

# 数与代数



牛顿(1642~1727),英国数学家、物理学家、天文学家. 牛顿对数学的最大贡献是创立了流数术(微积分),建立了二项式定理及“广义的算术”(代数学). 他的名作《自然哲学数学原理》用数学知识解释了哥白尼学说和天体运动的现象,阐明了运动三定理和万有引力定理,建立了求方程近似根的法则. 后人以其突出的贡献,把他与阿基米德、高斯并称为历史上最伟大的数学家.

## 幂的运算

### 解读课标

数有乘、除、乘方运算,代数式也有相应的运算.

整式的乘除法的各个运算之间存在着内在的联系,是可以相互转化的. 多项式与多项式相乘可以通过转化变成单项式与多项式相乘,再通过转化变成单项式相乘,最后化为同底数幂的乘法进行运算;类似的,多项式除以多项式最后可化为同底数幂的除法进行运算. 因此,幂的运算是整式乘除的基础.

幂的运算性质包括:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;
- $(a^m)^n = a^{mn}$ ;
- $(ab)^n = a^n b^n$ ;
- $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$ ;
- $a^0 = 1 (a \neq 0), a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$ .

其中,  $m, n, p$  都为正整数.

### 问题解决

例1 已知  $x^2 + x = 1$ , 那么  $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 2005 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(第9届“华杯赛”试题)

试一试 就目前无法求出  $x$  的值,恰当地运用条件,把高次项用低次多项式表示,如  $x^2 = 1 - x, x^3 = x \cdot x^2 = x(1 - x) = x - x^2 = x - (1 - x) = 2x - 1$  等.

### 视野

我想试试(I'll try)

——英·罗赛蒂

那个说“我想试试”的小孩,他将登上山巅,

那个说“我不成”的小孩,在山下停步不前.

“我想试试”每天办成很多事,“我不成”就真一事无成.

因此你务必说“我想试试”,将“我不成”弃于埃尘.

学习幂的性质时应注意:

(1) 性质成立的条件;

(2) 性质中字母的意义;

(3) 性质的正向运用、逆向运用、综合运用.

想一想

(1)  $\pm 1$  的乘方有怎样的特点?

(2) 由  $a^b = 1$  能得到怎样的结论?

(3)  $a^n$  的个位数字变化呈现怎样的规律?





例 2 把  $2^{55}, 3^{44}, 5^{33}, 6^{22}$  这 4 个数从小到大排列, 正确的是( ).

- A.  $2^{55} < 3^{44} < 5^{33} < 6^{22}$       B.  $2^{55} < 5^{33} < 6^{22} < 3^{44}$   
 C.  $2^{55} < 6^{22} < 5^{33} < 3^{44}$       D.  $2^{55} < 6^{22} < 3^{44} < 5^{33}$

(2004 年广西竞赛题)

试一试 指数 55, 44, 33, 22 的最大公约数为 11, 把不同指数的幂化成同指数的幂.

例 3 设  $a, b, c, d$  都是正整数, 并且  $a^5 = b^4, c^3 = d^2, c - a = 19$ , 求  $d - b$  的值.

(江苏省竞赛题)

试一试 设  $a^5 = b^4 = m^{20}, c^3 = d^2 = n^6$ , 这样  $a, b$  可用  $m$  的式子表示,  $c, d$  可用  $n$  的式子表示, 通过减少字母的个数降低问题的难度.

例 4 如果整数  $x, y, z$  满足  $(\frac{15}{8})^x \cdot (\frac{16}{9})^y \cdot (\frac{27}{10})^z = 16$ , 求代数式  $\frac{2x+y}{z-y}$  的值.

试一试 由各分数的分子、分母可知, 等式左边可以化成底数为 2, 3, 5 的幂的积的形式, 由  $a^m = a^n$  得  $m = n$ , 建立关于  $x, y, z$  的方程组.

例 5 设  $(3x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

求: (1)  $a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0$  的值;

(2)  $|a_5| + |a_4| + |a_3| + |a_2| + |a_1|$  的值.

试一试 通过展开式去求出每一项系数, 这样做计算繁难. 事实上, 上列等式在  $x$  的允许值范围内取任意值代入计算, 等式都成立. 注意  $\pm 1$  的幂的特征, 用赋值法求解.



与幂相关的计算、化简求值、比较大小, 既要用到幂的性质, 又要常用如下策略:

- (1) 把不同底数的幂化成同底数的幂;
- (2) 把不同指数的幂化为同指数的幂;
- (3) 把已知幂化成特殊底数的幂;
- (4) 作差、放缩比较幂的大小.

在解数学题时, 将问题中的某些元素用适当的数表示, 再进行运算、推理的解题方法叫赋值法. 用赋值法解题有两种基本类型: (1) 常规数学问题, 恰当地对字母取值, 简化解题过程; (2) 非常规数学问题, 通过赋值, 把问题“数学化”.

## 数学冲浪

### 知识技能广场

1. 满足  $(x-1)^{200} > 3^{300}$  的  $x$  的最小正整数为 \_\_\_\_\_.



