

图书在版编目(CIP)数据

同一套题 3/北京天利考试信息网编.

- 拉萨:西藏人民出版社,2006.1

ISBN 7-223-01917-4

I. 同... II. 北... III. 数学课-高中-习题-升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124837 号

同一套题 3

——高考研究(第 1 辑·数学)

主 编 安海平

编 委 侯志玲 付慧芳 李远亮

策 划 王志鹰

封面设计 谭仲秋

版式设计 马莉 陶莹

西藏人民出版社出版发行

(850000 拉萨市林廓北路 20 号)

北京发行部:100013 北京市东土城路

8 号 林达大厦 A 座 13 层

电 话 010-64466482、51655511-858

开 本 16 开(787×1092)

字 数 98 千 印 张 4

印 刷 北京市梦宇印务有限公司

版 次 2006 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

标准书号 ISBN 7-223-01917-4/G·812

定 价 4.20 元

■ 复习指南

2006 高考数学各章命题趋势与应试策略 4

■ 高考必备

高考数学的 54 个失分点(一) 15

高考压轴题必备 43

——用放缩法证明不等式

■ 试题研究

《38 套》选择压轴题选解 46

■ 好卷快递

北京市海淀区高三期中考试试卷(2005.11) 49

吉林省实验中学 2005~2006 学年度第二次

阶段测试 55

■ 天利在线 62

名师指导

高考题型分布与答题技巧

限时训练

选择题仿真限时训练

中等解答题仿真限时训练

压轴题夺分限时训练

高考必备

高考数学的 54 个失分点(二)

好卷快递

名校试卷快递

投稿邮箱：

GKYJ@TL100.com.

主办单位

全国学习科学研究会考试研究中心

北京师范大学海威教育集团

北京天利考试信息网

中央教育科学研究所教育与人力资源研究部

协办单位

搜狐 SOHU 教育频道

新浪教育

网易教育

腾讯教育

《现代教育报·高考周刊》

《考试报》报社

中国教研网

北大方正教育心理研究院

中国教育在线

搜学网

《高考》杂志社

《学习方法报》报社

《考试》杂志社

指导委员会(排名不分先后)

车宏生 北京师范大学心理学院院长

程方平 中央教育科学研究所教育与人力资源研究部主任

韩杰梅 北京师范大学海威教育集团教育总监

孙贺新 现代教育报副总编

王大绩 高考问题研究专家

王汉添 天利考试信息网高考专家

苏立康 北京教育学院中文系教授、学院教学研究室主任

张显双 山东省教育局教研室主任

周 明 清华大学教授

孙全生 《考试报》总编辑

赵国柱 中央教科所《德育》杂志社副社长

陈凤和 《高考》杂志社副社长

李其斌 广西师大附中教研室主任

梁 颖 新浪文教中心副总监

冯志军 搜狐教育中心主编

王 娟 腾讯教育总监

林 海 网易教育主编

郭军丽 北京师范大学校友会秘书长

杨伟广 《中国教师报》

冯 博 《学习方法报》社长

王处辉 南开大学高等教育研究所所长、博士生导师

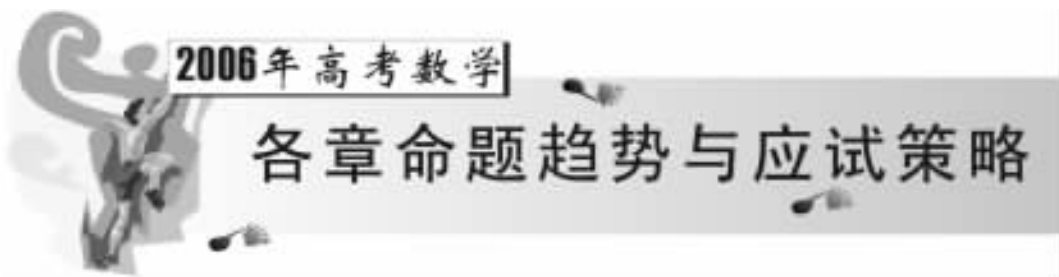
张勇燕 北大方正教育心理研究院

李 罡 北京师范大学海威教育集团

王志鹰 天利考试信息网

温兆晔 搜学网总裁

袁亚良 南通教研室主任、数学高级教师



□ 全国学习研究会考试研究中心 北京天利考试信息网

第一章 集合与简易逻辑命题趋向与应试策略

1. 有关集合的高考试题,考查重点是集合与集合之间的关系,近年试题加强了对集合的计算化简的考查,并向无限集发展,考查抽象思维能力,在解决这些问题时,要注意利用几何的直观性,注意运用文氏图解题方法的训练,注意利用特殊值法解题,加强集合表示方法的转换和化简的训练.

2. 有关“充要条件”、命题真假的试题,主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解.试题以选择题、填空题为主,难度不大,要求掌握基本知识,对基本题型,准确熟练求解.

第二章 函数命题趋向与应试策略

1. 有关函数单调性和奇偶性的试题,从试题上看,抽象函数和具体函数都有,前些年大多数考具体函数,近几年都有在不给出具体函数的情况下求解问题的试题,可见有向抽象函数发展的趋势.另外试题注重对转化思想的考查,且都综合地考查单调性与奇偶性.

加强对函数单调性、奇偶性的应用训练也是复习的重点,也就是在已知函数已具有奇偶性或单调性的性质条件下,在解题中如何合理地运用这些性质解题.首先应熟练掌握二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数,以及绝对值函数等一些常见函数的性质,归纳提炼函数性质的应用规律.

2. 与函数图像有关的试题,要从图中(或列表中)读取各种信息,注意利用平移变换、伸缩变换、对称变换,注意函数的对称性、函数值的变化趋势,培养运用数形结合思想来解题的能力.

3. 与反函数有关的试题,大多是求函数的解析式、定义域、值域或函数图像等,一般不需求出反函数,只需将问题转化为与原函数有关的问题即可解决.

4. 与指数函数和对数函数有关的试题,对指数函数与对数函数的考查,大多以基本函数的性质为依托,结合运算推理来解决.能运用性质比较熟练地进行大小的比较、方程的求解等.会利用基本的指数函数或对数函数的性质研究简单复合函数的单调性、奇偶性等性质;熟练掌握指数、对数运算法则;明确算理,能对常见的指数型函数、对数型函数进行变形处理.

5. 与映射有关的试题,尽管《考试说明》中对映射的要求不高,应该会用映射文氏图来解决一些函数问题.

