数与代数

阿贝尔(1802～1829)，**挪威数学家．自** 16 **世纪以来，随着三次、四次方程陆续解出，人们把目光落在五次方程的求根公式上，然而近** 300 **年的探索一无所获，阿贝尔证明了一般五次方程不存在求根公式，解决了这个世纪难题．在挪威皇宫有一尊阿贝尔的雕像，这是一个大无畏的青年的形象，他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数．**

1 一元二次方程

解读课标

配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法．因式分解法体现了“降次求解”的基本思想，公式法具有一般性．善于根据方程的特征，灵活选用恰当的解法，是解一元二次方程的关键，选择方法的一般顺序是：先特殊后一般．即先考虑因式分解法、配方后直接开平方，再考虑公式法．

有些与一元二次方程相关的问题，常常不是去解这个方程，而是通过变形降次、整体代入等技巧方法，促使问题的解决．

问题解决

例 1 已知 b^2-4ac 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个实数根，则 ab 的取值范围是________．

（2004 年全国初中数学联赛题）

试一试 由题意得 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac$ 或者 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=b^2-4ac$．

因 $b^2-4ac=(\sqrt{b^2-4ac})^2$，故上述两个等式都可视作关于 $\sqrt{b^2-4ac}$ 的一元二次方程．

视野窗

我想试试(I'll Try)

——英·罗赛蒂

那个说“我想试试”的小孩

他将登上山巅

那个说“我不成”的小孩

在山下停步不前

“我想试试”每天办成很多事

“我不成”就真一事无成

因此你务必说“我想试试”

将“我不成”弃于埃尘．

一部代数史就是研究方程、讨论方程根的历史．

一元二次方程求根公式

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 形式优美，内涵丰富：

公式展开了数学的抽象性、一般性；

公式包含了义务教育阶段所学过的全部 6 种代数运算；

公式回答了解方程时诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题．

例 2 已知 α、β 是方程 $2x^2-3|x|-2=0$ 的两个实数根，则 $\dfrac{\alpha\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ 的值是（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

（2004 年太原市竞赛题）

试一试 分类讨论，脱去绝对值符号，或运用 $x^2=|x|^2$ 性质，解关于 $|x|$ 的一元二次方程.

例 3 解下列关于 x 的方程

(1) $(a-1)x^2-2ax+a=0$；

(2) $x^2-|2x-1|-4=0$.

（重庆市竞赛题）

试一试 对于(1)，因不知晓原方程的类型，故需分 $a-1=0$ 及 $a-1\neq0$ 两种情况讨论；对于(2)，通过讨论，脱去绝对值符号，把绝对值方程转化为一般的一元二次方程来解.

例 4 先请阅读材料：

为解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 视为一个整体，然后设 $x^2-1=y$，则 $(x^2-1)^2=y^2$，原方程化为 $y^2-5y+4=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=4$.

当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$，得 $x=\pm\sqrt{2}$；当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$，得 $x=\pm\sqrt{5}$.

故原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

在解方程的过程中，我们将 x^2-1 用 y 替换，先解出关于 y 的方程，达到了降低方程次数的目的，这种方法叫作“换元法”，体现了转化的数学思想.

请你根据以上的阅读，解下列方程：

(1) $x^4-x^2-6=0$；

(2) $(\frac{1}{2}x-1)^2-(\frac{1}{2}x-1)-1=0$.

试一试 在阅读材料的基础上理解问题，解题的关键是把方程中有关联的部分用一个新字母代替.

例 5 已知 $a>2$，$b>2$，试判断关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 与 $x^2-abx+(a+b)=0$ 有没有公共根，请说明理由.

（2004 年河南省课改实验区中考题）

试一试 由于其中一个方程根的表达形式复杂，所以可设出两方程的公共根 m，建立 a 的等式，通过消去 a 的二次项寻找解题突破口，这是解公共根问题的基本策略.

视野窗

不解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，常见的变形方法有：

① $ax^2+bx=-c$；

② $ax^2=-bx-c$；

③ $ax+\dfrac{c}{x}=-b$.

其中①、②体现了“降次”代换的思想，③则是构造倒数关系作等值代换.

在解答数式、方程等问题时，常面临涉及到的数式结构过于复杂、字母个数较多或次数较高等情况，若把一部分看成一个整体或用一个新字母代替，则能达到化繁为简的目的，这种方法叫换元法.

公共根问题是一元二次方程常见问题，解这类问题的基本方法有：

①若方程便于求出简单形式的根，利用公共根相等求解；

②设出公共根，设而不求，消去二次项.

数学冲浪

知识技能广场

1. 请写出一个根为 $x=1$,另一个根满足 $-1<x<1$ 的一元二次方程________.

(2003 年常州市中考题)

2. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1=1,x_2=2$,则 x^2+bx+c 分解因式的结果为________.