2. 如果  $x^2+x-1=0$ , 那么  $x^3+2x^2+3=$  \_\_\_\_\_.

(第 14 届“希望杯”邀请赛试题)

3. 探索规律:

$3^1=3$ , 个位数字是 3;  $3^2=9$ , 个位数字是 9;  $3^3=27$ , 个位数字是 7;  $3^4=81$ , 个位数字是 1;  $3^5=243$ , 个位数字是 3;  $3^6=729$ , 个位数字是 9; ...

那么  $3^7$  的个位数字是 \_\_\_\_\_,  $3^{30}$  的个位数字是 \_\_\_\_\_.

(2004 年长沙市中考题)

4. 小明家住房的平面图如图所示, 今拟在客厅和两间卧室铺木地板, 共需木地板 \_\_\_\_\_  $m^2$ .

(2004 年广西竞赛题)



单位 m

5. 生物学指出: 在生态系统中, 每输入一个营养级的能量, 大约只有 10% 的能量能够流动到下一个营养级, 在  $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3 \rightarrow H_4 \rightarrow H_5 \rightarrow H_6$  这条生物链中 ( $H_n$  表示第  $n$  个营养级,  $n=1, 2, \dots, 6$ ), 要使  $H_6$  获得 10 千焦的能量, 需要  $H_1$  提供的能量约为 ( ).

A.  $10^4$  千焦    B.  $10^5$  千焦    C.  $10^6$  千焦    D.  $10^7$  千焦

(2004 年青岛市课改实验区中考题)

6. 已知  $a=81^{31}, b=27^{41}, c=9^{61}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).

A.  $a > b > c$     B.  $a > c > b$     C.  $a < b < c$     D.  $b > c > a$

7. 已知  $2^a=3, 2^b=6, 2^c=12$ , 则  $a, b, c$  的关系是 ( ).

A.  $2b < a + c$     B.  $2b = a + c$     C.  $2b > a + c$     D.  $a + b > c$

(2004 年广西竞赛题)

8. 若  $a, b$  是正数, 且满足  $12345 = (111+a) \cdot (111-b)$ , 则  $a$  与  $b$  之间的大小关系是 ( ).

A.  $a > b$     B.  $a = b$     C.  $a < b$     D. 不能确定

(全国初中数学竞赛题)

9. 阅读材料并回答问题: 我们已经知道, 完全平方公式可以用平面几何图形的面积来表示, 实际上还有一些代数恒等式也可以用这种形式表示, 例如:

$(2a+b) \cdot (a+b) = 2a^2 + 3ab + b^2$  就可以用图 1 或图 2 等图形的面积表示.

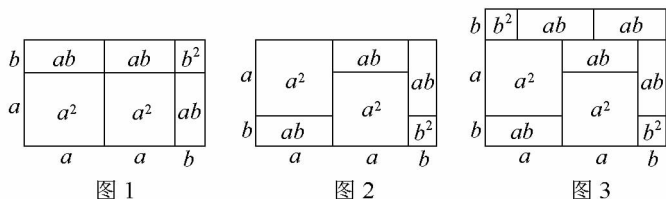


图 1

图 2

图 3

(第 9 题)

(1) 请写出图 3 所表示的代数恒等式: \_\_\_\_\_;

(2) 试画出一个几何图形, 使它的面积能表示:  $(a+b)(a+3b) = a^2 + 4ab + 3b^2$ ;

(3) 请仿照上述方法另写一个含有  $a, b$  的代数恒等式, 并画出与之对应的几何图形.

(2004 年临汾市课改实验区中考题)





10. 设  $a, b, c, d$  都是非零自然数, 且  $a^5 = b^4, c^3 = d^2, a - c = 17$ , 求  $d - b$  的值.

思想方法天地

11. 已知  $|2x - y| + (a - 3b)^2 = 0$ , 那么  $\frac{2a^3x^2 + ab^2y^2 + 3b^3xy}{3a^3x^2 + ab^2y^2 + 2b^3xy} =$  \_\_\_\_\_.

(第 9 届“华杯赛”试题)

12. 若  $(2x - 1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , 则  $a_2 + a_4 =$  \_\_\_\_\_.

(2003 年北京市竞赛题)

13.  $15^{16}$  与  $33^{13}$  的大小关系是  $15^{16}$  \_\_\_\_\_  $33^{13}$  (填“>”、“<”或“=”).

(“希望杯”邀请赛试题)

14. 已知  $25^x = 2000, 80^y = 2000$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  等于( ).

- A. 2 B. 1 C.  $\frac{1}{2}$  D.  $\frac{3}{2}$

15. 满足  $(n^2 - n - 1)^{n+2} = 1$  的整数  $n$  有( )个.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

16. 若  $3x^3 - kx^2 + 4$  被  $3x - 1$  除后余 3, 则  $k$  的值为( ).

- A. 2 B. 4 C. 9 D. 10

(2005 年武汉市“CASIO 杯”选拔赛试题)

17. 是否存在整数  $a, b, c$  满足  $(\frac{9}{8})^a \cdot (\frac{10}{9})^b \cdot (\frac{16}{15})^c = 2$ ? 若存在, 求出  $a, b, c$  的值; 若不存在, 说明理由.