6. 本章内容在高考解答题中,文科大多以对数函数为背景,结合对数运算,以考查对数函数的性质及图像等题型为主;理科解答题多以方程或二次函数为背景,综合考查函数、方程和不等式的知识,重视代数推理能力.此类试题,一般要经过变形转化,归结为二次函数问题解

决.这是近年高考的重点和热点.在此基础上,理解和掌握常见的平移、对称变换方法.以基本函数为基础,强化由式到图和由图到式的转化训练.

加强函数思想、转化思想的训练是本章复习的另一个重点.善于转化命题,引入变量建立函数,运用变化的方法、观点解决数学试题以提高数学意识,发展能力.

7.理解掌握常见题的解题方法和思路,构建思维模式,并以此为基础进行转化发展,即在造就思维依托的基础上,还要打破框框,发展能力.

8.要认真准备应用题型、探索题型和综合题型,要加大训练力度.要重视关于一次函数、二次函数、对数函数的综合题型,重视关于函数的数学建模问题,重视代数与解析几何的综合题型,重视函数在经济活动和生活中的应用问题,学会用数学思想和方法寻求规律找出解题策略.

对函数有关概念,只有做到准确、深刻地理解,才能正确、灵活地加以运用.函数是数学中最重要的概念之一,它贯穿中学代数的始终.数、式、方程、不等式、数列及极限等,是以函数为中心的代数,高考考查的内容,几乎覆盖了中学阶段的所有函数,如一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数,还有三角函数、反三角函数等,也涉及到函数的所有主要的性质,且以考查三基为主,通性通法为主,因此更应加强函数与三角函数、不等式、数列等各章间知识的联系,养成自觉运用函数观点处理问题的习惯和培养自身的能力.

所谓函数观点,实质是将问题放到动态背景上去考虑,利用函数观点可以从较高的角度处理式、方程、不等式、数列、曲线等问题.

函数是用以描述客观世界中量的依存关系的数学概念.函数思想的实质就是用联系、变化的观点提出数学对象,建立函数关系,求得问题解决.近几年高考中,考查函数的思想方法已更加突出,从如何建立函数关系式入手,考查函数的基本性质以及数形结合、分类讨论、最优化等数学思想.重视对实践能力的考查是高考的新动向.因此要强化函数思想的应用意识的训练,才能适应高考新的变化.

第三章 数列命题趋向与应试策略

1.数列在历年高考中都占有较重要的地位,一般情况下都是一个客观性试题加一个解答题,分值占整个试卷的10%左右.客观性试题主要考查等差、等比数列的概念、性质、通项公式、前 n 项和公式、极限的四则运算法则、无穷递缩等比数列所有项和等内容,对基本的计算技能要求比较高,解答题大多以考查数列内容为主,并涉及到函数、方程、不等式知识的综合性试题,在解题过程中通常用到等价转化,分类讨论等数学思想方法,是属于中高档难度的题目.

2.有关数列题的命题趋势.

(1)数列是特殊的函数,而不等式则是深刻认识函数和数列的重要工具,三者的综合求解题是对基础和能力的双重检验,而三者的求证题所显现出的代数推理是近年来高考命题的热点;

(2)数列推理题是新出现的命题热点.以往高考常使用主体几何题来考查逻辑推理能力,近两年在数列题中也加强了推理能力的考查.这类题型往往以递推数列为载体;

(3)加强了数列与极限的综合考查.

3.熟练掌握、灵活运用等差、等比数列的性质.

等差、等比数列的有关性质在解决数列问题时应用非常广泛,且十分灵活,主动发现题目

中隐含的相关性质,往往使运算简洁优美.

4. 对客观题,应注意寻求简捷方法.

解答历年有关数列的客观题,就会发现,除了常规方法外,还可以用更简捷的方法求解. 现介绍如下:

(1) 借助特殊数列;

(2) 灵活运用等差数列、等比数列的有关性质,可更加准确、快速地解题,这种思路在解客观题时表现得更为突出,很多数列客观题都有灵活、简捷的解法.

5. 在数列的学习中加强能力训练.

数列问题对能力要求较高,特别是运算能力、归纳猜想能力、转化能力、逻辑推理能力更为突出. 一般来说,考题中选择、填空题解法灵活多变,而解答题更是考查能力的集中体现,尤其近几年高考加强了数列推理能力的考查,应引起我们足够的重视. 因此,在平时要加强对能力的培养.

6. 在数列中加强解应用题的训练.

第四章 三角函数命题趋向与应试策略

1. 近几年高考对三角变换的考查要求有所降低,但 2005 年却有所加强. 而对本章的内容的考查也有逐步加强的趋势,主要表现在对三角函数的图像与性质的考查上有所加强.

2. 对本章内容一般以选择、填空题形式进行考查,且难度不大,从 1993 年至 2002 年考查的内容看,大致可分为四类问题.

(1) 与三角函数单调性有关的问题;

(2) 与三角函数图像有关的问题;

(3) 应用同角变换和诱导公式,求三角函数值及化简和等式证明的问题;

(4) 与周期有关的问题.

3. 基本的解题规律为:观察差异(或角,或函数,或运算),寻找联系(借助于熟知的公式、方法或技巧),分析综合(由因导果或执果索因),实现转化.

解题规律:在三角函数求值问题中的解题思路,一般是运用基本公式,将未知角变换为已知角求解;在最值问题和周期问题中,解题思路是合理运用基本公式将表达式转化为由一个三角函数表达的形式求解.

4. 立足课本、抓好基础. 从前面叙述可知,我们已经看到近几年高考已逐步抛弃了对复杂三角变换和特殊技巧的考查,而重点转移到对三角函数的图像与性质的考查,对基础知识和基本技能的考查上来,所以在复习中首先要打好基础. 在考查利用三角公式进行恒等变形的同时,也直接考查了三角函数的性质及图像的变换. 可见高考在降低对三角函数恒等变形的要求下,加强了对三角函数性质和图像的考查力度.

5. 重视数学思想方法的复习.

如前所述本章试题都以选择、填空题形式出现,因此复习中要重视选择、填空题的一些特殊解题方法,如数形结合法、代入检验法、特殊数值法、待定系数法、排除法等. 另外对有些具体问题还需要掌握和运用一些基本结论. 如:

关于对称问题,要利用 $y = \sin x$ 的对称轴为 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 对称中心为 $(k\pi, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 等基本结论解决问题,同时还要注意对称轴与函数图像的交点的纵坐标特征.