(2004 年大连市实验区中考题)

3. 已知 $x^2-3x-2=0$,那么代数式$\frac{(x-1)^3-x^2+1}{x-1}$的值是________.

4. 下面是李刚同学在一次测验中解答的填空题,其中答对的是(　　).

A. 若 $x^2=4$,则$\underline{x=2}$

B. 方程 $x(2x-1)=2x-1$ 的解为$\underline{x=1}$

C. 若方程$(m-2)x^{|m|}+3mx-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程,则$\underline{m=-2}$

D. 若分式$\frac{x^2-3x+2}{x-1}$的值为零,则$\underline{x=1,2}$

(2004 年山西省中考题)

5. 用换元法解方程:$x^2-3x+\frac{8}{x^2-3x+1}=5$,如果设 $x^2-3x+1=y$,那么原方程可化为(　　).

A. $y^2-6y+8=0$　　B. $y^2-6y-8=0$

C. $y^2+6y+8=0$　　D. $y^2+6y-8=0$

(2004 年桂林市中考题)

6. 当分式$\frac{1}{-x^2+3x+4}$有意义时,x 的取值范围是(　　).

A. $x<-1$　　B. $x>4$　　C. $-1<x<4$　　D. $x\neq-1$ 且 $x\neq4$

7. 解下列方程:

(1)$(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$;

(2)$x^2-|x|-1=0$;

(3)$(x^2-2x)^2+(x^2-2x)-2=0$;

(4)$\frac{x^2-2}{x}+\frac{2x}{x^2-2}=3$.

(2004 年天津市中考题)

8. 设方程 $2002^2x^2-2003\times2001x-1=0$ 的较大根是 r,方程 $2001x^2-2002x+1=0$的较小根是 s,求 $r-s$ 的值.

(2003 年山东省“KLT 快灵通杯”竞赛题)

9. 已知 α 是方程 $x^2-2004x+1=0$ 的一个根，求 $\alpha^2-2003\alpha+\dfrac{2004}{\alpha^2+1}$ 的值.

视野窗

思想方法天地

10. 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，那么 $\alpha^4+3\beta$ 的值为______.

（2003 年天津市竞赛题）

11. 已知 a、b 都是负实数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a-b}=0$，那么 $\dfrac{b}{a}$ 的值是________.

12. 已知 a、b 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，b、c 是方程 $x^2-8x+5m=0$ 的两个根，则 $m=$______.

（2004 年山东省竞赛题）

13. 方程 $(x^2+x-1)^{x+3}=1$ 的所有整数解的个数是（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

14. 设 x_1、x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，那么 $x_1{}^3-4x_2{}^2+19$ 的值等于（　　）.

A. -4　　B. 8　　C. 6　　D. 0

15. 如果 x 和 y 是非零实数，使得 $|x|+y=3$ 和 $|x|y+x^3=0$，那么 $x+y$ 等于（　　）.

A. 3　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$　　D. $4-\sqrt{13}$

（2004 年“TRULY ®信利杯”竞赛题）

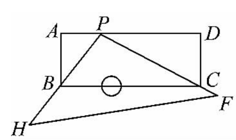
16. 是否存在某个实数 m，使得方程 $x^2+mx+2=0$ 和 $x^2+2x+m=0$ 有且只有一个公共的根？如果存在，求出这个实数 m 及两方程的公共实根；如果不存在，请说明理由.

17. 已知实数 a、b、c、d 互不相等，且 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$，试求 x 的值.

（2003 年全国初中数学联赛题）

应用探究乐园

18. 如图，有一块塑料矩形模料 $ABCD$，长为 10cm，宽为 4cm，将你手中足够大的直角三角板 PHF 的直角顶点 P 落在 AD 边上（不与 A、D 重合），在 AD 上适当移动三角板顶点 P.



（第 18 题）

（1）能否使你的三角板两直角边分别通过点 B 与点 C？若能，请你求出这时 AP 的长；若不能，请说明理由.

（2）再次移动三角板位置，使三角板顶点 P 在 AD 上移动，直角边 PH 始终通过点 B，另一直角边 PF 与 DC 延长线交于点 Q，与 BC 交于点 E，能否使 $CE=$

2cm？若能，请你求出这时 AP 的长；若不能，请你说明理由.

（2004 年重庆市北碚课改实验区中考题）

数海拾贝

一元二次方程求根公式探源

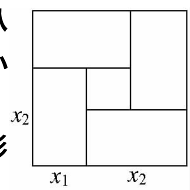
一般形式的一元二次方程能不能用公式表示？很早以前，几大文明古国的数学家都作了有益的探索.

一元二次方程的求根公式是中国最早得出的. 三国时期的赵爽对古代著名的《周髀算经》做注释时，曾写了一篇很有价值的“勾股圆方图”的注文，讨论了方程 $x^2-2cx+b^2=0$ 时，用到了求根公式，与现在的求根公式基本上是一致的.

