数与代数

刘徽(生于公元 250 年左右),是中国数学史上伟大的数学家,在世界数学史上也占有杰出的地位.他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》是我国最宝贵的数学遗产.刘徽钻研学术严谨、求实,讲究"析理以辞,解体用图",他善于启发,主张"告往而知来,举一隅而三隅反".

1 数形结合话数轴

解读课标

数学是研究"数"和"形"的一门学科,从古希腊时期起,人们就已试图把它们统一起来.

在日常生活中我们通常对有形的东西认识比较快,而对抽象的东西认识比较慢,这正是现阶段数学学习的特点,以形助数是数学学习的一个重要方法.

运用数形结合思想解题的关键是建立数与形之间的联系,现阶段数轴是数形联系的有力工具,主要反映在:

1. 利用数轴形象地表示有理数;
2. 利用数轴直观地解释相反数;
3. 利用数轴解决与绝对值有关的问题;
4. 利用数轴比较有理数的大小.

问题解决

例 1 已知数轴上有 A、B 两点,A、B 之间的距离为 1,点 A 与原点 O 的距离为 3,那么点 B 对应的数是____.

(2004 年广西竞赛题)

试一试 确定 A、B 两点在数轴上的位置,充分考虑 A、B 两点的多种位置关系.

视野窗

我想试一试(I'll Try)

——英·罗赛蒂

那个说"我想试试"的小孩
他将登上山巅
那个说:"我不成"的小孩
在山下停步不前
"我想试试"
每天办成很多事
"我不成"
就真的一事无成
因此你务必说"我想试试"
将"我不成"弃于埃尘

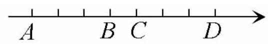
想一想

(1)有理数与数轴上的点有怎样的关系?

(2)利用数轴如何比较有理数的大小?

(3)数轴上表示互为相反数的点有何特点?

例 2 如图，数轴上标出若干个点，每相邻两点相距 1 个单位，点 A、B、C、D 对应的数分别是整数 a、b、c、d，且 $d-2a=10$，那么数轴的原点应是（　　）.



A. A 点　　B. B 点　　C. C 点　　D. D 点

（江苏省竞赛题）

试一试 从寻找 d 与 a 的另一关系式入手.

例 3 已知两数 a、b，如果 a 比 b 大，试判断 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小.

试一试 因 a、b 符号未定，故 a 比 b 大有多种情形，借助数轴可直观全面比较 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小.

例 4 （1）阅读下面材料：

点 A、B 在数轴上分别表示数 a、b，A、B 两点之间的距离表示为 $|AB|$. 当 A、B 两点中有一点在原点时，不妨设点 A 在原点，如图 1，$|AB|=|OB|=|b|=|a-b|$；当 A、B 两点都不在原点时，

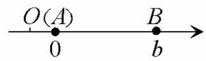


图 1

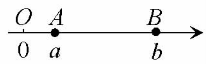


图 2

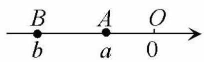


图 3

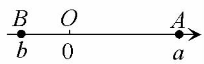


图 4

①如图 2，点 A、B 都在原点的右边 $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|$；

②如图 3，点 A、B 都在原点的左边，$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=-b-(-a)=|a-b|$；

③如图 4，点 A、B 在原点的两边，$|AB|=|OA|+|OB|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$.

综上，数轴上 A、B 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$.

（2）回答下列问题：

①数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是____，数轴上表示 -2 和 -5 的两点之间的距离是____，数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是____；

②数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是____，如果 $|AB|=2$，那么 x 为____；

③当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是____；

④求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-1997|$ 的最小值.

（南京市中考题）

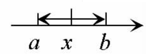
试一试 阅读理解，从数轴上看 $|a-b|$ 的意义.

视野窗

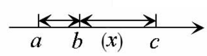
在解有些数学问题时，常常会出现答案不惟一或多种情况的问题，解这类问题时，需要把所有可能情况按一定标准分成若干类，然后逐步讨论，得出结果. 这种解题方法称为分类讨论法.

（1）$|a-b|$ 的几何意义是数轴上表示数 a、b 两点间的距离.

（2）如图：当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$|x-a|+|x-b|$ 的值最小.



如图，当 $x=b$ 时，$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的值最小.

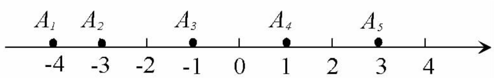


（3）一般地，设 a_1、a_2、$a_3\cdots a_n$ 是数轴上依次排列的点表示的有理数，则

当 n 为奇数时，若 $x=a_{\frac{n+1}{2}}$ 时，则 $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 值最小；

当 n 为偶数时，若 $a_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$，则 $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 值最小.

例 5 一条直线的流水线上依次有 5 个机器人，它们站立的位置在数轴上依次用点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 表示，如图.



（1）怎样将点 A_3 移动，使它先到达 A_2，再到达 A_5，请用文字语言说明.

（2）若原点是零件的供应点，那 5 个机器人分别达到供应点取货的总路程是多少？

（3）将零件的供应点设在何处，才能使 5 个机器人分别到达供应点取货的总路程最短？

试一试 对于（3），即在数轴上找一点，使它到表示数 -4、-3、-1、1、3 点的距离和最小，也即求式子 $|x-(-4)|+|x-(-3)|+|x-(-1)|+|x-1|+|x-3|$ 的最小值.