在求三角函数值的问题中,要学会用勾股数解题的方法,因为高考试题一般不能查表,给出的数都较特殊,因此主动发现和运用勾股数来解题能起到事半功倍的效果.

6. 加强三角函数应用意识的训练.

三角函数是以角为自变量的函数,也是以实数为自变量的函数.它产生于生产实践,是客观实际的抽象,同时又广泛地应用于客观实际,故应培养实践第一的观点.总之,三角部分的考查保持了内容稳定,难度稳定,题量稳定,题型稳定,考查的重点是三角函数的概念、性质和图像,三角函数的求值问题以及三角变换的方法.

7. 变为主线、抓好训练.变是本章的主题,在三角变换考查中,角的变换,三角函数名的变换,三角函数次数的变换,三角函数式表达形式的变换等比比皆是,在训练中,强化变换意识是关键,但题目不可太难,较特殊技巧的题目不做,立足课本,掌握课本中常见问题的解法,把课本中习题进行归类,并进行分析比较,寻找解题规律.

针对高考中题目分析,还要强化变角训练,经常注意收集角间关系的观察分析方法.另外如何把一个含有不同名或不同角的三角函数式化为只含有一个三角函数关系式的训练也要加强,这也是高考的重点.

8. 注意对三角形中问题的复习.不可太难,只要掌握基本知识、概念,深刻理解其中基本的数量关系即可过关.

9. 在复习中,应立足基本公式,在解题时,注意在条件与结论之间建立联系,在变形过程中不断寻找差异,讲究算理,才能立足基础,发展能力,适应高考.

第五章 向量命题趋向与应试策略

对本章内容的考查主要分以下三类:

1. 以选择、填空题型考查本章的基本概念和性质.此类题一般难度不大,用以解决有关长度、夹角、垂直、判断多边形形状等问题.注意运用向量的几何性质以及数形结合的思想方法,加强对向量与三角综合问题的训练.

2. 以解答题考查圆锥曲线中的典型问题.此类题综合性比较强,难度大,以解析几何中的常规题为主.

3. 向量在空间中的应用(在B类教材中).在空间坐标系下,通过向量的坐标的表示,运用计算的方法研究三维空间几何图形的性质.

在复习过程中,以源于课本,高于课本为指导方针.本章考题大多数是课本的变式题,即源于课本.因此,掌握双基、精通课本是本章关键.

第六章 不等式命题趋向与应试策略

1. 重视对基础知识的考查,设问方式不断创新.重点考查四种题型:解不等式,证明不等式,涉及不等式应用题,涉及不等式的综合题,所占比例远远高于在课时和知识点中的比例.重视基础知识的考查,常考常新,创意不断,设问方式不断创新,图表信息题、多选题填空题等情景新颖的题型受到命题者的青睐,值得引起我们的关注.

2. 突出重点,综合考查,在知识与方法的交汇点处设计命题.在不等式问题中蕴含着丰富的函数思想,不等式又为研究函数提供了重要的工具.不等式与函数既是知识的结合点,又是数学知识与数学方法的交汇点,因而在历年高考题中始终是重中之重.在全面考查函数与不等

式基础知识的同时,将不等式的重点知识以及其他知识有机结合,进行综合考查,强调知识的综合和知识的内在联系,加大数学思想方法的考查力度,是高考对不等式考查的又一新特点.

3. 加大推理、论证能力的考查力度,充分体现由知识立意向能力立意转变的命题方向. 由于代数推理没有几何图形作依托,因而更能检测出学生抽象思维能力的层次. 这类代数推理问题常以高中代数的主体内容——函数、方程、不等式、数列及其交叉综合部分为知识背景,并与高等数学知识及思想方法相衔接,立意新颖,抽象程度高,有利于高考选拔功能的充分发挥. 对不等式的考查更能体现出高观点、低设问、深入浅出的特点,考查容量之大、功能之多、能力要求之高,一直是高考的热点.

4. 突出不等式的知识在解决实际问题中的应用价值,借助不等式来考查学生的应用意识.

5. 重视数学思想方法的复习.

根据本章上述的命题趋向我们迎考复习时应加强数学思想方法的复习.

在复习不等式的解法时,加强等价转化思想的训练与复习. 解不等式的过程是一个等价转化的过程,通过等价转化可简化不等式(组),以快速、准确求解.

加强分类讨论思想的复习. 在解不等式或证不等式的过程中,如含参数等问题,一般要对参数进行分类讨论. 复习时,学生要学会分析引起分类讨论的原因,合理的分类,做到不重不漏.

加强函数与方程思想在不等式中的应用训练. 不等式、函数、方程三者密不可分,相互联系、互相转化. 如求参数的取值范围问题,函数与方程思想是解决这类问题的重要方法. 在不等式的证明中,加强归思想的复习,证不等式的过程是一个把已知条件向要证结论的一个转化过程,既可考查学生的基础知识,又可考查学生分析问题和解决问题的能力,正因为证不等式是高考考查学生代数推理能力的重要素材,复习时应引起我们的足够重视.

6. 强化不等式的应用.

高考中除单独考查不等式的试题外,常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用问题的试题中涉及不等式的知识,加强不等式应用能力,是提高解综合题能力的关键. 因此,在复习时应加强这方面训练,提高应用意识,总结不等式的应用规律,才能提高解决问题的能力. 如在实际问题应用中,主要有构造不等式求解或构造函数求函数的最值等方法,求最值时要注意等号成立的条件,避免不必要的错误.

第七章 直线与圆命题趋向与应试策略

一、在近十年的高考中,对本章内容的考查主要分两部分:

1. 以选择题题型考查本章的基本概念和性质,此类题一般难度不大,但每年必考,考查内容主要有以下几类:

- (1) 与本章概念(倾斜角、斜率、夹角、距离、平行与垂直、线性规划等)有关的问题;
- (2) 对称问题(包括关于点对称,关于直线对称)要熟记解法;
- (3) 与圆的位置有关的问题,其常规方法是研究圆心到直线的距离.

2. 以解答题考查直线与圆锥曲线的位置关系,此类题综合性比较强,难度也较大.

预计在今后一二年内,高考对本章的考查会保持相对稳定,即在题型、题量、难度、重点考查内容等方面不会有太大的变化.

二、本章内容在高考中处于比较稳定状态,复习时应注意以下几点:

1. 抓好“三基”,把握重点,重视低、中档题的复习,确保选择题的成功率.