18. 已知  $x, y, z$  为整数,  $xy + yz + zx = 0, a, b, c$  是不等于 1 的正数, 且满足  $a^x = b^y = c^z$ , 求证:  $abc = 1$ .

应用探究乐园

19. 如果一张纸的厚度是 0.1mm, 把这张纸折叠 1 次变成 2 张, 再折叠 1 次变成 4 张. 假如能折叠 100 次, 那么把折叠 100 次后纸的总厚度与银河系的直径(10 万光年)相比较, 哪个更大? (一年以 365 天计)

20. 不用计算器, 求出  $2^{100}$  是多少位数字?

(2004 年广西竞赛题)

数海拾贝

意想不到的结果

现实生活中的许多问题, 其结论常出乎我们的意料, 但当我们深入思考, 通过



合情的推理和计算,我们会发现这些结论又在情理之中,现举出其中两例.

### 1. 环绕赤道的绳圈

用一绳子沿着赤道捆上一圈,然后把绳子加长 15 米,绳子围成一个大圆圈,绳子和地面之间有多大的空隙?设想一下,对于长为 40000 多千米的赤道来说,只是加长了 15 米,不会有多大的空隙.实际上,设赤道半径为  $R$  米,则空隙为  $\frac{2\pi R + 15}{2\pi}$

$-R = \frac{15}{2\pi} \approx 2.39$ (米),这是我们意想不到的.

### 2. 报纸折成的云梯

被称作是“世界屋脊”的珠穆朗玛峰,海拔 8848 米,是世界上第一高峰.把一张报纸连续对折 27 次后,它的高度能超过珠穆朗玛峰吗?一张报纸厚约 0.1 毫米,一张报纸连续对折到 27 次,它的层数按如下规律增加:1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ ,  $\dots$ ,  $2^{27}$ ,  $2^{27}$  层有多厚呢?运用计算器计算为 134217728 层,厚为  $134217728 \times 0.1$  毫米  $\approx 13422$  米,这就是说把一张报纸连续对折 27 次后,比珠穆朗玛峰要高得多,这大大出乎我们的意料.





高斯(1777~1855),德国数学家、天文学家和物理学家,有“数学王子”之称.高斯的成就遍及数学的各个领域,在数论、非欧几何、复变函数论、椭圆函数论等方面均有开创性贡献.他十分注重数学的应用,并且在对天文学、大地测量学和磁学的研究中也偏重于用数学方法进行研究.

## 乘法公式



### 解读课标

多项式的形式是多种多样的,两个有一定关联的特殊多项式相乘,结果常常简洁而优美.

乘法公式是多项式相乘得出的既有特殊性、又有实用性的具体结论,学习乘法公式应注意:

1. 理解公式,掌握公式的结构特征;
2. 了解公式的变形与发展;
3. 灵活运用公式,既能正用、又能逆用,而且还能适当变形或重新组合,综合运用公式;
4. 把握公式的几何意义,领悟数形结合的思想.



### 问题解决

**例 1** (1)如果正整数  $x, y$  满足方程  $x^2 - y^2 = 64$ ,则这样的正整数对  $(x, y)$  的个数是 \_\_\_\_\_.

(2)1, 2, 3, ..., 98 共 98 个自然数中,能够表示成两个整数的平方差的个数是 \_\_\_\_\_.

(全国初中数学联赛题)

**试一试**  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ,  $a+b$  与  $a-b$  的奇偶性相同,这个十分简单的结论是解本例的基础.

视



野窗

我们知道高斯曾巧妙地求出“ $1+2+3+\dots+99+100$ ”的值,他是怎样想到那种方法?高斯利用算式排列的对称性,居中向两侧对称考虑,从而创造了传世佳话.

$$1+2+\dots+50+51+\dots+99+100$$

整式的运算性质,都是通过由特殊到一般,经过抽象概括才发现的,然后再运用到具体的整式运算中去.

乘法公式的变形和灵活运用可以使一些特殊形式的乘法运算变得较为简便.

想一想

你熟悉下面完全平方公式的变形吗?

$$(1) a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab;$$

$$(2) ab =$$

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2) - (a-b)^2}{2};$$

$$(3) a^2 + \frac{1}{a^2} = (a \pm$$

$$\frac{1}{a})^2 \mp 2.$$



例2 已知  $a, b$  满足等式  $x = a^2 + b^2 + 20, y = 4(2b - a)$ , 则  $x, y$  的大小关系是 ( ).

- A.  $x \leq y$     B.  $x \geq y$     C.  $x < y$     D.  $x > y$

(2004年太原市竞赛题)

试一试 作差比较  $x, y$  的大小, 解题的关键是逆用完全平方公式, 揭示式子的非负性.

### 例3 计算

(1)  $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$ ;

(2)  $\frac{20042003^2+1}{20042002^2+20042004^2}$ .

(2004年北京市竞赛题)

试一试 对于(1), 通过对待求式恰当变形, 使之符合平方差公式的结构特征; 对于(2), 用字母表示数, 将数值计算转化为式的计算.