视野窗

从文字、图形、图表获取信息是信息社会的基本要求.

从数轴上获取有关信息是解有理数问题的基本要求，主要包括：

（1）数轴上的点所表示的数的正负性；

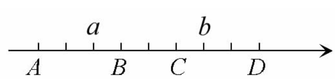
（2）数轴上的点到原点的距离.

数学冲浪

知识技能广场

1. 数轴上有 A、B 两点，若点 A 对应的数是 -2，且 A、B 两点的距离为 3，则点 B 对应的数是____.

2. 如图，若 a 的绝对值是 b 的绝对值的 3 倍，则数轴的原点在____点或____点（填“A”、“B”、“C”或“D”）.



（第 2 题）

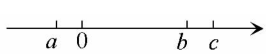
（第 14 届“希望杯”邀请赛试题）

3. 已知 $a>0,b<0$，且 $a+b<0$，那么有理数 a、b、$-a$、$|b|$ 的大小关系是______________.（用“$<$”号连接）

4. 在数轴上，点 A、B 分别表示有理数 a、b，原点 O 恰是 AB 的中点，则 $1995a\times\dfrac{26}{3b}$ 的值是____.

5. 有理数 a、b、c 在数轴上的位置如图，式子 $|a|+|b|+|a+b|+|b-c|$ 化简结果为（　　）.

A. $2a+3b-c$　　B. $3b-c$　　C. $b+c$　　D. $c-b$



（第 5 题）

（第 6 题）

6. 如图,在数轴上有六个点,且 $AB=BC=CD=DE=EF$,则与点 C 所表示的数最接近的整数是(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

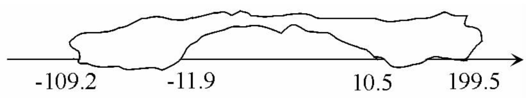
7. 在数轴上 A 点和 B 点所表示的数分别为 -2 和 1,若使 A 点表示的数是 B 点表示的数的 3 倍,应将 A 点(　　).

A. 向左移动 5 个单位　　B. 向右移动 5 个单位

C. 向右移动 4 个单位　　D. 向左移动 1 个单位或向右移动 5 个单位

8. 一滴墨水洒在一个数轴上,根据图中标出的数值,可以判定墨迹盖住的整数个数是(　　).

A. 285　　B. 286　　C. 287　　D. 288



(第 8 题)

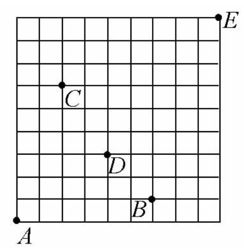
9. 在一条东西走向的马路旁,有青少年宫、学校、商场、医院四家公共场所. 已知青少年宫在学校东 300m 处,商场在学校西 200m 处,医院在学校东 500m 处. 若将马路近似地看作一条直线,以学校为原点,向东方向为正方向,用 1 个单位长度表示 100m.

(1)在数轴上表示出四家公共场所的位置;

(2)列式计算青少年宫与商场之间的距离.

(2004 年山西省曲沃课改实验区中考题)

10. 如图,小蚂蚁在 9×9 的小方格上沿着网格线运动(每小格边长为 1). 一只蚂蚁在 C 处找到食物后,要通知 A、B、D、E 处的其他小蚂蚁,我们把它的行动规定为:向上或向右走为正,向下或向左走为负. 如果从 C 到 D 记为:$C\to D(+2,-3)$(第一个数表示左、右方向,第二个数表示上、下方向),那么



(1)$C\to B$(　　　　);　$C\to E$(　　　　);

$D\to$______$(-4,-3)$;$D\to$____(____,$+3$);

(2)若这只小蚂蚁的行走路线为 $C\to E\to D\to B\to A\to C$,请你计算小蚂蚁走过的路程.

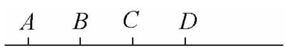
思想方法天地

11. 在数轴上,点 A、B 分别表示 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$,则线段 AB 的中点所表示的数是____.

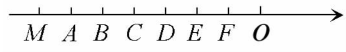
12. 已知数轴上表示负有理数 m 的点是点 M,那么在数轴上与 M 相距 $|m|$ 个单位的点中,与原点距离较远的点对应的数是____.

(山东省竞赛题)

13. 如图，工作流程线上 A、B、C、D 处各有 1 名工人，且 $AB=BC=CD=1$，现在工作流程线上安放一个工具箱，使 4 个人到工具箱的距离之和最短，则工具箱的安放位置是________.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，数轴上线段 MO（O 为原点）的七等分点 A、B、C、D、E、F 中，只有两点对应的数是整数，点 M 对应的数 $m>-10$，那么 m 可以取的不同值有____个，m 的最小值为____.

（第 18 届江苏省竞赛题）

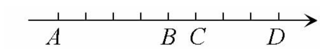
15. 设 $y=|x-1|+|x+1|$，则下面四个结论中正确的是（　　）.