赵爽说：“其倍弦为广，袤合，令勾股见者自乘为其实，四实以减之，开其余，所得为差，以差减合，半其余为广，减广于弦，即所求也.”意思是：

已知一个长方形的宽（广）x_1 与长（袤）x_2 的和（合）是 $2c$（倍弦），面积（实）是 b^2，求 x_1，x_2 可以按如下步骤进行：

首先将 $2c$ 平方，即作一个边长为 x_1+x_2 的大正方形如图，从大正方形中去掉四个面积为 b^2 的矩形，差 $(2c)^2-4b^2$ 就是图中小正方形的面积：



〔即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_2-x_1)^2$〕，再开平方得出小正方形的边长，也就是差 x_2-x_1，有了差 x_2-x_1，又已知和 $x_1+x_2=2c$，x_1，x_2 就不难求了：和减去差，然后除以 2 得到 x_1，$2c-x_1$ 就是 x_2.

换句话说：方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=2c\\x_1x_2=b^2\end{cases}$ 的解由公式 $x_{1,2}=\dfrac{2c\pm\sqrt{(2c)^2-4b^2}}{2}$ 给出.

上述方程组相当于一元二次方程：$x^2-2cx+b^2=0$.

古巴比伦对天文、历史很有研究. 巴比伦人曾提出了一个代数问题：求出一个数，使它和它的倒数的和等于已知数，用现代的记号，就是求出这样的 x，使得 $x+\dfrac{1}{x}=b$，从这个方程可以得出 $x^2-bx+1=0$，他们求出 $(\dfrac{b}{2})^2$，再求得 $\sqrt{(\dfrac{b}{2})^2-1}$. 然后写出解答：$\dfrac{b}{2}+\sqrt{(\dfrac{b}{2})^2-1}$ 和 $\dfrac{b}{2}-\sqrt{(\dfrac{b}{2})^2-1}$. 不过当时巴比伦人不知道负数，对负数根略而不提.

埃及的纸草文书中曾涉及到最简单的二次方程 $ax^2=b$，阿拉伯人用代数方法解方程，然后用几何图形说明步骤的合理性，显示了代数与几何的统一. 中世纪中亚细亚数学家阿尔·花拉子模写的《代数学》一书，在好几个世纪内被作为代数的基础教科书，其中包括了解二次方程的基本方法，承认二次方程有两根，但他们对于求根公式的应用远远落后于中国.

赵爽的成果比印度数学家婆罗门笈多在公元 7 世纪提出的二次方程求根公式早许多年. 在欧洲，过了一千多年才由法国数学家获得类似的结果.

维纳(1894～1964),美国数学家．他从小是一个神童,8 岁读解析几何,11 岁读大学,18 岁在哈佛大学得到数理逻辑博士学位．1948 年出版的《控制论》是维纳的划时代著作,他在书中介绍了用电子元件或机械元件组成的控制系统,使用统计方法研究信息的传递和加工．维纳是把纯数学和工程技术结合的典范,他认为“数学家不能无视客观世界,必须运用数学而且承担解决应用问题的道义责任．

视野窗

古希腊哲学家柏拉图在他的《理想国》中写道:“数学更高的价值在于培养纯粹的思维能力,启发人们向往理念的端倪,便于将灵魂从变化世界转向真理的存在．”

近年中考竞赛中的二次方程应用题呈现新的特点.从选材上,命题情境来自生活、生产实践,反映时代气息;从呈现方式上,文字叙述、图形、图表、图象相结合;表现为与几何、三角函数等知识的多科应用,甚至体现了与地理、生物、物理、化学等跨学科的综合应用.

2 一元二次方程的应用

解读课标

方程是刻画现实问题的有效模型之一,一元二次方程是方程模型的重要代表,许多问题可转化为解一元二次方程,研究一元二次方程根的性质而获解,一元二次方程的应用现阶段主要有以下两个方面:

1. 求代数式的值;
2. 列二次方程解应用题．

列二次方程解应用题也要经过设、列、解、答等四个步骤,解题的关键是认真审题、分析数量关系,恰当设未知数,将实际问题中内在、本质的联系抽象为数学问题,进而建立方程模型,解决问题．

问题解决

例 1 若 $x^2+xy+y=14$,$y^2+xy+x=28$,则 $x+y$ 的值为________．

(“TI 杯”全国初中数学竞赛题)

试一试 恰当处理两个等式,解关于 $x+y$ 的一元二次方程．

例 2 自然数 n 满足 $(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$,这样的 n 的个数是(　　).

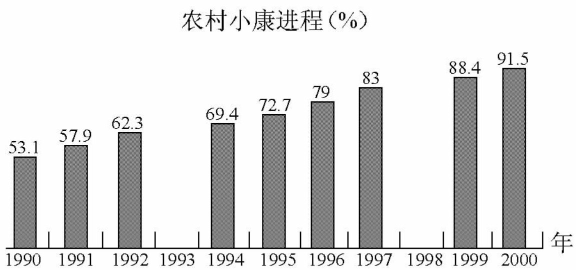
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(江苏省竞赛题)

试一试 运用幂的性质,将问题转化为解方程．

例 3 阅读下列材料：

下图表示我国农村居民的小康生活水平实现程度.