例4 (1) 已知  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$ , 求  $x + y + z$  的值.

(2)  $26 = 5^2 + 1^2, 53 = 7^2 + 2^2, 26 \times 53 = 1378, 1378 = 37^2 + 3^2$

任意挑选另外两个类似 26、53 的数, 使它们能表示成两个平方数的和, 把这两个数相乘, 乘积仍然是两个平方数的和吗? 你能说出其中的道理吗?

试一试 对于(1), 由平方和联想到完全平方公式及其逆用, 利用配方求出  $x, y, z$  的值; 对于(2), 从试验入手, 然后给出一般情形的证明.

例5 三位男子 A、B、C 带着他们的妻子 a、b、c 到超市购物, 至于谁是谁的妻子就不知道了, 只能从下列条件来推测: 他们 6 人, 每人花在购买商品的钱数(单位: 元)正好等于商品数量的平方. 而且每位丈夫都比自己的妻子多花 48 元钱, 又知 A 比 b 多买 9 件商品, B 比 a 多买 7 件商品. 试问, 究竟谁是谁的妻子?

(第1届中学生数学智能通讯赛试题)

试一试 设一对夫妻, 丈夫买了  $x$  件商品, 妻子买了  $y$  件商品, 于是有  $x^2 - y^2 = 48$ , 解不定方程, 求出  $x, y$  的值, 再由其他条件确定三对夫妻的组合.



视野窗

完全平方公式逆用可得到两个应用广泛的结论:

(1)  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \geq 0$ ;

(2)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

(1) 揭示式子的非负性, 可挖掘隐含条件, (2) 应用于解代数式的最值问题.

有人称这样的数为“不变心的数”. 数学中有许多美妙的数, 通过分析, 可发现其中的奥秘.

瑞士数学家欧拉曾对例4(2)的性质作了更进一步的推广. 他指出: 可以表示为 4 个平方数之和的甲、乙两数相乘, 其乘积仍然可以表示为 4 个平方数之和. 即  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ . 这就是著名的欧拉恒等式.

在数学课外活动中, 常常用到以下结论, 它们和基本乘法公式的延伸与发展.

(1)  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ ;

(2)  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$ ;

(3)  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ ;

(4)  $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ .





# 数学冲浪

视野窗



## 知识技能广场

1. 当  $x=6, y=2$ , 代数式  $[(x+y)^2 - (x-y)(x+y)] \div (2y)$  的值为 \_\_\_\_\_.  
 (2004 年贵阳市课改实验区中考题)

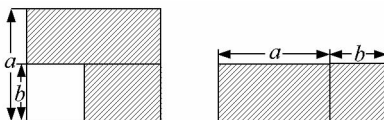
2. 已知  $(x+y)^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ , 则  $(x+y)^{999} =$  \_\_\_\_\_.  
 (2004 年广西竞赛题)

3. 已知  $(2004-a) \cdot (2002-a) = 2003$ , 那么  $(2004-a)^2 + (2002-a)^2 =$  \_\_\_\_.

4. 已知  $a, b, x, y$  满足  $ax+by=3, ay-bx=5$ , 则  $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$  的值为 \_\_\_\_\_.  
 (2004 年河北省竞赛题)

5. 已知两个连续奇数的平方差为 2000, 则这两个连续奇数可以是 \_\_\_\_\_.

6. 如图, 从边长为  $a$  的正方形内去掉一个边长为  $b$  的小正方形, 然后将剩余部分剪拼成一个长方形, 上述操作所能验证的等式是( ).



- A.  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- B.  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- C.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- D.  $a^2 + ab = a(a+b)$

(2004 年扬州市中考题)

7. 已知  $a = \frac{1}{20}x + 20, b = \frac{1}{20}x + 19, c = \frac{1}{20}x + 21$ , 则代数式  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$  的值是( ).

- A. 4    B. 3    C. 2    D. 1

(2004 年河南省课改实验区中考题)

8. 已知  $x+y=1, x^2+y^2=2$ , 那么  $x^4+y^4$  的值是( ).

- A. 4    B. 3    C.  $\frac{7}{2}$     D.  $\frac{5}{2}$

(2004 年“CASIO 杯”河南省竞赛题)

9. 若  $a, b$  为有理数, 且  $2a^2 - 2ab + b^2 + 4a + 4 = 0$ , 则  $a^2b + ab^2 =$  ( ).

- A. -8    B. -16    C. 8    D. 16

(第 15 届“希望杯”邀请赛试题)

10. 如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差, 那么这个正整数称为“智慧数”. 根据你的理解, 下列 4 个数中不是“智慧数”的是( ).

- A. 2002    B. 2003    C. 2004    D. 2005

(第 1 届中学生数学智能通讯赛试题)

11. 计算:



(1)  $6(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)+1$ ;

(2)  $\frac{24690}{12346^2 - 12345 \times 12347}$ ;

(3)  $\frac{20052004^2}{20052003^2 + 20052005^2 - 2}$ .

12. 一个自然数减去 45 后是一个完全平方数, 这个自然数加上 44 后仍是一个完全平方数, 试求这个自然数.