A. y 没有最小值

B. 只有一个 x 使 y 取最小值

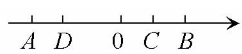
C. 有限个 x（不止一个）使 y 取最小值

D. 有无穷多个 x 使 y 取最小值

16. 如图：

，数轴上标出若干个点，每相邻两点相距 1 个单位，点 A、B、C、D 对应的数分别是整数 a、b、c、d，且 $b-2a=9$，那么数轴的原点对应点是（　　）.

A. A 点　　B. B 点　　C. C 点　　D. D 点

17. 数 a、b、c、d 所对应的点 A、B、C、D 

在数轴上的位置如图所示，那么 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小关系是（　　）.

A. $a+c<b+d$　B. $a+c=b+d$　C. $a+c>b+d$　D. 不确定的

18. 不相等的有理数 a、b、c 在数轴上对应点分别为 A、B、C，若 $|a-b|+|b-c|=|a-c|$，那么点 B（　　）.

A. 在 A、C 点右边　　B. 在 A、C 点左边

C. 在 A、C 点之间　　D. 以上均有可能

19. 电子跳蚤落在数轴上的某点 K_0，第一步从 K_0 向左跳 1 个单位到 K_1，第二步由 K_1 向右跳 2 个单位到 K_2，第三步由 K_2 向左跳 3 个单位到 K_3，第四步由 K_3 向右跳 4 个单位到 K_4…，按以上规律跳了 100 步时，电子跳蚤落在数轴上的点 K_{100} 所表示的数恰是 19.94，试求电子跳蚤的初始位置 K_0 点所表示的数.

应用探究乐园

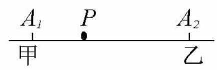
20. 在数轴上，N 点与 O 点的距离是 N 点与 30 所对应点之间的距离的 4 倍，那么 N 点表示的数是多少？

（2004 年“CASIO 杯”河南省竞赛题）

21. 先阅读下面的材料，然后解答问题：

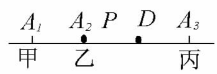
在一条直线上有依次排列的 $n(n>1)$ 台机床在工作，我们要设置一个零件供应站 P，使这 n 台机床到供应站 P 的距离总和最小，要解决这个问题，先“退”到比较简单的情形：

如图甲，如果直线上有 2 台机床时，很明显设在 A_1 和 A_2 之间的任何地方都行，因为甲和乙所走的距离之和等于 A_1 到 A_2 的距离.



图甲

如图乙，如果直线上有 3 台机床时，不难判断，供应站设在中间一台机床 A_2 处最合适. 因为如果 P 放在 A_2 处，甲和丙所走的距离之和恰好为 A_1 到 A_3 的距离. 而如果把 P 放在别处，例如 D 处，那么甲和丙所走的距离之和仍是 A_1 到 A_3 的距离，可是乙还得走从 A_2 到 D 的这一段，这是多出来的. 因此 P 放在 A_2 处是最佳选择.



图乙

不难知道，如果直线上有 4 台机床，P 应设在第 2 台与第 3 台之间的任何地方；有 5 台机床，P 应设在第 3 台位置.

问题(1)：有 n 台机床时，P 应设在何处？

问题(2)：根据问题(1)的结论，求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-617|$ 的最小值.

（2004 年山东省烟台市中考题）

数海拾贝

“割圆”的人——刘徽

3 世纪，我国人才辈出，群英荟萃. 刘徽便是这个时期出现的卓越的数学家.

关于刘徽，历史典籍缺乏记载，只知他的家乡是在今山东省临淄或淄川一带.

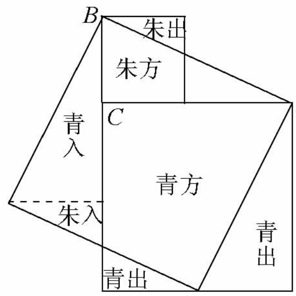
当时，《九章算术》成书已经一百多年了，很少有人深入研究. 刘徽在少年时就学过这部数学经典，成年后又进行了反复深入的研读，得出了许多新颖、独到的见解. 为了使这部数学经典的学术思想流传后代、发扬光大，他于公元 263 年撰写了《九章算术注》.

刘徽在《九章算术注》中的创见很多. 他正确地说明了正、负数的意义，指出：“今两算得失相反，要令正负以名之.”即：得失相反的两种量，要分别记成正数和负数. 他也是世界上最早创造十进小数记法的人，在他之后将近 1200 年，才有阿拉伯数学家阿尔·卡西使用十进小数. 刘徽还专门撰写了一卷“重差术”作为《九章算术注》的附录，把我国古代测量数学的水平又向前推进了一大步. 到唐代的时候，这一卷被抽出来作为一部独立的著作，称为《海岛算经》. 刘徽还系统地总结和发展了我国古代独特的几何理论，明确提出了“出入相补原理”，并运用这一原理证明了一系列几何命题. 如勾股定理的证明：

如图所示，ABC 为勾股形，以勾为边的正方形为朱方，以股为边的正方形为青方. 按图中的标示进行出入相补后拼成弦方，依面积关系显然有关系式：

$$弦方=朱方+青方，$$

即：$$弦^2=勾^2+股^2.$$



刘徽最伟大的数学成就，是他在研究圆周率的过程中，创造了“割圆术”这一数学方法.“割圆术”是这样的：我们知道，圆周率是指圆的周长与直径的比率.在刘徽之前，我国通常采用的是“周三径一”的“古率”，即取圆周率为3，很不精确，它实际上是圆内接正六边形周长与圆的直径之比，而不是圆的周长与直径之比.但刘徽却从中得到了启发：如果把圆周分割成十二等分，作出圆内接正十二边形，那么它的面积和周长就相应地比圆内接正六边形更接近于圆的面积和周长，因而用圆内接正十二边形周长与圆直径之比作圆周率的近似值，就比“周三径一”精确一些.如果再进一步细分，作出圆内接正二十四边形，那么又可求出更精确一些的圆周率近似值.“割之弥细，所失弥少.割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣.”这就是刘徽“割圆”的思想.