地处西部某贫困县，农村人口约 50 万，2002 年农村小康生活的综合实现程度才达到 68%，即没有达到小康程度的人口约为(1－68%)×50 万＝16 万.

解答下列问题：

(1)假设该县计划在 2002 年的基础上，到 2004 年底，使没有达到小康程度的 16 万农村人口降至 10.24 万，那么平均每年降低的百分率是多少？

(2)如果该计划实现，2004 年底该县农村小康进程接近图中哪一年的水平(假设该县人口 2 年内不变).

试一试 (1)问是一个平均降低率问题，图中告诉了若干数据，这些数据是为(2)问作铺垫的，排除无用数字(条件)的干扰，找出等量关系，这是解本例的关键.

视野窗

增长率＝$\frac{\text{增加数量}}{\text{原来数量(基数)}}\times 100\%$

基数×(1＋平均增长率)^n＝n 次增长后的到达数.

类似，降低率也有上面的关系式.

例 4 某商店经销一种销售成本为每千克 40 元的水产品. 据市场分析，若按每千克 50 元销售，一个月能售出 500 千克；销售单价每涨 1 元，月销售量就减少 10 千克. 针对这种水产品的销售情况，请解答以下问题：

(1)当销售单价定为每千克 55 元时，计算月销售量和月销售利润；

(2)设销售单价为每千克 x 元，月销售利润为 y 元，求 y 与 x 的函数关系式(不必写出 x 的取值范围)；

(3)商店想在月销售成本不超过 10000 元的情况下，使得月销售利润达到 8000 元，销售单价应定为多少？

试一试 从销售利润＝销售量×(每件售价－每件进价)入手.

所求方程的解与实际问题是否相符，这项检验工作十分重要，必须把不符合题意的方程的解舍去.

例 5 如图，用同样规格黑白两色的正方形瓷砖铺设矩形地面，请观察下列图形并解答有关问题：

(1)设铺设地面所用瓷砖的总块数为 y，请写出 y 与 n(n 表示第 n 个图形)的函数关系式；

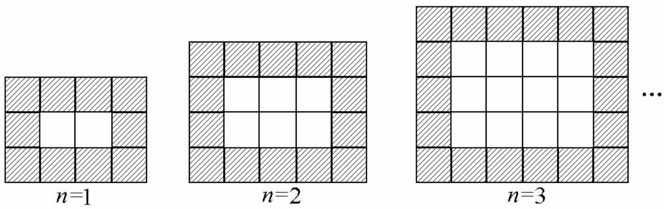
(2)按上述铺设方案，铺一块这样的矩形地面共用了 506 块瓷砖，求此时 n 的值；

(3)若黑瓷砖每块 4 元，白瓷砖每块 3 元，在问题(2)中，共需花多少元钱购买

瓷砖？

(4)是否存在黑瓷砖与白瓷砖块数相等情形？请通过计算说明为什么？

(2003 年吉林省中考题)

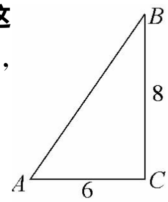


试一试 瓷砖总块数分别为 12，20，30…，白瓷砖总块数分别为 2，6，12…发现这两组数的特点并能用 n 的代数式表示，这是解本例的关键．

视野窗

本例以三角形为背景，考查了勾股定理、面积、解方程等丰富知识，着重考查数形结合、分类讨论的思想，对思维的严谨性、深刻性、发散性都提出了较高的要求．

例 6 一个三角形三边的长为 6，8，10，问是否存在同时平分这个三角形周长和面积的直线？若存在，请找出共有几条？若不存在，请说明理由．

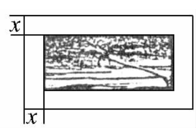


试一试 假设存在符合题意的直线 l，那么 l 过△ABC 某个顶点，或与△ABC 任意两边相交．因此，分类讨论是解本例的切入点．而解题的关键是：通过定量分析回答是否存在这样的直线 l，将线段的计算转化为解方程．

数学冲浪

知识技能广场

1. 小萍要在一幅长 90 厘米、宽 40 厘米的风景画的四周外围，镶上一条宽度相同的金色纸边，制成一幅挂图(如图)，使风景画的面积是整个挂图面积的 54%．设金色纸边的宽为 x 厘米，根据题意所列方程为(　　)．



A. $(90+x)(40+x)\times 54\%=90\times 40$　　B. $(90+2x)(40+2x)\times 54\%=90\times 40$

C. $(90+x)(40+2x)\times 54\%=90\times 40$　　D. $(90+2x)(40+x)\times 54\%=90\times 40$

(2004 年太原市中考题)