### 思想方法天地

13. 若  $S=1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+99^2-100^2+101^2$ , 则  $S$  被 103 除得的余数是     .

14. 已知  $a-b=4, ab+c^2+4=0$ , 则  $a+b=$      .

15. 已知  $a, b, c$  满足  $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=0.1$ , 则  $a^4+b^4+c^4$  的值是     .

(2004 年“宇振杯”上海市竞赛题)

16. 如果  $a+2b+3c=12$ , 且  $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ , 则  $a+b^2+c^3$  的值是( ).

A. 12      B. 14      C. 16      D. 18

(2004 年北京市竞赛题)

17. 如果  $x+y=1, x^2+y^2=3$ , 那么  $x^3+y^3$  的值为( ).

A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

(2005 年武汉市“CASIO 杯”选拔赛试题)

18. 整数  $x, y$  满足不等式  $x^2+y^2+1 \leq 2x+2y$ , 则  $x+y$  的值有( ).

A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

(第 14 届“希望杯”邀请赛试题)

19. 已知  $a$  满足等式  $a^2-a-1=0$ , 求代数式  $a^8+7a^{-4}$  的值.

(2003 年河北省竞赛题)

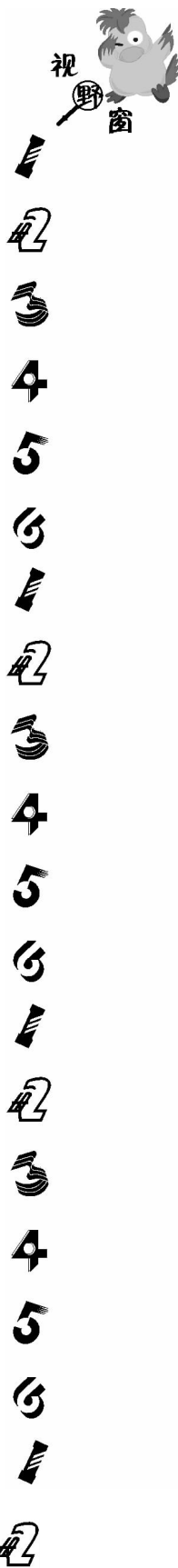
20. 有 10 位乒乓球选手进行单循环赛(每两人间均赛一场), 用  $x_1, y_1$  顺次表示第一号选手胜与负的场数; 用  $x_2, y_2$  顺次表示第二号选手胜与负的场数,  $\dots$ , 用  $x_{10}, y_{10}$  顺次表示第十号选手胜与负的场数. 求证:  $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\dots+y_{10}^2$ .

(天津市竞赛题)

### 应用探究乐园

21. 同一价格的一种商品在三个商场都进行了两次价格调整. 甲商场: 第一次提价的百分率为  $a$ , 第二次提价的百分率为  $b$ ; 乙商场: 两次提价的百分率都是  $\frac{a+b}{2}$  ( $a>0, b>0$ ); 丙商场: 第一次提价的百分率为  $b$ , 第二次提价的百分率为  $a$ , 则哪个商场提价最多? 说明理由.

(2003 年河北省竞赛题)





22. 一个正整数若能表示成两个正整数的平方差,则称这个正整数为“智慧数”,例如  $16=5^2-3^2$ ,则 16 就是一个“智慧数”,问:

- (1) 98 是不是“智慧数”? 说明理由;
- (2) 从 1 至 2000 这 2000 个正整数中,共有多少个“智慧数”?

视野窗



## 数海拾贝

### 拼图游戏与代数恒等式

我们喜欢拼图游戏,如俄罗斯方块、七巧板等,它们不仅展现给我们丰富多彩的图案,还教给我们许多数学知识.

几何图形的面积与代数恒等式之间存在着对应关系,据此,可以给一些熟知的代数公式或代数恒等式作出合理的几何解释,此外,从一些几何图形中还能“读出”与之对应的代数式.

如图 1,是  $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$  的几何解释;

如图 2,是  $(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$  的几何解释;

如图 3,是  $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+b^3$  的几何解释;

如图 4,  $4 \times 4$  的正方形网格中,正方形的个数为  $1^2+2^2+3^2+4^2$ .

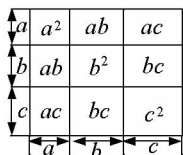


图 1

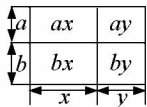


图 2

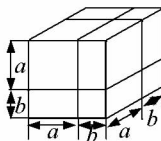


图 3



图 4

准备一些正方形、长方形纸片,用所拼成的图形面积给出下列式子的几何解释:

- (1)  $1+2+3+4+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ;
- (2)  $(a+b+c+d)^2=?$ ;
- (3)  $(a+b+c)^3=?$ ;
- (4)  $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ .





C. 雅可比,生于 1804 年 12 月 10 日,凭着对数学的极大兴趣和满腔热情,雅可比在年轻时就取得了令人瞩目的成就.雅可比是把椭圆函数理论应用于数论的第一人,并且用这种方法证明了费马的著名断言:每一个正整数  $1, 2, 3, \dots$  都是 4 个整数  $1, 2, 3, \dots$  的平方和.此外,在代数、动力学、牛顿—拉普拉斯—拉格朗日的引力理论中都有许多伟大的贡献.