刘徽运用“割圆术”，从圆内接正六边形一直割到圆内接正一百九十二边形，得出圆周率的近似值为3.14，又用几何方法把它化为分数$\frac{157}{50}$.用同样方法，继续分割下去，一直割到圆内接正三千零七十二边形，又求得圆周率的近似值为$\frac{3927}{1250}$（$=3.1416$）.这个结果是当时世界上圆周率的最佳近似值.

刘徽的“割圆术”是一种包含极限思想的数学方法.圆周是一条曲线，直径是一条直线，曲与直是一对矛盾.刘徽的“割圆术”化曲为直，以直代曲，在本质上是一种辩证法的思想.

在世界数学史上，刘徽首创运用“割圆术”由圆内接正多边形逼近圆周，从而计算圆周率的近似值，他的这一创举，开启了我国古代圆周率研究的新纪元.

祖冲之，中国古代著名的数学家和天文学家，于公元429年出生于建康(今江苏南京).祖冲之从小就对天文、数学知识发生浓厚的兴趣，“专攻数术，搜炼古今”.他在数学方面的成就，首推圆周率的计算，计算圆周率精确到小数点以后7位，是当时世界上最杰出的成就；在天文学方面，他编写了新的历法——大明历，这是当时最好的一部历法.

视野窗

研究科学最宝贵的精神之一，是创造的精神，是独立开辟荒原的精神，在“山穷水尽疑无路”的时候，卓越的科学家往往另辟蹊径，创造出“柳暗花明又一村”的境界.

——华罗庚

2 聚焦绝对值

解读课标

绝对值是数学中的一个基本概念，这一概念是学习相反数、有理数运算、算术根的基础；绝对值又是数学中的一个重要概念，绝对值与其他知识融合形成绝对值方程、绝对值不等式、绝对值函数等，在代数式化简求值、解方程、解不等式等方面有广泛的应用.理解、掌握绝对值应注意以下几个方面：

1. 脱去绝对值符号是解绝对值问题的切入点.

脱去绝对值符号常用到相关法则、分类讨论、数形结合等知识方法.

2. 恰当地运用绝对值的几何意义

从数轴上看$|a|$表示数a的点到原点的距离；$|a-b|$表示数a、数b的两点间的距离.

3. 灵活运用绝对值的基本性质

①$|a|\geqslant 0$；　②$|a^2|=|a|^2=a^2$；　③$|ab|=|a|\cdot|b|$；

④$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$；⑤$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；⑥$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$.

想一想

下列说法是否正确

(1)若$|a|=a$(或$-a$)，则$a>0$(或$a<0$)；

(2)若$|a|=|b|$，则$a=b$；

(3)若$a>b$，则$|a|>|b|$；

(4)若$|a|>|b|$，则$a>b$.

去掉绝对值符号是解与绝对值相关问题的关键.基本形式有：

(1)直接去掉绝对值符号；

(2)运用分类讨论法去掉绝对值符号.

在具体讨论中，涉及到多个字母时，要考虑各个字母取值的所有情形，与多个绝对值相关时，要用到零点分段讨论法.

问题解决

例1　已知$y=|x-b|+|x-20|+|x-b-20|$，其中$0<b<20$，$b\leqslant x\leqslant 20$，那么y的最小值为____.

(2004年“CASIO杯”河南省竞赛题)

试一试　结合已知条件判断每一个绝对值符号内式子的正负性，再去掉绝对值符号.

例 2 式子$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$的所有可能的值有（　　）.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 无数个

试一试 根据 a、b 的符号所有可能情况，去掉绝对值符号，这是解本例的关键.

视野窗

大于或等于零的数称为非负数，$|a|$、a^{2n}是现阶段非负数的两种重要形式，它们有以下性质：

(1)非负数最小值为零；

(2)若几个非负数的和为零，则每一个非负数为零.

例 3 (1)已知$|ab-2|+|b-1|=0$，求$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2005)(b+2005)}$的值.

（“五羊杯”竞赛题）

(2)设 a、b、c 为整数，且$|a-b|+|c-a|=1$，求$|c-a|+|a-b|+|b-c|$的值.

（“希望杯”邀请赛试题）

试一试 对于(1)，由非负数的性质先导出 a、b 的值；对于(2)，1 写成两个非负整数的和的形式又有几种可能？这是解(2)的突破口.

想一想

设 a、b 为整数，分别满足下列条件的整数对(a,b)有几组？

(1)$a+b=0$；

(2)$|a|+|b|=0$；

(3)$a+b=1$；

(4)$|a|+|b|=1$.