2. 某商品经过两次降价，由每件 100 元调至 81 元，则平均每次降价的百分率是(　　)．

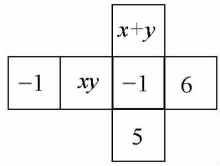
A. 8.5%　　B. 9%　　C. 9.5%　　D. 10%

（2004 年沈阳市中考题）

3. 一个跳水运动员从 10 米高台上跳水，他每一时刻所在的高度（单位：米）与所用时间（单位：秒）的关系式是 $h=-5(t-2)(t+1)$，求运动员起跳到入水所用的时间是（　　）秒．

A. -5　　B. 1　　C. -1　　D. 2

4. 把图折叠成正方体，如果相对应的值相等，则一组 x、y 的值是________．



（2004 年广西玉林市课改实验区中考题）

5. 已知 $x^2+x-3=0$，则 $\dfrac{3-x^2-x^3}{x-1}=$________．

（2003 年淄博市中考题）

6. 满足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$ 的整数 n 有________个．

（2002 年全国初中数学联赛题）

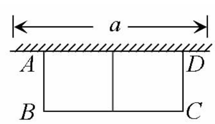
7. 某商场今年 2 月份的营业额为 400 万元，3 月份的营业额比 2 月份增加 10%，5 月份的营业额达到 633.5 万元，求 3 月份到 5 月份营业额的平均月增长率．

（2004 年广东省中考题）

8. 某水果批发商场经销一种高档水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克．经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克涨价 1 元，日销售量将减少 20 千克．现该商场要保证每天盈利 6000 元，同时又要使顾客得到实惠，那么每千克应涨价多少元？

（2004 年海口市课改实验区中考题）

9. 如图，某农户打算建造一个花圃，种植两种不同的花卉供应城镇市场，这时需要用长为 24 米的篱笆，靠着一面墙（墙的最大可用长度 a 是 10 米），围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃．设花圃的宽 AB 为 xm，面积为 Sm^2．



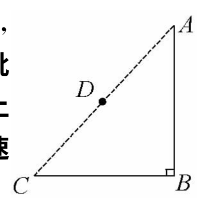
（第 9 题）

(1)求 x 与 S 的函数关系式；

(2)若要围成面积为 45m^2 的花圃，AB 的长是多少米？

(3)花圃的面积能达到 48m^2 吗？如果能，请求出此时 AB 的长；如果不能，请说明理由．

10. 如图，客轮沿折线 $A—B—C$ 从 A 出发经 B 再到 C 匀速航行，货轮从 AC 的中点 D 出发沿某一方向匀速直线航行，将一批物品送达客轮．两船同时起航，并同时到达折线 $A—B—C$ 上的某点 E 处，已知 $AB=BC=200$ 海里，$\angle ABC=90°$，客轮速度是货轮速度的 2 倍．



（第 10 题）

(1)选择：两船相遇之处 E 点（　　）．

A. 在线段 AB 上　　B. 在线段 BC 上

C. 可以在线段 AB 上，也可以在线段 BC 上

(2)求货轮从出发到两船相遇共航行了多少海里？

思想方法天地

11. 若一个等腰梯形能被分为两个等腰三角形，则称其为黄金梯形．黄金梯形四边之比为________.

（2003 年武汉市选拔赛试题）

12. 一个三角形的三边长分别为 a,a,b，另一个三角形的三边长分别为 a,b,b，其中 $a>b$，若两个三角形的最小内角相等，则 $\frac{a}{b}$ 的值等于（　　）.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

（2004 年全国初中数学联赛题）

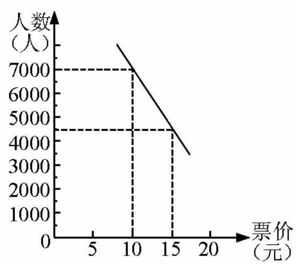
13. 为了保护环境，充分利用水资源，某市经过“调整水费听证会”讨论后决定：水费由过去每立方米 0.8 元调整为 1.1 元，并提出“超额高费措施”，即：每户每月定额用水不超过 12 立方米，超过 12 立方米的部分，另加收每立方米 2 元的高额排污费.

(1)某户居民响应节水号召，计划月平均用水量比过去少 3 立方米，这使得 260 立方米的水比过去多用半年，问这户居民计划月平均用水量是多少立方米？

(2)如果该户居民响应节水号召后，在一年中实际有四个月的月平均用水量超过计划月平均用水量的 40%，其余八个月按计划用水．那么按照新交费法，该户居民一年需要交水费多少元？

（2004 年桂林市中考题）

14. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观，如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，但同时考虑到文物的修缮和保存费用问题，还要保证一定的门票收入．因此，博物馆采取了涨浮门票价格的方法来控制参观人数．在该方法实施过程中发现：每周参观人数与票价之间存在着如图所示的一次函数关系．在这样的情况下，如果确保每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数是多少？门票价值应是多少元？