视野窗



### ③ 因式分解

#### 解读课标

因式分解是整式乘法的逆向运用,它不仅体现了一种“化归”的思想,而且也是学习后续内容(如分式的化简、解方程)等普遍使用的恒等变形的基础,为数学交流提供有效途径.

提公因式、公式法是因式分解的基本方法.有公因式先提公因式、分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止,这是因式分解的基本原则.

一些复杂的因式分解问题,常用到以下知识方法:

1. 若  $q=ab$  且  $p=a+b$ ,则形如  $x^2+px+q$  的多项式可分解为  $(x+a)(x+b)$ ;
2. 当多项式项数较多(4 项或 4 项以上)时,通过恰当分组分解;
3. 对结构较复杂的多项式,利用换元法分解.

因式分解与因式分解类似,它与整式乘法的过程恰好相反,我们可以用整式的乘法得到因式分解的方法,也可以用整式乘法来检验因式分解的正确性.

#### 问题解决

例 1 分解因式  $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3=$  \_\_\_\_\_.

(第 14 届“五羊杯”竞赛题)

试一试 从公式  $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$  入手,若能发现前两项与后一项的联系,则能获得简解.

例 2 要使二次三项式  $x^2-5x+p$  在整数范围内能进行因式分解,那么整数  $p$  的取值可以有( ).

- A. 2 个    B. 4 个    C. 6 个    D. 无数多个

想一想

若二次三项式  $x^2+px-5$  在整数范围内能进行因式分解,则整数  $p$  的取值可以有几个?你能说出它与例 2 的本质区别吗?





(2004年杭州市中考题)

试一试 原式在整数范围内能进行因式分解,  $p$  与  $-5$  存在一定的关联.



例3 把下列各式分解因式

- (1)  $(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x + 3) - 12$ ;
- (2)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) + x^2$ ;
- (3)  $(x + y)(x + y + 2xy) + (xy + 1)(xy - 1)$ .

(第16届“希望杯”邀请赛试题)

试一试 对于(1), 视  $x^2 + 5x$  为整体, 或用一个新字母代替; (2) 是形如  $abcd + e$  型的多项式, 恰当把四个因式两两分组相乘, 使得分组相乘后所得的有相同的部分; (3) 式中  $x + y, xy$  多次出现, 引入两个新字母, 突出式子特点.

例4 阅读理解

观察下列因式分解的过程:

- (1)  $x^2 - xy + 4x - 4y$   
原式  $= (x^2 - xy) + (4x - 4y) = x(x - y) + 4(x - y) = (x - y)(x + 4)$
- (2)  $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$   
原式  $= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$

第(1)题分组后能直接提公因式, 第(2)题分组后能直接运用公式. 仿照上述分解因式的方法, 把下列各式分解因式:

- (1)  $a^2 - ab + ac - bc$ ; (2004年西宁市中考题)
- (2)  $x^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz$ . (2004年临沂市课改实验区中考题)

试一试 通过分组, 使每一组分解因式后, 整体能再分解, 恰当分组是关键, 经历“试验—失败—再试验—再失败—直至成功”的过程.

例5 把下列各式分解因式

- (1)  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ;
- (2)  $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ .

(2004年“CASIO杯”河南省竞赛题)

试一试 直接用分解因式的基本方法无法解本例, 解决本例的突破口是把多项式中的某一项拆成两项或多项, 使得便于分组进行分解因式. 如(1)可按以下方式进行: 原式  $= (x^3 + x^2) + (5x^2 + 5x) + (6x + 6)$ ; 或原式  $= (x^3 + 2x^2) + (4x^2 + 8x) + (3x + 6)$ ; 或原式  $= (x^3 + 3x^2) + (3x^2 + 9x) + (2x + 6)$ .



对结构较复杂的多项式, 若把其中某些部分看成一个整体, 用新字母代替(即换元), 则能使复杂的问题简单化、明朗化.

从换元的形式看, 有常值代换、式的代换; 从引元的个数看, 有一元代换、二元代换等.

分组是解较复杂因式分解问题的基本手段, 体现了化整体为局部、又统揽全局的思想. 恰当分组是解题的关键, 基本策略是:

- (1) 按系数分组;
- (2) 按次数分组;
- (3) 按字母分组.

当直接分解因式难以进行时, 可适当拆项(把代数式中的某项拆成两项的和或差)或添项(把代数式添上符号相反的项), 达到分组、提公因式的目的. 拆项与添项是一种技巧性较强的工作, 只有认真观察多项式的结构特征和数量关系, 才能正确地进行拆、添项, 促使问题的解决.

# 数学冲浪



## 知识技能广场

1. 分解因式： $a^2b - b^3 =$  \_\_\_\_\_ .  
(2004年无锡市课改实验区中考题)

2. 分解因式： $a^3 + 2a^2 + a =$  \_\_\_\_\_ .  
(2004年桂林市中考题)

3. 分解因式： $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 =$  \_\_\_\_\_ .