例 4 化简

(1)$|2x-1|$；　　(2)$|x-1|+|x-3|$.

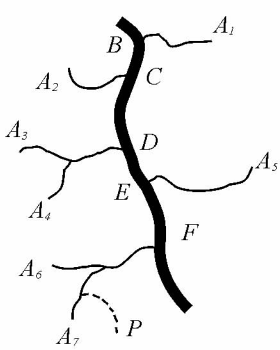
试一试 对于(1)，就 $2x-1\geqslant 0$、$2x-1<0$ 两种情形讨论；对于(2)，把零点(使 $x-1=0$，$x-3=0$ 的值)、1、3 在同一数轴上表示出来，就 $x<1$、$1\leqslant x<3$、$x\geqslant 3$ 三种情况进行讨论.

求零点、分区间、定性质、去符号是零点分段讨论法解题的一般步骤.即令各绝对值式子为零，得若干个绝对值为零的点，这些点把数轴分成若干个部分，再在各部分内化简求值.

例 5 (1)已知$|x-3|+|x+2|$的最小值为 a，$|x-3|-|x+2|$的最大值为 b. 求 $a+b$ 的值.

(2)如图是一个工厂的厂区地图，一条公路(粗线)通过这个地区. 7 个工厂 A_1、A_2、$\cdots A_7$ 分布在公路两旁，由一些小路(细线)与公路相连，现在要在公路上设一个长途汽车站，车站到各个工厂(沿公路、小路走)的距离总和越小越好，这个车站建在什么地方最好？

（北京市竞赛题）



试一试 与绝对值相关的最值问题，利用数轴从绝对值几何意义入手，可获得直观的简解. 对于(2)，每一条小路都是工厂到车站的必经之路，和其他工厂无关，但在公路上有些路段将是一些工厂重复经过的，应使重复线段越短越好，要使各工厂到车站距离总和最小，只要各工厂经小路进入公路的入口处到车站距离总和最小即可.

视野窗

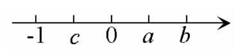
对于(2)，如果在 P 的地方又建了一个工厂，并且沿着图上的虚线修了一条小路，那么，这时车站修在什么地方最好？

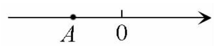
数学冲浪

知识技能广场

1. 若有理数 a、b 满足 $|a+4|+|b-1|=0$，则 $a+b=$____.
2. 已知 $|a|=5$，$|b|=3$，且 $|a-b|=b-a$，那么 $a+b=$____.
3. 化简 $\left|\frac{1}{2004}-\frac{1}{2003}\right|+\left|\frac{1}{2003}-\frac{1}{2002}\right|+\left|\frac{1}{2002}-\frac{1}{2001}\right|+\left|\frac{1}{2001}-\frac{1}{2004}\right|=$____.

(2004 年北京市竞赛题)

4. 已知有理数 a、b、c 在数轴上的对应位置如图所示：，则 $|c-1|+|a-c|+|a-b|$ 化简后的结果是____.

5. 如图，数轴上的点 A 所表示的是有理数 a，，则点 A 到原点的距离是(　　).

A. a　　B. $-a$　　C. $\pm a$　　D. $-|a|$

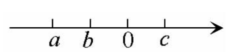
(2004 年南昌市中考题)

6. 已知 $|a|=-a$，化简 $|a-1|-|a-2|$ 所得的结果是(　　).

A. -1　　B. 1　　C. $2a-3$　　D. $3-2a$

7. 若 m 是有理数，则 $|m|-m$ 一定是(　　).

A. 零　　B. 非负数　　C. 正数　　D. 负数

8. 有理数 a、b、c 的大小关系如图：，则下列式子中一定成立的是(　　).

A. $a+b+c>0$　　B. $|a+b|<c$

C. $|a-c|=|a|+c$　　D. $|b-c|>|c-a|$

(第 15 届“希望杯”邀请赛试题)

9. 化简

(1) $|3-x|$；　　(2) $|3x-2|+|2x+3|$.

10. 已知 a、b、c 是非零有理数，且 $a+b+c=0$，求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值.

思想方法天地

11. 已知$|a|=1,|b|=2,|c|=3$，且$a>b>c$，那么$a+b-c=$____.

（北京市“迎春杯”竞赛题）

12. a与b互为相反数，且$|a-b|=\frac{4}{5}$，那么$\frac{a-ab+b}{a^2+ab+1}=$____.

（“希望杯”邀请赛试题）

13. 对一切有理数，$|x+1|+|x+2|>a$恒成立，则a的取值范围是____.

14. 设a、b、c分别是一个三位数的百位、十位和个位数字，并且$a\leqslant b\leqslant c$，则$|a-b|+|b-c|+|c-a|$可能取得的最大值为____.

（江苏省竞赛题）

15. 若$x<-2$，则$y=|1-|1+x||$等于（　　）.