（第 14 题）

15. 象棋比赛共有奇数个选手参加，每位选手都同其他选手比赛一盘，记分办法是胜一盘得 1 分，和一盘各得 0.5 分，负一盘得 0 分．已知其中两名选手共得 8 分，其他人的平均分为整数．求参加此次比赛的选手共有多少人？

（天津市竞赛题）

应用探究乐园

16. 九年级(8)班尚余班费 m(m 为小于 400 的正整数)元，拟为每位同学买 1 本相

册．某批发兼零售文具店规定：购相册 50 本起可按批发价出售，少于 50 本则按零售价出售，批发价比零售价每本便宜 2 元．班长若为每位同学买 1 本相册，刚好用完 m 元；但若多买几本相册给任课教师，可按批发价结算，也恰好只要 m 元．问该班有多少名同学？每本相册的零售价是多少元？

（第 18 届江苏省竞赛题）

数海拾贝

高次方程有求根公式吗

一元二次方程有求根公式，一般的一元三次方程、一元四次方程等高次方程是否也有类似的求根公式呢？

数学家们也曾提出过类似的问题，在意大利的数学家们之间还发生了一连串有趣的故事．

1535 年，意大利数学家塔尔塔利亚与另一位数学家举行了一场数学比赛，双方各出 30 个三次方程的问题，限 30 日交卷，约定谁解出的题目多谁就获胜，结果塔尔塔利亚取得了胜利．这次胜利促使塔尔塔利亚进一步潜心研究一般三次方程的解法．1541 年，他终于完全解决了三次方程的求解问题．

意大利米兰城有个学者卡尔达诺听说塔尔塔利亚会三次方程的解法，就多次向塔尔塔利亚恳求教给他，并保证严守秘密，不告诉别人．当塔尔塔利亚把这个方法告诉了他之后，卡尔达诺却将其公开发表．因此现在还习惯称三次方程的求解公式为卡尔达诺公式．当然，塔尔塔利亚大为光火，两人为此曾展开公开论战．

一元三次方程一经解出，一元四次方程的解法很快就被卡尔达诺的学生费拉里获得．

此后两百多年的时间里，推求四次以上高次方程的解法的人不可胜数，但都没有结果．久而久之，人们怀疑这个问题难以解决．挪威数学家阿贝尔证明了一般的五次及五次以上的方程都不可能有公式解法．而代数方程可解性问题的完满解决应归功于法国数学奇才伽罗瓦，他的成果被后人称之为伽罗瓦理论．

伽罗瓦从置换进一步引进一个叫做“群”的概念，不仅得到阿贝尔的结果，而且能把高次方程解的具体情况彻底搞清晰，后来的科学发展表明，群的意义远远超出了解代数方程和革新代数学的范围，使得 20 年后的数学及 100 年后的物理学发生了天翻地覆的变化.

A·赛尔伯格,美籍数学家,1917 年 6 月生于挪威.33 岁时获得菲尔兹奖,34 岁时已是著名的普林斯顿高等研究所的教授,鉴于其在数论等领域的杰出贡献,1986 年,赛尔伯格被授予沃尔夫数学奖.在当代数学史上留下了许多以他的名字命名的数学名词,如赛尔伯格不等式、赛尔伯格渐近公式、赛尔伯格筛法等.

视野窗

数学与所有学科有着千丝万缕的联系,一个人可能并不专门从事数学研究,但一个人的数学素质如何,对他的方方面面有着极大的影响,如逻辑思维能力、科学思维能力甚至人生态度等等.

——田刚

3 配方法(课题探究)

阅读思考

把一个式子或一个式子的部分改写成完全平方式或者几个完全平方式的和的形式,这种解题方法叫配方法.

配方法的作用在于揭示式子的非负性,是挖掘隐含条件的有力工具;配方法的实质在于改变式子的原有结构,是变形求解的一种手段.

运用配方法解题的关键在于"配凑","拆"与"添"是配方中常用的技巧.熟悉以下基本等式:

1. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

2. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$;

3. $a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2]$;

4. $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

利用配方法解题须注意:

(1)具有较强的配方意识.即由已知条件的平方特征或隐含的平方关系(如 $m=(\sqrt{m})^2$)能联想起配方法;

(2)兼有整体把握已知条件的能力.即善于把某项拆开又重新与其他项组合,得到完全平方式.

问题解决

例 1 已知实数 a、b、x、y 满足 $ax+by=3$,$ay-bx=5$,则 $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)$ 的值为________.

(2004 年河北省竞赛题)

试一试 把待求式用已知式表示,关键是展开后添项配方.