本章所涉及到的知识都是平面解析几何中最基础的内容. 它们渗透到平面解析几何的各个部分, 正是它们构成了解析几何问题的基础, 又是解决这些问题的重要工具之一. 这就要求我们必须重视对“三基”的学习和掌握, 重视基础知识之间的内在联系, 注意基本方法的相互配合, 注意平面几何知识在解析几何中的应用, 注重挖掘基础知识的能力因素, 提高利用通性通法解题的熟练程度, 着眼于低、中档题的顺利解决.

2. 在解答有关直线的问题时, 应特别注意的几个方面:

(1) 在确定直线的斜率、倾斜角时, 首先要注意斜率存在的条件, 其次要注意倾角的范围.

(2) 在利用直线的截距式解题时, 要注意防止由于“零截距”造成丢解的情况. 如题目条件中出现直线在两坐标轴上的“截距相等”“截距互为相反数”“在一坐标轴上的截距是另一坐标轴上的截距的 m 倍 ($m > 0$)”等时, 采用截距式就会出现“零截距”, 从而丢解. 此时最好采用点斜式或斜截式求解.

(3) 在利用直线的点斜式、斜截式解题时, 要注意防止由于“无斜率”造成丢解. 如在求过圆外一点的圆的切线方程时或讨论直线与圆锥曲线的位置关系时, 或讨论两直线的平行、垂直的位置关系时, 一般要分直线有无斜率两种情况进行讨论.

(4) 要学会变形使用两点间的距离公式.

求直线 l 上两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的距离时, 一般使用 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; 当已知直线 l 的斜率 k 时, 可以将上述公式变形为 $d = \frac{|x_1 - x_2|}{|\cos \alpha|}$ (其中 α 为直线 l 的倾斜角)

特别是当求直线 l 被圆锥曲线所截得的弦长时, 把直线的方程代入圆锥曲线的方程, 整理成关于 x 或 y 的一元二次方程时, 一是要充分考虑到“ $\Delta \geq 0$ ”的限制条件, 二是要注意运用韦达定理的转化作用, 充分体现“设而不求法”的妙用.

(5) 灵活运用定比分点公式、中点坐标公式, 在解决有关分割问题、对称问题时可以简化运算. 掌握对称问题的四种基本类型的解法, 即①点关于点对称; ②直线关于点对称; ③点关于直线对称; ④直线关于直线对称.

(6) 在由两直线的位置关系确定有关字母的值, 或讨论直线 $Ax + By + C = 0$ 中各系数间的关系和直线所在直角坐标系中的象限等问题时, 要充分利用分类讨论、数形结合、特殊值检验等基本的数学方法和思想.

(7) 要特别注意直线方程所表示的直线的局限性. 如 $Ax + By + 1 = 0$ 不过原点.

(8) 理解用二元一次不等式表示平面区域, 掌握求线性目标函数在线性约束下的最值问题, 即线性规划问题, 会求最优解, 并注意在代数问题中的应用.

3. 加强思想方法训练, 培养综合能力.

平面解析几何的核心是坐标法, 它需要运用运动变化的观点, 运用代数的方法研究几何问题, 因此解析几何问题无论从知识上还是研究方法上都要与函数、方程、不等式、三角及平面几何内容相联系.

在对本章复习中, 应注意用坐标法分析问题的观点, 培养自觉运用运动变化的观点解决问题的能力. 加强与正比例函数、一次函数等知识的联系, 善于运用函数的观点方法处理直线方程问题.

对本章知识的综合上, 重点掌握直线方程的四种特殊形式与斜率、截距、已知点等特征量之间的关系, 知道了特征量就能准确地写出方程, 反之亦然. 在平时要经常做这方面的训练.

第八章 圆锥曲线命题趋向与应试策略

1. 本章内容是平面解析几何的核心内容,因而是高考重点考查的内容,在每年的高考试卷中一般有2~3道客观题和一道解答题,难度上易、中、难三档题都有,主要考查的内容是圆锥曲线的概念和性质,直线与圆锥的位置关系等,从近十年高考试题看大致有以下三类:

- (1) 考查圆锥曲线的概念与性质;
- (2) 求曲线方程和求轨迹;
- (3) 关于直线与圆及圆锥曲线的位置关系的问题.

2. 选择题和填空题主要以椭圆、双曲线和抛物线为考查对象.解答题以考查直线与圆锥曲线的位置关系为主,对于求曲线方程和求轨迹的题,高考一般不给出图形,以考查学生的想象能力、分析问题的能力,从而体现解析几何的基本思想和方法.圆一般不单独考查,总是与直线、圆锥曲线相结合的综合型考题.等轴双曲线基本不出题.坐标轴平移或平移化简方程一般不出解答题,大多是以选择题形式出现.解析几何的解答题一般为难题,近两年都考查了解析几何的基本方法——坐标法以及二次曲线性质的运用.这个命题趋向要引起我们的重视.

3. 注意圆锥曲线的定义在解题中的应用,注意解析几何所研究的问题背景,平面几何的一些性质.

4. 从近两年的试题看,解析几何题有前移的趋势,这就要求考生在基本概念、基本方法、基本技能上多下功夫.

在复习过程中抓住以下几点:

(1) 坚持源于课本、高于课本,以考纲为纲的原则.高考命题的依据是《高考说明》,《高考说明》对考点及对知识点与能力的要求作出了明确规定,其实质是精通课本.本章考题大多数是课本的变式题,即源于课本,因此掌握双基、精通课本是关键.

(2) 复习时要突出“曲线与方程”这一重点内容.

曲线与方程有两个方面:一是求曲线方程,二是由方程研究曲线的性质.这两方面的问题在历年高考中年年出现,且常为压轴题.因此复习时要掌握求曲线方程的思路和方法,即在建立了平面直角坐标系后,根据曲线上点适合的共同条件找出动点 $P(x, y)$ 的纵坐标 y 和横坐标 x 之间的关系式,即 $f(x, y) = 0$ 为曲线方程,同时还要注意曲线上点具有条件,确定 x, y 的范围,这就是通常说的函数法,它是解析几何的核心,应培养善于运用坐标法解题的能力.求曲线的常用方法有两类:一类是曲线形状明确且便于用标准形式,这时用待定系数法求其方程;另一类是曲线形状不明确或不便于用标准形式表示,一般可用直接法、间接代点法、参数法等求方程.二要引导如何将解析几何的位置关系转化成代数数量关系进而转化为坐标关系,由方程研究曲线,特别是圆锥曲线的几何性质问题常化为等式解决,要加强等价转化思想的训练.

