数的倒数的分子转化为一个相同的数,这样就可比较大小了。最后再依据倒数愈大原分数反而愈小来比较大小。



好题精练

① 比较分数大小： $\frac{103}{116}$ 、 $\frac{217}{230}$ 、 $\frac{235}{248}$

② 比较分数大小： $\frac{11234}{12345}$ 、 $\frac{33456}{34567}$ 、 $\frac{55678}{56789}$

③ 将下列分数从大到小排列： $\frac{3111}{3456}$ 、 $\frac{2438}{2783}$ 、 $\frac{3201}{3546}$ 、 $\frac{2033}{2378}$

奥数100类

12 差数法比较大小(一)

对于分子与分母的差相同的几个分数,除了可以运用倒数法比较大小外,还可以借助第三分数,求得这两个分数与第三分数的差,从而进行大小比较。



典型题例

【例题】 比较大小： $\frac{555553}{555555}$ 和 $\frac{666664}{666666}$

【思路】 经观察发现分子都比分母少2,这样可用差数法比较它们的大小。用1分别减去这两个数,可得到分子相同的两个分数。 $1 - \frac{555553}{555555} = \frac{2}{555555}$, $1 - \frac{666664}{666666} = \frac{2}{666666}$, $\frac{2}{666666} < \frac{2}{555555}$ 。两个分数同被1减,差越大说明原数反而越小。

【详解】 $\frac{555553}{555555} < \frac{666664}{666666}$

【诀窍】 当分子与分母的差相同时,可借助差数来比较大小,通常用1减去原来的两个数,得到分子相同的两个差,比较它们的差,差大的说明原数较小,差小的说明原数较大。



好题精练

① 比较大小： $\frac{8765}{9876}$ 和 $\frac{4321}{5432}$

② 比较大小： $\frac{712}{792}$, $\frac{463}{543}$ 和 $\frac{789}{869}$

③ 将下列分数从大到小排列： $\frac{11234}{12345}$, $\frac{33456}{34567}$, $\frac{55678}{56789}$

举一反三 13

差数法比较大小(二)

比较大小的两个分数接近某一分数时,如接近 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等,我们还可以把原来的两个数作为被减数,分别减去一个相同的分数后,得到分子相同的分数,这时来比较它们的大小。



典型题例

【例题】 比较大小 $\frac{218191}{654321}$ 与 $\frac{152347}{456789}$

【思路】 通过观察我们可以知道,这两个数都比 $\frac{1}{3}$ 略大,于是可以借助于 $\frac{1}{3}$ 来比较大小:

$\frac{218191}{654321} - \frac{1}{3} = \frac{84}{654321}$ $\frac{152347}{456789} - \frac{1}{3} = \frac{84}{456789}$ 。两个数同减同一个数 $\frac{1}{3}$,前一个差较小,差小的原数也就小。差大的原数就大。

【详解】 $\frac{218191}{654321} - \frac{1}{3} = \frac{84}{654321}$,
 $\frac{152347}{456789} - \frac{1}{3} = \frac{84}{456789}$,
 $\frac{84}{654321} < \frac{84}{456789}$,
所以 $\frac{218191}{654321} < \frac{152347}{456789}$ 。

【诀窍】 通过观察数据特点我们发现比较大小的两个分数接近 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等分数时,我们可以把原数作为被减数,减去确定的这个中间数,比较它们的差。由于减去的数相同,差数大的说明原数也大,差数小说明原数也小。



好题精练

① 比较大小： $\frac{117}{448}$ 和 $\frac{207}{808}$

② 比较大小： $\frac{218291}{654321}$ 和 $\frac{152447}{456789}$

③ 比较大小： $\frac{58658}{87654}$ 和 $\frac{30674}{45678}$

奥数100类

14 乘积法比较大小

对于数值不是太大,又一时不能确定适当的方法比较分数大小时,可运用乘积法比较大小,即把两个分数的分子、分母交叉相乘,比较它们的乘积,哪一个分数分子所在的乘积比较大的,这个分数就比较大。



典型题例

【例题】 比较大小： $\frac{65}{78}$ 和 $\frac{54}{65}$

【思路】 两个分数的分子、分母之差不同,又不能运用差数法比较,我们可把这两个分数的分子、分母交叉相乘,求得积。 $78 \times 54 = 4212$, $65 \times 65 = 4225$, 这样 $\frac{65}{78}$ 的分子65所在的乘式的积较大,说明 $\frac{65}{78} > \frac{54}{65}$ 。

【详解】 $65 \times 65 = 4225 > 78 \times 54 = 4212$

$$\frac{65}{78} > \frac{54}{65}$$

【诀窍】 乘积法比较大小,实质上把原分数通分,公分母为原两个分母的积,分子为交叉相乘的积,分子所在的乘式的积大也就是通分时分子大,这个分数当然就比较大。积小这个分数当然就比较小。



好题精练

① 比较大小： $\frac{98}{212}$ 和 $\frac{83}{178}$

② 比较大小： $\frac{74}{95}$ 和 $\frac{95}{120}$

③ 将下列分数有序排列： $\frac{43}{87}$, $\frac{32}{68}$ 和 $\frac{35}{74}$