例 2 已知 $m^2+n^2+mn+m-n+1=0$,则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值等于(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

（2004 年天津市竞赛题）

试一试　已知等式具有 $a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0$ 的特点，自然想到配方．

例 3　若 x、y 是实数，且 $m=x^2-4xy+6y^2-4x-4y$，确定 m 的最小值．

（2003 年北京市竞赛题）

试一试　选择 x 为主元，将条件等式重新整理成关于 x 的二次三项式，从配方的角度求 m 的最小值．

视野窗

含有两个字母的二次三项式，一般选择一个字母为主元，分两步配方求解．

例 3 还可以用一元二次方程的判别式结合配方法求解．读者不妨一试．

例 4　怎样的整数 a、b、c 满足不等式：$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$．

（匈牙利奥林匹克竞赛题）

试一试　一个不等式涉及三个未知量，不妨从配方入手，由不等关系导出相等关系（若 $\begin{cases} a^2\geqslant 0 \\ a^2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $a^2=0$）．

例 5　一幢 33 层的大楼有一部电梯停在第一层，它一次最多能容纳 32 人，而且只能在第 2 层至第 33 层中的某一层停一次，对于每个人来说，他往下走一层楼梯感到 1 分不满意，往上走一层楼梯感到 3 分不满意．现在有 32 个人在第一层，并且他们分别住在第 2 至第 33 层的每一层．问：电梯停在哪一层，可以使得这 32 个人不满意的总分达到最小？最小值是多少？（有些人可以不乘电梯而直接从楼梯上楼）

（全国初中数学联赛试题）

试一试　通过引元，把不满意的总分用相关的字母的代数式表示，解题的关键是对这个代数式进行恰当的配方，进而求出代数式的最小值．

配方法既是代数变形求解的重要手段，又是研究相等关系、讨论不等关系的有力工具，在代数式的化简、求值、解方程、求最值等方面有广泛的应用．

数学冲浪

知识技能广场

1. 已知实数 $x、y、z$ 满足 $x+y=5$ 及 $z^2=xy+y-9$，则 $x+2y+3z=$________.

（"祖冲之杯"邀请赛题）

2. 已知 $a-b=2+\sqrt{3}, b-c=2-\sqrt{3}$，则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=$________.

3. 已知 $x、y、z$ 为实数，且满足 $\begin{cases} x+2y-z=6 \\ x-y+2z=3, \end{cases}$ 则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为______.

4. 若 $a、b$ 为有理数，且 $2a^2-2ab+b^2+4a+4=0$，则 $a^2b+ab^2=$（　　）.

A. -8　　B. -16　　C. 8　　D. 16

（第 15 届"希望杯"邀请赛试题）

5. 设 $a>b>0, a^2+b^2=3ab$，则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

6. 设 $a=2001x+2002, b=2001x+2003, c=2001x+2004$，则多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. $\triangle ABC$ 中，三边 $BC=a, AC=b, AB=c$，且满足 $a^4+b^4+\frac{1}{2}c^4=a^2c^2+b^2c^2$，试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

（2004 年北京市竞赛题）

8. 已知正整数 $a、b、c$ 满足不等式 $a^2+b^2+c^2+42<ab+9b+8c$，求 $a、b、c$ 的值.

（江苏省竞赛题）

9. 已知有理数 $x、y、z$ 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$，求 $(x-yz)^3$ 的值.

思想方法天地

10. 实数 $a、b、c$ 满足 $a^2+6b=-17, b^2+8c=-23, c^2+2a=14$，则 $a+b+c=$____.

（2003 年上海市理科实验班招生试题）

11. 实数 $x、y$ 满足 $x\geqslant y\geqslant 1$ 和 $2x^2-xy-5x+y+4=0$，则 $x+y=$________.

12. 已知实数 $a、b$ 满足 $a^3+b^3+3ab=1$，则 $a+b=$________.

（2004 年全国初中数学联赛题）

13. 整数 $x、y$ 满足不等式 $x^2+y^2+1\leqslant 2x+2y$，则 $x+y$ 的值有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

14. 已知 $a、b$ 是实数，$x=a^2+b^2+20, y=4(2b-a)$，则 $x、y$ 的大小关系是（　　）.

A. $x \leqslant y$　　B. $x \geqslant y$　　C. $x < y$　　D. $x > y$

（2003 年太原市竞赛题）

15. 已知 x、y、z 都是实数，且 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $m=xy+yz+zx$（　　）.

A. 只有最大值　　B. 只有最小值

C. 既有最大值又有最小值　　D. 既无最大值又无最小值

（第 18 届江苏省竞赛题）

16. 若 a 是整数，且 $a^2+2004a$ 是一个正整数的平方，求 a 的最大值.

（2004 年北京市竞赛题）

17. 设 a、b、c 为互不相等的非零实数，求证：三个方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$ 不可能都有两个相等的实数根.

18. 已知 a、b、c 均为实数，且 $a+b=4$，$2c^2-ab=4\sqrt{3}c-10$，求 ab 的值.

应用探究乐园

19. 求实数 x、y 的值，使得 $(y-1)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2$ 达到最小值.