(3) 加强直线与圆锥曲线的位置关系问题的复习.

由于直线与圆锥曲线的位置关系一直为高考的热点.这类问题常涉及到圆锥曲线的性质和直线的基本知识点、线段的中点、弦长、垂直问题,因此分析问题时利用数形结合思想,设而不求法与弦长公式及韦达定理联系去解决.这样就加强了对数学各种能力的考查.

(4) 重视对数学思想、方法进行归纳提炼,达到优化解题思维、简化解题过程.

① 方程思想

解析几何的题目大部分都以方程形式给定直线和圆锥曲线,因此把直线与圆锥曲线相交

的弦长问题利用韦达定理进行整体处理,可以简化解题运算量.

②用好函数思想方法

对于圆锥曲线上一些动点,在变化过程中会引入一些相互联系、相互制约的量,从而使一些线的长度及 a, b, c, e 之间构成函数关系,函数思想在处理这类问题时就很有效.

③掌握坐标法

坐标法是解析几何的基本方法,因此要加强坐标法的训练.

④对称思想

由于圆锥曲线和圆都具有对称性质,可使分散的条件相对集中,减少一些变量和未知量,简化计算,提高解题速度,促成问题的解决.

⑤参数思想

参数思想是辩证思维在数学中的反映,一旦引入参数,用参数来划分运动变化状态,利用圆、椭圆、双曲线上点用参数方程形式设立或 (x_0, y_0) 即可将参量视为常量,以相对静止来控制变化,变与不变的转化,可在解题过程中将其消去,起到“设而不求”的效果.

⑥转化思想

解决圆锥曲线时充分注意直角坐标与极坐标之间的联系.直角坐标方程与参数方程,极坐标之间联系及转化,利用平移得出新系坐标与原坐标之间转化,可达到优化解题的目的.

除上述常用数学思想外,数形结合、分类讨论、整体思想、构造思想也是不可缺少的思想方法,复习也应给予足够的重视.

(5)在注重解题方法、数学思想的应用的同时注意一些解题技巧,椭圆、双曲线、抛物线的定义揭示了各自存在的条件、性质及几何特征与圆锥曲线的焦点、焦半径、准线、离心率有关量的关系问题,若能用定义法,可避免繁琐的推理与运算.涉及到原点和焦点距离问题用极坐标的极径表示.关于直线与圆锥曲线相交弦则结合韦达定理采用设而不求法.利用引入一个参数表示动点的坐标 x, y ,间接把它们联系起来,减少变量、未知量采用参数法.有些题目还常用它们与平面几何的关系,利用平面几何知识会化难为易,化繁为简,收到意想不到的解题效果.

第九章 立体几何命题趋向与应试策略

近几年,立体几何高考命题既严格按照教学大纲和教材的要求,又遵循命题的指导思想和原则,坚持稳定大局,控制难度,贯彻“说明”要求,同时在创新方面作了一些有益的尝试.

命题稳定主要表现在:

考查重点及难点稳定:高考始终把空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行与垂直的性质与判定线面间的角与距离的计算作为考查的重点,尤其是以多面体和旋转体为载体的线面位置关系的论证,更是年年反复进行考查,在难度上也始终以中等偏难为主.

在改革创新方面主要表现在:

考查学生的多角度思考问题和空间想象能力,如 2004 年重庆卷第 12 题,2005 年江苏卷第 12 题.这些改革尝试的目的在于激发“学生独立思考,从数学的角度去发现和提出问题,并加以探索和研究,有利于提高学生的思维能力和创新意识”.

本章内容在高考中如上章所述无论在题型、题量、难度等方面都比较稳定,但因本章性质多、公式多反映在考题上有以下特点.

1. 用选择、填空题考查本章的基本性质和求积公式,分以下几类:

- (1) 与多面体和旋转体的面积、体积有关的计算问题;
- (2) 与多面体和旋转体中某些元素有关的计算问题;
- (3) 考查多面体和旋转体中的某些概念.

上述所列的这些题难度都不大,且多数是文理问题,其中计算问题多于考查概念的题,但要想顺利解决计算问题,必须熟练掌握多面体与旋转体的性质,因为性质是解决几何体计算问题的理论基础.

2. 用解答题综合考查空间(线面间的位置关系和几何体的概念和性质,近几年立体几何解答题多采用一题多问的方式,这样既降低了起点,又分散了难点,试题既包含了一定量的证明步骤,也包含了计算部分,能较全面地考查逻辑推理能力,空间想象能力和运算能力,同时还应注意利用前面的结论、图形等分析后面的结论.估计这种命题的特点还将保持下去.

3. 本章内容在高考中无论在题型、题量和难度方面都比较稳定,复习时应注意以下几点:

- (1) 理解定义、定理本质,科学地进行判断与论证.

首先要依据定义、定理,对立体几何中各元素间的关系或几何体的某些特性的存在与否进行判定与论证是高考的重要内容之一.高考中常以判断题的形式出现,解此类问题,关键是相关的概念、判定、性质定理要清楚,其次要否定某些错误的判断,可运用运动变化的思想,让点或直线或平面在满足条件的情况下充分运动,往往可以发现一些特殊情况或极端位置时出现的错误.另外将文字语言、符号语言、图形语言灵活准确地进行转化是解答这类题目的前提.另外举反例是解判断题的常用方法.

- (2) 通过典型问题掌握基本解题方法.

高考中立体几何解答题基本题型是(Ⅰ)证明空间线面平行或垂直,(Ⅱ)求空间中线面的夹角或距离,(Ⅲ)求几何体的侧面积及体积.

- (Ⅰ)证明空间线面平行或垂直需注意以下几点:

- ① 由已知想性质,由求证想判定,即分析法与综合法相结合寻找证题思路;
- ② 立体几何论证题的解答中,利用题设条件的性质适当添加辅助线(或面)是解题的常用方法之一;
- ③ 明确何时应用判定定理,何时应用性质定理,用定理时要先申明条件再由定理得出相应结论;
- ④ 三垂线定理及其逆定理在高考题中使用的频率最高,在证明线线垂直时应优先考虑.应用时常需先认清所观察的平面及它的垂线,从而明确斜线、射影、面内直线的位置,再根据定理由已知的两直线垂直得出新的两直线垂直.另外通过计算证明线线垂直也是常用的方法之一.