A. $2+x$　　B. $-2-x$　　C. x　　D. $-x$

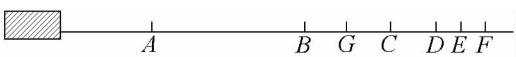
（2004年四川省竞赛题）

16. 如果$2a+b=0$，则$\left|\frac{a}{|b|}-1\right|+\left|\frac{|a|}{b}-2\right|$等于（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

17. 如图，在一条笔直的公路上有7个村庄，其中A、B、C、D、E、F离城市的距离分别为4、10、15、17、19、20千米，而村庄G正好是AF的中点.现要在某个村庄建一个活动中心，使各村到活动中心的路程之和最短，则活动中心应建在（　　）.

A. A处　　B. G处　　C. C处　　D. E处



（第16届江苏省竞赛题）

18. 若$0<a<1$，$-2<b<-1$，则$\frac{|a-1|}{a-1}-\frac{|b+2|}{b+2}+\frac{|a+b|}{a+b}$的值是（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. -3

（2004年太原市竞赛题）

19. 已知a、b、c、d是有理数，$|a-b|\leqslant 9$，$|c-d|\leqslant 16$，且$|a-b-c+d|=25$，求$|b-a|-|d-c|$的值.

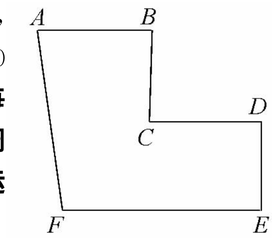
（第14届“希望杯”邀请赛试题）

20. 已知$|x_1-1|+|x_2-2|+|x_3-3|+\cdots+|x_{2002}-2002|+|x_{2003}-2003|=0$，求$2^{x_1}-2^{x_2}-2^{x_3}-\cdots-2^{x_{2002}}+2^{x_{2003}}$的值.

应用探究乐园

21. 已知$|x+2|+|1-x|=9-|y-5|-|1+y|$，求$x+y$的最大值及最小值.

22. 如图,在环形运输线路上有 A、B、C、D、E、F 6 个仓库,现有某种货物的库存量分别为 50 吨、84 吨、80 吨、70 吨、55 吨和 45 吨. 要对各仓库的存货进行调整,使得每个仓库的存货相等,但每个仓库只能向相邻的仓库调运,并使调运的总量最小. 求各仓库向其他仓库的调运量.



数海拾贝

数学符号的来历

在文明和科学的发展过程中,人类创造用符号代替语言、文字的方法,这是因为符号比语言、文字更简练、更直观、更具一般性.

纵观历史,数学的发展创造了数学符号,新的数学符号的使用又反过来促进了数学的发展,历史是这样一步一步走过来的,并将这样一步步继续走下去,数学的每一个进步都必须伴随着新的数学符号的产生.

“+”是 15 世纪德国数学家魏德美所创造的. 它的意思是:在横线上加上一竖,表示增加;

“-”也是德国数学家魏德美创造的. 它的意思是:从加号中减去一竖,表示减少;

“×”是 18 世纪美国数学家欧德莱最先使用的. 它的意思是:表示增加的另一种方法. 因而把加号斜过来写;

“÷”是 18 世纪瑞士人哈纳创造的. 它的含义是分解的意思,因此用一条横线把两个圆点分开;

“=”是 16 世纪英国学者列科尔德发明的. 列科尔德认为世界上再也没有比这两条平行而相等的直线更相同了,所以用来表示两数相等.

17 世纪初,法国数学家笛卡儿在他的《几何学》中,第一次使用“$\sqrt{\quad}$”表示根号.

17 世纪德国数学家莱布尼茨在几何学中用“∽”表示相似,用“≌”表示全等.

杨辉，中国南宋时期杰出的数学家．大约于13世纪中叶至末叶生活在钱塘（今杭州）一带．他一生著作很多，著名的数学书共5种21卷．大家熟悉的“杨辉三角”数表就在他1261年所著的《详解九章算法》一书里记载着，他在《续古摘奇算法》中介绍了各种形式的“纵横图”及有关的构造方法．

3 有理数的运算

解读课标

有理数及其运算是整个数与代数的基础，有关式的所有运算都是建立在数的运算基础上．深刻理解有理数相关概念，掌握一定的有理数运算技能是数与代数学习的基础．

有理数的运算不同于算术数的运算；这是因为有理数的运算每一步要确定符号，有理数的运算很多是字母运算，也就是常说的符号演算．

运算能力是运算技能与推理能力的结合．这就要求我们既能正确地算出结果，又能善于观察问题的结构特点，选择合理的运算路径，提高运算的速度．有理数运算常用的技巧与方法有：

利用运算律；以符代数；恰当分组；裂项相消；分解相约；错位相减等．

问题解决

例1 从一副扑克牌（去掉大、小王）中任意抽取四张牌，根据牌面上的数字进行加、减、乘、除和乘方混合运算（可以使用括号，但每张牌不重复使用），使运算结果为24或-24，其中A、2、3、…、K依次代表1，2，3，…，13．红色扑克牌代表正数，黑色扑克牌代表负数，某同学抽到的四张牌是红桃3、黑桃4、方块6和梅花K．请你写出两个算式________________．

（2004年河北省中学数学创新与知识应用竞赛题）

试一试　从24最简单的不同表达式入手，逆推、拼凑．

视野窗

数感是人对数与运算的一般理解，这种理解可以帮助人们用灵活的方法做出数学判断和为解决复杂的问题提出有用的策略．

由于正负数、相反数、倒数的引入，加减法可以统一为加法，乘除法可以统一为乘法．此外，我们对运算的观念得以改变．

想一想

(1)两个有理数相加，其和是否一定大于任一加数？

(2)两个有理数相减，其差是否一定小于被减数？

例 2 已知整数 a、b、c、d 满足 $abcd=25$，且 $a>b>c>d$，那么 $|a+b|+|c+d|$ 等于(　　).