20. 某种产品质量分为 10 个档次，生产最低档次产品，每件获利润 8 元，每提高一个档次，每件产品利润增加 2 元．用同样工时，最低档次产品每天可生产 60 件，提高一个档次将减少 3 件．如果获利润最大的产品是第 K 档次（最低档次为第一档次，档次依次随质量增加），求 K 的值.

（2003 年山东省竞赛题）

数海拾贝

卡普列加数

观察下列等式：

$30+25=55$，$55^2=3025$

你觉得上面的结果奇妙吗？这类数有怎样的特点呢？

人们把具有这种特征的数叫做卡普列加数，即：对 n 位自然数 N，将 N^2 切分为两半，右边 n 位为一个数，左边其余各位为另一个数，如果这两个数之和恰好等于 N，那么称 N 和 N^2 为一对卡普列加数，其中 N 为卡普列加底数，N^2 为卡普列加平方数.

相传，关于这类数还有一个故事：数学家卡普列加坐在行驶在从莫斯科到海参崴的西伯利亚铁路上，因暴雨使得前方发生塌方，为排除险情列车被迫停车，长时间的等待和闷热的天气驱使他走下列车，在百无聊赖的漫步中，他忽然看见一块铁路里程牌，木制的牌子被暴风雨劈裂，上面的里程数“3025”恰好被分开．作为数学家的卡普列加发现这个数的与众不同，一路潜心研究，收获丰厚.

视野窗

想一想：

试求出这样的四位数，它的前两位数字与后两位数字分别组成的二位数之和的平方，恰好等于这个四位数.

（2003 年全国初中数学联赛题）

“数学之美体现在它的实用性上”．诺贝尔经济学奖得主、天才数学家、博弈论创始人纳什如是说．纳什的数学天分在 14 岁开始展现，他在普林斯顿大学读博士时刚刚 20 多岁，他的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他相关文章，确立了他博弈论大师的地位．在 20 世纪 50 年代末，他已是闻名于世的科学家．

4 一元二次方程根的判别式(课题探究)

阅读思考

运用配方法解一元二次方程过程中得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

显然，只有当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，才能直接开平方得：$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

也就是说，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 只有当系数 a、b、c 满足条件 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时才有实数根．这里的 b^2-4ac 叫做一元二次方程根的判别式．

观察(1)式我们不难发现一元二次方程的根有三种情况：

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根．

根的判别式在以下方面有着广泛的应用：

(1)运用判别式，判定方程实根的个数；

(2)利用判别式，建立等式、不等式，求方程中参数值或取值范围；

(3)通过判别式，证明与方程相关的代数问题；

(4)借助判别式，运用一元二次方程必定有解的代数模型，解几何存在性问题、最值问题．

视野窗

在解一元二次方程相关问题时，最好能知道根的特性：如是否有实数根，有几个实数根，根的符号特点等．我们形象地说，判别式是一元二次方程根的“检测器”．

利用判别式解题需注意的是：

(1)解含参数的二次方程，须注意到二次项系数不为 0 的隐含制约；

(2)讨论多个二次方程的根的问题时，常用到整体方法，消元降次等思想方法．

问题解决

例 1 若关于 x 的方程 $x^2+2\sqrt{k}x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是________.

试一试　运用判别式建立关于 k 的不等式组，注意 $\sqrt{k}$ 的隐含制约．

例 2 已知△ABC的三边长为a、b、c，且满足方程$a^2x^2-(c^2-a^2-b^2)x+b^2=0$，则方程根的情况是(　　).

A. 有两个相等实根　　B. 有两个相异实根

C. 无实根　　D. 不能确定

(2003年河北省竞赛题)

试一试 解题的关键是对判别式进行变形，结合三角形三边关系判断其值的正负性.

例 3 已知关于x的方程$x^2-(k+2)x+2k=0$

(1)求证：无论k取任何实数值，方程总有实数根；

(2)若等腰三角形ABC的一边长$a=1$，另两边长b、c恰好是这个方程的两个根，求△ABC的周长.

试一试 对于(1)，只需证明$\Delta\geqslant0$；对于(2)，由于未指明腰与底，须分$b=c$或b、c中有一个与a相等两种情况讨论，利用判别式、根的定义求出b、c的值.

视野窗 利用根的判别式讨论方程根的个数为人们所熟悉，而探讨高次方程或组合多个判别式讨论方程多个根(三个以上)是近年中考竞赛中的创新题型. 解这类讨论，常用到分解、换元、分类讨论等方法.

例 4 (1)关于x的方程$x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$只有一个实数根，求a的取值范围.

(2004年四川省竞赛题)

(2)设方程$|x^2+ax|=4$只有3个不相等的实数根，求a的值和相应的3个根.

(重庆市竞赛题)

试一试 对于(1)，通过分解降次，将高次方程转化为一元二次方程根的情形讨论；对于(2)，去掉绝对值符号，原方程可化为两个一元二次方程，原方程只有3个不相等的实数根，则其中一个判别式大于零，另一个判别式等于零.