- (Ⅱ)求空间中线面的夹角或距离需注意以下几点:

- ① 注意根据定义找出或作出所求的角或距离,一般情况下,力求明确所求角或距离的位置.
- ② 作线面角的方法除平移外,补形也是常用的方法之一;求线面角的关键是寻找两“足”(斜足与垂足),而垂足的寻找通常用到面面垂直的性质定理.
- ③ 求二面角高考中每年必考,复习时必须高度重视.二面角的平角的常用作法有三种:

根据定义或图形特征作;根据三垂线定理(或其逆定理)作,难点在于找到面的垂线.解决办法,先找面面垂直,利用面面垂直的性质定理即可找到面的垂线;作棱的垂面.作二面角的平面角应把握先找后作的原则.

- ④ 求点到平面的距离常用方法是直接法与间接法,利用直接法求距离需找到点在面内的

射影,此时常考虑面面垂直的性质定理与几何图形的特殊性质.而间接法中常用的是等积法及转移法.

⑤求角与距离的关键是将空间的角与距离灵活转化为平面上的角与距离,然后将所求量置于一个三角形中,通过解三角形最终求得所需的角与距离.

(Ⅲ)求几何体的侧面积及体积应注意以下几点:

①应用侧面积及体积公式时要抓住下面三个环节:即正确记忆公式;求出公式所需要的量;进行简明正确的运算.对于多面体要注意反映其主要因素关系的直角三角形或直角梯形;对于旋转体则主要分析其轴截面、平行于底面的截面等;

②求未知量应注意各种公式为我们提供的列方程式的基本等量关系然后列出相关的方程或方程组来求解;

③求面积或体积的比值问题,一般需用相同的字母表示求比的两个量,在求比值时约去字母,得到比值.特殊情况,对于截面分某几何体所成两部分的面积或体积比值的问题,也可以先求出两部分的面积(或体积)各占原来的几分之几,然后再求得所需比值.

(3)综合运用、培养能力、掌握常用技巧.

立体几何学科的特点决定了立体几何综合题的基本模式是论证推理与计算相结合.解决这种类型的题目对各种能力具有较高要求.

①解题原则是一作、二证、三求解(即作图、证明、求解).

②学会识图、理解图、应用图.通过对复杂空间图形直观图的观察和分解,发现其中的平面图形或典型的空间图形(如正方体、正四面体、等边圆锥等),以便联想有关的平面几何或立体几何知识.需要作图添加辅助线、面时,力求用定理、公理作为作图的依据,以便在作图时得到所添线、面的特征.

③注意数学中的转化思想的运用.

(i)常用等角定理或平行移动直线及平面的方法转化所求角的位置;

(ii)常用平行线间、平行线面间或平行平面间距离相等为依据转化所求距离的位置;

(iii)常用割补法或等积(等面积或等体积)变换解决有关距离及体积问题.

④注意发现隐蔽条件.

由于近年考题常立足于棱柱、棱锥和正方体,因此复习时应注意多面体的依托作用,熟练多面体性质的应用,才能发现隐蔽条件,利用隐含条件,达到快速准确解题的目的.

⑤从2005年立体几何命题的特点来看:突出空间向量方法解答立体几何问题成为命题的一大热点.如北京卷的第16题.虽然北京用的是人教(A)版教材,不要求空间向量.但在答案给出的三种做法中,有两种是空间向量的方法.这说明向量法是一种趋势.所以在复习中建议加强对利用空间向量解答立体几何问题的常用解题方法的训练.

第十章 排列组合、二项式定理、概率与统计命题趋向与应试策略

1.排列组合、二项式定理内容在高考中所占比重不大,但试题都具有一定的灵活性、敏感性和综合性.在“倡导创新体系,提倡素质教育”的今天,本章的考题是最好的体现.一般有1~2道小题,且多为选择、填空题,应注意二项式定理在近似计算中的应用.

2.高考对二项式定理的考查,以二项式展开式及其通项公式内容为主,要有目标意识和构造意识,要注意展开式的通项公式正、反两方面的应用.此类题也可分两类.

(1) 直接运用通项公式求特定项的系数或与系数有关的问题;

(2) 需用转化思想化归为二项式问题来处理的问题.

3. 高考对统计、概率内容的考查,往往以实际应用题出现. 这既是这类问题的特点,也符合高考发展方向,考生要以课本概念和方法为主,以熟练技能,巩固概念为目标,查找知识缺漏,总结解题规律. 近年高考命题中,一般都会有一道大题,大约在倒数第 3,4 题的位置.

4. 本章试题的特点是:

(1) 综合性强. 如排列、组合题大多能与集合、数列、立体几何等内容组合构成小型综合题,使每题涉及的知识点在两个以上;

(2) 应用性强,如统计问题及概率问题,都是以实际问题为背景;

(3) 对运用数学思想的要求高,如解排列、组合问题时,需分类讨论、分步讨论. 以几何为背景的排列、组合题需用数形结合的思想,在解非二项式问题时,需用转化思想化归为二项式问题求解等,这种命题特点在以后的高考中仍会保持下去.

6. 根据高考试题的现状和发展趋势看,考生应:

(1) 立足基础知识和基本方法的复习. 恰当选取典型例题,构建思维模式,造就思维依托和思维的合理定势,如对排列应用题可用①某元素排在某位上;②某元素不排在某位上;③某几个元素排在一起;④某几个元素不得相邻;⑤某几个元素顺序一定等基本问题,加强思维的规范训练.

(2) 抓好破势训练,为提高能力,运用变式题目,常规题向典型题的转化,进行多种解法训练,从不同角度,不同侧面对题目进行全面分析,结合典型的错解分析,查找思维的缺陷,提高分析解决问题的能力.

(3) 抓好“操作”训练,就是面对问题,具体排一排、选一选,运用分类计数原理和分步计数原理为“完成这件事”设计合理的程序或分类标准,注意加强解题过程的展示与分析.

(4) 加强数学思想方法的训练. 数学思想方法是高考的重要内容. 分类讨论、转化思想、整体思想、正难则反等数学思想在本章试题中经常考查,需要平时经常归纳总结.

另外,在复习中要控制好训练题的难度. 不做难题、偏题、怪题,一般两个以上附加条件的应用题可不考虑,文科复习在题型上应与理科相同,但题中数量关系可简单些,以降低题目的难度.

(5) 重点掌握随机事件、等可能事件、互斥事件、独立事件、独立重复试验中恰好发生 n 次等五种事件的概率,会用样本频率分布估计总体分布,会用样本平均数估计总体期望值,会用样本的方差估计总体方差.