4. 分解因式： $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 =$  \_\_\_\_\_ .

5. 多项式  $ac - bc + a^2 - b^2$  分解因式的结果是( ).

- A.  $(a-b)(a+b+c)$       B.  $(a-b)(a+b-c)$   
C.  $(a+b)(a+b-c)$       D.  $(a+b)(a-b+c)$

(2004年北京市海淀区中考题)

6. 将多项式  $x^4 + 2x^2 - 3$  分解因式的结果是( ).

- A.  $(x^2+3)(x^2-1)$       B.  $(x^2+1)(x^2-3)$   
C.  $(x^2+3)(x+1)(x-1)$       D.  $(x^2+1)(x+3)(x-3)$

7. 把多项式  $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$  因式分解之后,正确的结果是( ).

- A.  $(x+y+3)(x-y-1)$       B.  $(x+y-1)(x-y+3)$   
C.  $(x+y-3)(x-y+1)$       D.  $(x+y+1)(x-y-3)$

(“希望杯”邀请赛试题)

8. 已知  $x^2 + ax - 12$  能分解成两个整系数的一次因式的乘积,则符合条件的整数  $a$  的个数是( ).

- A. 3个      B. 4个      C. 6个      D. 8个

9. 分解因式

(1)  $4a^2 - b^2 + 6a - 3b$ ;

(2)  $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$ ;

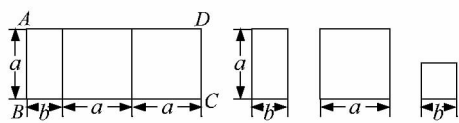
(3)  $(a+c)(a-c) + b(b-2a)$ ;

(4)  $(x^2+x+1)(x^2+x+2) - 12$ ;

(5)  $(2x^2-3x+1)^2 - 22x^2 + 33x - 1$ ;

(6)  $(x^2-1)(x+3)(x+5) + 12$

10. 如图,由1个长、宽分别是  $a$ 、 $b$  的矩形,2个边长都为  $a$  的正方形拼接成矩形  $ABCD$ .



(第10题)

视

野

窗





- (1) 根据图中所提供的数据, 请你写出其中任意三个因式分解的等式.  
 (2) 设有上述长、宽分别是  $a, b$  的矩形 3 个, 边长为  $a$  的正方形 1 个, 边长为  $b$  的正方形 2 个, 能否把它们拼成一个矩形, 写出你的拼图想法.

视野窗



思想方法天地

11. 分解因式:  $ab(a+b)^2 - (a+b)^2 + 1 =$  \_\_\_\_\_.  
 (第 16 届“希望杯”邀请赛试题)
12. 分解因式:  $(x-2)^3 - (y-2)^3 - (x-y)^3 =$  \_\_\_\_\_.  
 (“五羊杯”竞赛题)
13. 分解因式:  $9x^2 - 6x - y^2 + 4y - 3 =$  \_\_\_\_\_.  
 (2004 年河南省竞赛题)
14. 在 1~100 之间, 若存在整数  $n$ , 使  $x^2 + x - n$  能分解为两个整系数一次式的乘积, 则这样的  $n$  有 \_\_\_\_\_ 个.
15.  $a^4 + 4$  分解因式的结果是( ).  
 A.  $(a^2 + 2a - 2)(a^2 - 2a + 2)$       B.  $(a^2 + 2a - 2)(a^2 - 2a - 2)$   
 C.  $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a - 2)$       D.  $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$   
 (北京市竞赛题)
16. 将  $x^5 + x^4 + 1$  因式分解得( ).  
 A.  $(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$       B.  $(x^2 - x + 1)(x^3 + x + 1)$   
 C.  $(x^2 - x + 1)(x^3 - x + 1)$       D.  $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$
17.  $2x^3 + x^2 - 13x + 6$  的因式是( ).  
 A.  $2x - 1$       B.  $x + 2$       C.  $x - 3$       D.  $x^2 + 1$       E.  $2x + 1$   
 (美国犹他州竞赛题)
18. 已知  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三边长, 且满足  $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a+c) = 0$ , 则此三角形是( ).  
 A. 等腰三角形      B. 等边三角形      C. 直角三角形      D. 不能确定
19. 分解因式  
 (1)  $4x^2 - 4x - y^2 + 4y - 3$  (重庆市竞赛题)  
 (2)  $(x+y-2xy)(x+y-2) + (xy-1)^2$  (“希望杯”邀请赛试题)  
 (3)  $4x^3 - 31x + 15$  (2004 年重庆市竞赛题)  
 (4)  $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$  (河南省竞赛题)  
 (5)  $(x^4 - 4x^2 + 1)(x^4 + 3x^2 + 1) + 10x^4$  (第 13 届“五羊杯”竞赛题)



应用探究乐园

20. 对任何整数  $x$  和  $y$ , 代数式  $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$  的值能否等于 33? 若能, 请写出计算过程; 若不能, 请说明理由.

(莫斯科市奥林匹克试题)



21. 已知在 $\triangle ABC$ 中,三边长 $a, b, c$ 满足等式 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc = 0$ . 求证:  
 $a + c = 2b$ .