A. 0　　B. 10　　C. 2　　D. 12

（第 18 届江苏省竞赛题）

试一试 解题的关键是把 25 表示成 4 个不同整数的积的形式.

例 3 计算

(1) $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\cdots+(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60})$

（2004 年广西竞赛题）

(2) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$；

（“祖冲之杯”邀请赛题）

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$.

试一试 对于(1)，设原式 $=s$，将各括号反序相加；对于(2)，若计算每个分母值，则易掩盖问题的实质，不妨先从考察一般情形入手；对于(3)，因相邻两组之比为 $\frac{1}{2}$，故可设原式 $=a$，得 $\frac{1}{2}a$，进而错位相减.

例 4 (1) 若按奇偶分类，则 $2^{2004}+3^{2004}+7^{2004}+9^{2004}$ 是____数；

(2) 设 $a=3^{55}$，$b=4^{44}$，$c=5^{33}$，则 a、b、c 的大小关系是____（用“$>$”号连接）；

(3) 求证：$3^{2002}+4^{2002}$ 是 5 的倍数.

试一试 乘方运算是一种特殊的乘法运算，解与乘方运算相关问题常用到以下知识：①乘方意义；②乘方法则；③ $a^{2n}\geqslant 0$；④ a^n 与 a 的奇偶性相同；⑤在 n^{4k+r} 中(k，r 为非负整数，$n\neq 0$，$0\leqslant r<4$)，当 $r=0$ 时，n^{4k+r} 的个位数字与 n^4 的个位数字相同；当 $r\neq 0$ 时，n^{4k+r} 的个位数字与 n^r 的个位数字相同.

例 5 如图，在 3×3 的方格表中填入九个不同的正整数：1，2，3，4，5，6，7，8 和 x，使得各行、各列所填的三个数的和都相等. 请确定 x 的值，并给出一种填数法.

（第 15 届“希望杯”邀请赛试题）

视野窗

你熟悉下列关系式吗？

(1) $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$；

(2) $\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$；

(3) $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$；

(4) $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$；

(5) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$；

(6) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

在数学学习中发展数感主要是指：使具有应用数字表示具体的数据和数量关系的能力；能判定不同的运算，有能力进行计算，并具有选择适当的方法（心算、笔算、使用计算器）实施计算的经验，能依据数据进行推理.

试一试 为了充分运用已知条件，恰当地引进不同的字母表示数(如图)．表中各行或各列三数之和都是相等的正整数，即 $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+x}{3}=12+\frac{x}{3}$．又 $a+b=c+d=12+\frac{x}{3}-x=12-\frac{2x}{3}$，从估计 $a+b$ 和 $c+d$ 的最小值入手．

		c
a	b	x
		d

数学冲浪

知识技能广场

1. 计算

(1)$37.9\times0.0038+1.21\times0.379+6.21\times0.159=$____．

(第 16 届“五羊杯”竞赛题)

(2)$211\times(-455)+365\times455-211\times545+545\times365=$____．

(第 15 届“希望杯”邀请赛试题)

(3)$2004\times20032003-2003\times20042004=$____．

(2004 年广西竞赛题)

2. 若 $a=-\frac{2004}{2003}$，$b=-\frac{2003}{2002}$，$c=-\frac{2002}{2001}$，则 a、b、c 的大小关系是____．(用“$<$”号连接)

3. 阅读下列一段话，并解决后面的问题：

观察下面一列数：1，2，4，8，…，我们发现，这一列数从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于 2.

一般地，如果一列数从第二项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，这一列数就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比．

(1)等比数列 5，-15，45，…的第 4 项是____；

(2)如果一列数 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$是等比数列，且公比为 q，那么根据上述的规定，有$\frac{a_2}{a_1}=q,\frac{a_3}{a_2}=q,\frac{a_4}{a_3}=q,\cdots$，所以 $a_2=a_1q,a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,a_4=a_3q=a_1q^3,\cdots,a_n=$____(用 a_1 与 q 的代数式表示)．

(3)一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，则它的第 1 项与第 4 项分别是____．

(2003 年广西省中考题)

4. 若 $|m|=m+1$，则 $(4m+1)^{2004}=$____．

5. $(16+1.63\times2.87-125\times0.115+0.0163\times963)\div0.11=$(　　)．

A. 20　　B. 26　　C. 200　　D. 以上答案都不对

(第十五届“五羊杯”邀请赛试题)

视野窗

幻方和数阵图是我国丰富的文化遗产之一，相传远古时代大禹治水时便发现了“河图与洛书”．幻方，实质上是按一定的格式和要求在方框内填数，使每一行、每一列和每一条对角线上各数之和都相等．

我国宋朝数学家杨辉对幻方有较深的研究，明朝的程大位、清朝的张潮等人创造了丰富多彩的幻方和数阵图．

6. 把足够大的一张厚度为 0.1mm 的纸连续对折，要使对折后的整叠纸总厚度超过 12mm. 至少要对折(　　).