第十一章 导数命题趋向与应试策略

1. 本章内容在高考中以填空题和解答题为主. 主要考查:

(1) 函数的极限;

(2) 导数在研究函数的性质及在解决实际问题中的应用;

(3) 计算曲边图形的面积和旋转体的体积.

2. 考生应立足基础知识和基本方法的复习,以课本题目为主,以熟练技能,巩固概念为目标.



□ 山东 刘永旺 杜凤霞 孙建平

“会而不对,对而不全”一直以来是制约学生数学成绩提高的重要因素,成为学生挥之不去的痛,如何解决这个问题对决定学生的高考成败起着至关重要的作用. 本文结合笔者的多年高三教学经验,精心挑选学生在考试中常见的 54 个易错、易混、易忘以及思维受阻型题目,这些问题也是高考中的热点和重点,做到力避偏、怪、难,进行精彩剖析并配以近几年的高考试题作为相应练习,一方面让你明确这样的问题在高考中确实存在,另一方面通过作针对性练习帮你识破命题者精心设计的陷阱,以达到授人以渔的目的,助你在高考中乘风破浪,实现自己的理想抱负.

【失分点 1】忽视空集是任何非空集合的子集导致思维不全面.

例 1. 设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 组成的集合的子集有多少个?

【分析】

此题由条件 $A \cap B = B$ 易知 $B \subseteq A$, 由于空集是任何非空集合的子集,但在解题中极易忽略这种特殊情况而造成求解满足条件的 a 值产生漏解现象.

【解析】

集合 A 化简得 $A = \{3, 5\}$, 由 $A \cap B = B$ 知 $B \subseteq A$, 故 (I) 当 $B = \varnothing$ 时, 即方程 $ax - 1 = 0$ 无解, 此时 $a = 0$ 符合已知条件; (II) 当 $B \neq \varnothing$ 时, 即方程 $ax - 1 = 0$ 的解为 3 或 5, 代入得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$. 综上满足条件的 a 组成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$, 故其子集共有 $2^3 = 8$ 个.

【点拨】

(1) 在应用条件 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ 时, 要树立起分类讨论的数学思想, 将

集合 A 是空集 $\varnothing$ 的情况优先进行讨论.

(2) 在解答集合问题时, 要注意集合的性质“确定性、无序性、互异性”特别是互异性对集合元素的限制. 有时需要进行检验求解的结果是满足集合中元素的这个性质, 此外, 解题过程中要注意集合语言(数学语言)和自然语言之间的转化如: $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) \mid (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2\}$, 其中 $r > 0$, 若 $A \cap B = \varnothing$, 求 r 的取值范围. 将集合所表达的数学语言向自然语言进行转化就是: 集合 A 表示以原点为圆心以 2 为半径的圆, 集合 B 表示以点 $(3, 4)$ 为圆心, 以 r 为半径的圆, 当两圆无公共点即两圆相离或内含时, 求半径 r 的取值范围. 思维马上就可利用两圆的位置关系来解答. 此外如不等式的解集等也要注意集合语言的应用.

【练 1】 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $a = 1$ 或 $a \leq -1$.

【失分点 2】求解函数值域或单调区间易

忽视定义域优先的原则.

例 2. 已知 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围.

【分析】

此题学生很容易只是利用消元的思路将问题转化为关于 x 的函数最值求解, 但极易忽略 x, y 满足 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 这个条件中的两个变量的约束关系而造成定义域范围的扩大.

【解析】

由于 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 得 $(x+2)^2 = 1 - \frac{y^2}{4} \leq 1$, $\therefore -3 \leq x \leq -1$, 从而 $x^2 + y^2 = -3x^2 - 16x - 12 = \frac{28}{3}$, 因此当 $x = -1$ 时 $x^2 + y^2$ 有最小值 1, 当 $x = -\frac{8}{3}$ 时, $x^2 + y^2$ 有最大值 $\frac{28}{3}$. 故 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 $[1, \frac{28}{3}]$.

【点拨】

事实上我们可以从解析几何的角度来理解条件 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 对 x, y 的限制, 显然方程表示以 $(-2, 0)$ 为中心的椭圆, 则易知 $-3 \leq x \leq -1, -2 \leq y \leq 2$. 此外本题还可通过三角换元转化为三角最值求解.

【练 2】('05 高考重庆卷) 若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上变化, 则 $x^2 + 2y$ 的最大值为 ()

$$\begin{aligned} \text{A. } & \begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 4) \\ 2b & (b \geq 4) \end{cases} & \text{B. } & \begin{cases} \frac{b^2}{4} + 4 & (0 < b < 2) \\ 2b & (b \geq 2) \end{cases} \\ \text{C. } & \frac{b^2}{4} + 4 & \text{D. } & 2b \end{aligned}$$

答案: A

【失分点 3】求解函数的反函数易漏掉确定原函数的值域即反函数的定义域.

例 3. $f(x) = \frac{a \cdot 2^x - 1}{1 + 2^x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

(1) 求 a 的值; (2) 求反函数 $f^{-1}(x)$.

【分析】

求解已知函数的反函数时, 易忽略求解反函数的定义域即原函数的值域而出错.

【解析】

(1) 利用 $f(x) + f(-x) = 0$ (或 $f(0) = 0$) 求得 $a = 1$.

(2) 由 $a = 1$ 即 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 设 $y = f(x)$, 则 $2^x(1 - y) = 1 + y$. 由于 $y \neq 1$ 故 $2^x = \frac{1+y}{1-y}, x = \log_2 \frac{1+y}{1-y}$, 而 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1} \in (-1, 1)$, 所以 $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} (-1 < x < 1)$.

【点拨】

(1) 在求解函数的反函数时, 一定要通过确定原函数的值域, 即反函数的定义域, 在反函数的解析式后标明 (若反函数的定义域为 $\mathbf{R}$ 可省略).

(2) 应用 $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ 可省略求反函数的步骤, 直接利用原函数求解, 但应注意其自变量和函数值要互换.

【练 3】('04 全国理) 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$ 的反函数是 ()

- A. $y = x^2 - 2x + 2 (x < 1)$
B. $y = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$
C. $y = x^2 - 2x (x < 1)$
D. $y = x^2 - 2x (x \geq 1)$

答案: B

【失分点 4】不能正确理解形如 $y = f^{-1}(x-1)$ 的函数与原函数 $y = f(x)$ 的关系.

例 4. 已知函数 $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$, 函数 $y = g(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x-1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $y = g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = \frac{3-2x}{x}$ B. $g(x) = \frac{2-x}{1+x}$
C. $g(x) = \frac{1-x}{2+x}$ D. $g(x) = \frac{3}{2+x}$

【分析】

解答本题时易由 $y=g(x)$ 与 $y=f^{-1}(x-1)$ 互为反函数, 而认为 $y=f^{-1}(x-1)$ 的反函数是 $y=f(x-1)$, 则 $y=g(x)=f(x-1)=\frac{1-2(x-1)}{1+(x-1)}=\frac{3-2x}{x}$ 而错选 A.

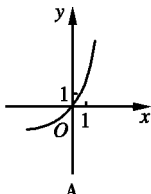
【解析】

由 $f(x)=\frac{1-2x}{1+x}$ 得 $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2+x}$, 从而 $y=f^{-1}(x-1)=\frac{1-(x-1)}{2+(-1)}=\frac{2-x}{1+x}$, 再求 $y=f^{-1}(x-1)$ 的反函数得 $g(x)=\frac{2-x}{1+x}$. 正确答案为 B.

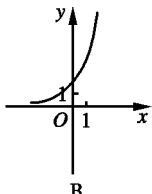
【点拨】

函数 $y=f^{-1}(x-1)$ 与函数 $y=f(x-1)$ 并不互为反函数, 他只是表示 $f^{-1}(x)$ 中 x 用 $x-1$ 替代后的反函数值. 这是因为由求反函数的过程来看: 设 $y=f(x-1)$ 则 $f^{-1}(y)=x-1, x=f^{-1}(y)+1$, 再将 x, y 互换即得 $y=f(x-1)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)+1$, 故 $y=f(x-1)$ 的反函数不是 $y=f^{-1}(x-1)$, 因此在今后求解此类问题时一定要谨慎.

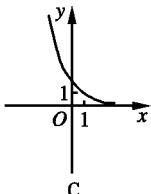
【练 4】('04 高考福建卷) 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图像是 ()



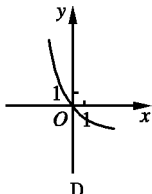
A.



B.



C.



D.

答案: B

【失分点 5】判断函数的奇偶性时, 易忽视函数具有奇偶性的必要条件: 定义域关于原点对称.

例 5. 判断函数 $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{|x-2|-2}$ 的奇偶性.

【分析】

此题常犯的错误是不考虑定义域, 而按如下步骤求解: $f(-x)=\frac{\lg(1-x^2)}{|x+2|-2} \neq f(x)$ 从而得出函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数的错误结论.

【解析】

由函数的解析式知 x 满足 $\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ |x-2| \neq 2 \end{cases}$ 即函数的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$, 定义域关于原点对称, 在定义域下 $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{-x}$, 易证 $f(-x)=-f(x)$ 即函数为奇函数.

【点拨】

(1) 函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要但不充分条件, 因此在判断函数的奇偶性时一定要先研究函数的定义域.

(2) 函数 $f(x)$ 具有奇偶性, 则 $f(x)=f(-x)$ 或 $f(x)=-f(-x)$ 是对定义域内 x 的恒等式. 常常利用这一点求解函数中字母参数的值.

【练 5】判断下列函数的奇偶性:

① $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$ ② $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ③ $f(x)=\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}$

答案: ①既是奇函数又是偶函数 ②非奇非偶函数 ③非奇非偶函数

【失分点 6】易忘原函数和反函数的单调性和奇偶性的关系. 从而导致解题过程繁琐.

例 6. 函数 $f(x)=\log_2 \frac{2x-2}{2x+1} (x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{2})$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 证明 $f^{-1}(x)$ 是奇函数且在其定义域上是增函数.

【分析】

可求 $f^{-1}(x)$ 的表达式, 再证明. 若注意

到 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 具有相同的单调性和奇偶性, 只需研究原函数 $f(x)$ 的单调性和奇偶性即可.

【解析】

$f(-x) = \log_2 \frac{-2x-1}{-2x+1} = \log_2 \frac{2x+1}{2x-1} = -\log_2 \frac{2x-1}{2x+1} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数从而 $f^{-1}(x)$ 为奇函数. 又令 $t = \frac{2x-1}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1}$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上均为增函数且 $y = \log_2 t$ 为增函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上分别为增函数. 故 $f^{-1}(x)$ 分别在 $(0, +\infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 上分别为增函数.

【点拨】

对于反函数知识有如下重要结论: (1) 定义域上的单调函数必有反函数. (2) 奇函数的反函数也是奇函数且原函数和反函数具有相同的单调性. (3) 定义域为非单元素的偶函数不存在反函数. (4) 周期函数不存在反函数. (5) 原函数的定义域就是反函数的值域, 原函数的值域就是反函数的定义域. 即 $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

【练 6】('05 天津卷) 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a > 1$) 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$
C. $(\frac{a^2-1}{2a}, a)$ D. $(a, +\infty)$

答案: A ($a > 1$ 时, $f(x)$ 单调增函数, 所以 $f^{-1}(x) > 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(1) \Leftrightarrow x > f(1) = \frac{a^2-1}{2a}$)

【失分点 7】证明或判断函数的单调性要从定义出发, 注意步骤的规范性及树立定义域优先的原则.

例 7. 试判断函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0$, $b > 0$) 的单调性并给出证明.

【分析】

在解答题中证明或判断函数的单调性必须依据函数的性质解答. 特别注意定义 $x_1 \in D, x_2 \in D, f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) 中的 x_1, x_2 的任意性. 以及函数的单调区间必是函数定义域的子集, 要树立定义域优先的意识.

【解析】

由于 $f(-x) = -f(x)$ 即函数 $f(x)$ 为奇函数, 因此只需判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性即可. 设 $x_1 > x_2 > 0, f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \frac{ax_1x_2 - b}{x_1x_2}$. 由于 $x_1 - x_2 > 0$ 故当 $x_1, x_2 \in (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 时 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上为增函数, 同理可证函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 上为减函数. 又由于函数为奇函数, 故函数在 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 上为减函数, 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$ 上为增函数. 综上所述: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$ 和 $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上分别为增函数, 在 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 和 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 上分别为减函数.

【点拨】

(1) 函数的单调性广泛应用于比较大小、解不等式、求参数的范围、最值等问题中, 应引起足够重视.

(2) 单调性的定义等价于如下形式: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数 $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数 $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 这表明增减性的几何意义: 增(减)函数的图