A. 6 次　　B. 7 次　　C. 8 次　　D. 9 次

7. 已知数轴上的 3 点 A、B、C 所对应的数 a、b、c 满足 $a<b<c$，$abc<0$ 和 $a+b+c=0$，那么线段 AB 与 BC 的大小关系是(　　).

A. $AB>BC$　　B. $AB=BC$　　C. $AB<BC$　　D. 不确定的

(第 18 届江苏省竞赛题)

8. 7^{2004} 的个位数是(　　).

A. 1　　B. 3　　C. 7　　D. 9

9. 小王上周五在股市以收盘价(收市时的价格)每股 25 元买进某公司股票 1000 股，在接下来的一周交易日内，小王记下该股票每日收盘价相比前一天的涨跌情况：(单位：元)

星期	一	二	三	四	五
每股涨跌(元)	+2	−0.5	+1.5	−1.8	+0.8

根据上表回答问题：

①星期二收盘时，该股票每股多少元？

②本周内该股票收盘时的最高价，最低价分别是多少？

③已知买入股票与卖出股票均需支付成交金额的千分之五的交易费. 若小王在本周五以收盘价将全部股票卖出，他的收益情况如何？

(2004 年芜湖市课改实验区中考题)

10. 已知 m、n 互为相反数，a、b 互为负倒数，x 的绝对值等于 3，求 $x^3-(1+m+n+ab)x^2+(m+n)x^{2001}+(-ab)^{2003}$ 的值.

(湖北省黄冈市竞赛题)

思想方法天地

11. 计算

(1) $(7\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}-2\frac{1}{7}-1\frac{7}{8})\div(15\frac{1}{2}+7\frac{3}{4}-4\frac{3}{7}-3\frac{7}{8})=$____.

(第 15 届“五羊杯”邀请赛试题)

(2) $2-2^2-2^3-\cdots-2^{18}-2^{19}+2^{20}=$____.

(2004 年桂林市中考题)

(3) $\frac{1\times2\times3+3\times6\times9+5\times10\times15+7\times14\times21}{1\times3\times5+3\times9\times15+5\times15\times25+7\times21\times35}=$____.

12. 设三个互不相等的有理数，既可分别表示为 $1, a+b, a$ 的形式，又可分别表示为 $0, \frac{a}{b}, b$ 的形式，则 $a^{2004}+b^{2001}=$____.

13. $3^{2001}\times7^{2002}\times13^{2003}$ 所得积的末位数字是____.

14. **你能比较两个数 2003^{2004} 和 2004^{2003} 的大小吗？**

为了解决这个问题，我们先写出它的一般形式，即比较 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$ 的大小（n 是自然数），然后，我们从分析 $n=1, n=2, n=3, \cdots$ 中发现规律，经归纳、猜想得出结论.

(1)通过计算，比较下列各组中两个数的大小（在空格中填写"$>$"、"$=$"、"$<$"号）

①$1^2$ ____ 2^1；②$2^3$ ____ 3^2；③$3^4$ ____ 4^3；④$4^5$ ____ 5^4；⑤$5^6$ ____ 6^5…

(2)从第(1)题的结果经过归纳，可以猜想出 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小关系是____；

(3)根据上面归纳猜想得到的一般结论，试比较下列两个数的大小 2003^{2004} ____ 2004^{2003}.

15. **某公司售 A、B、C 三种商品，前一段结账时，商品 C 的售出金额高达总金额的 60%，预计目前阶段 A、B 两种商品售出金额都要比前一阶段少 5%，因而商品 C 是推销重点，要想使现阶段售出的总金额比前一阶段增长 10%，必须使商品 C 的售出金额比前一阶段增加的百分比为（　　）.**

A. 20%　　B. 25%　　C. 30%　　D. 35%

（2004 年"CASIO 杯"河南省竞赛题）

16. **如果 4 个不同的正整数 m、n、p、q 满足 $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=4$，那么 $m+n+p+q$ 等于（　　）.**

A. 10　　B. 21　　C. 24　　D. 26　　E. 28

17. **如果有理数 a、b、c 满足关系式 $a<b<0<c$，那么代数式 $\frac{bc-ac}{ab^2c^3}$ 的值（　　）.**

A. **必为正数**　　B. **必为负数**　　C. **可正可负**　　D. **可能为** 0

18. **设 $m=x+|x-1|$，则 m 的最小值是（　　）.**

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2

（2004 年重庆市竞赛题）

19. **观察下面的等式：**

$2\times2=4, 2+2=4$；

$\frac{3}{2}\times3=4\frac{1}{2}, \frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2}$；

$\frac{4}{3}\times4=5\frac{1}{3}, \frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3}$；

$\frac{5}{4}\times5=6\frac{1}{4}, \frac{5}{4}+5=6\frac{1}{4}$.

(1)小明归纳上面各式得出一个猜想："两个有理数的积等于这两个有理数的和"，小明的猜想正确吗？为什么？

(2)请你观察上面各式的结构特点，归纳出一个猜想，并证明你的猜想.

（第 15 届"希望杯"邀请赛试题）

视野窗