(天津市竞赛题)

视野窗



## 数海拾贝

### 从分马“术”得到的启示

古阿拉伯民间流传着一个非常有趣的故事,一直流传至今:

从前有个牧民,辛苦一辈子所得的全部财产是 17 匹马. 临终前,他把三个儿子叫到身边留下遗嘱:“孩子们啊!我把 17 匹马留给你们,老大得 $\frac{1}{2}$ ,老二得 $\frac{1}{3}$ ,老三得 $\frac{1}{9}$ ,把马分完,但不许把马宰了再分.”事后,三兄弟在一起商量了很久,始终无法按老人的意图把马分开. 他们只好去请教爱动脑筋的邻居老大爷,老大爷认真思索之后说:“我借一匹马给你们,共有 18 匹马,这样就好分了. 老大得 $\frac{1}{2}$ 是 9 匹马,老二得 $\frac{1}{3}$ 是 6 匹马,老三得 $\frac{1}{9}$ 是 2 匹马,你们总共分得 17 匹马,剩下的 1 匹马再还给我.”巧妙的“借一还一”!既符合老人的遗嘱,又让三兄弟都满意.

这种“借一还一”的思想能给我们什么启示呢?注意当把 $x^4 + 4$ 改写成 $x^4 + 0 + 4$ ,再把 0 拆成 $4x^2$ 和 $-4x^2$ 两项时,有

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + \underline{4x^2 + 4} - 4x^2 && \text{(添一项 0)} \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 && \text{(用公式)} \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2). && \text{(用公式)} \end{aligned}$$

这正好是借一 $(4x^2)$ ,还一 $(-4x^2)$ !即把 0 拆成字母及其指数完全相同、系数互为相反数的两项. 这种“借一还一”的思想,启示我们找到了分解因式的新方法——拆项、添项分解法,这是数学解题的重要技巧.

“借一还一”、“借式还式”,数学宝山中有很多“借术”值得我们去探索、去研究. 从而可以培养数学思维,打开解题思路. 请你试一试:

分解因式:

1.  $a^4 + 64b^4$ ;

2.  $x^4 - 7x^2 + 1$ ;

3.  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ ;

4.  $a^4 + b^4 + (a+b)^4$ .

(河南省竞赛题)

(北京市竞赛题)





伯恩哈德·黎曼(1826~1866),德国著名数学家.黎曼研究数学创立的以他名字命名的几何学,是爱因斯坦广义相对论的数学基础,没有黎曼几何学之助,广义相对论的理论大厦便无从构建.“黎曼猜想”在很多数学家眼里,是比哥德巴赫猜想更有价值的数学猜想.20世纪数学大师希尔伯特说过:“如果我在一千年以后复活,第一个问题就是,黎曼猜想解决了没有.”



著名数学教育家玻利亚曾说:“对一个数学问题,改变它的形式,换一种叙述方式,变换它的结构,直到发现有价值的东西,这是解题的一个重要原则.”

## 4 因式分解的应用



### 解读课标

因式分解是代数变形的有力工具,其应用主要体现在以下几个方面:

1. 简化复杂的数值计算;
2. 把繁杂的式子化简,使运算更加简便;
3. 解不定方程;
4. 证明代数相关问题等.

有些多项式因式分解后的结果在解决问题过程中常常用到,我们应熟悉这些结果:

1.  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ ;
2.  $mn \pm m \pm n + 1 = (m \pm 1)(n \pm 1)$ ;
3.  $a^4 + 4 = (a^2 + 2a - 2)(a^2 - 2a + 2)$ ;
4.  $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2$ ;
5.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ .



### 问题解决

例1 方程  $xy - 2x - 2y + 7 = 0$  的整数解( $x \leq y$ )为\_\_\_\_\_.

(第18届江苏省竞赛题)

试一试 把一个未知数用另一个未知数的代数式表示,或利用  $ab - ma - mb + m^2$  因式分解后的结果.

在一定条件下,把一个代数式变换成另一个与之恒等的代数式称为代数式的恒等变形,它是研究代数式、方程和函数的重要工具,而换元法、配方法、因式分解则是恒等变形的有力工具.

解不定方程的基本方法有:

- (1) 分离整系数;
- (2) 枚举;
- (3) 配方;
- (4) 因式分解等.



例2 若  $x$  满足  $x^5 + x^4 + x = -1$ , 则  $x^{1998} + x^{1999} + \dots + x^{2004}$  的值是( )

- A. 2      B. 1      C. 3      D. 5

(2004 年广西竞赛题)

试一试 求出  $x$  值或把待求代用已知式表示, 解题的关键是对已知式或待求式因式分解.

例3 计算

$$(1) \frac{2003^2 - 4004 \times 2003 + 2002 \times 4008 - 2003 \times 2004}{2003^2 - 3005 \times 2003 - 2003 \times 2005 + 2005 \times 3005};$$

(第15届“希望杯”邀请赛试题)

$$(2) \frac{(7^4 + 64)(15^4 + 64)(23^4 + 64)(31^4 + 64)(39^4 + 64)}{(3^4 + 64)(11^4 + 64)(19^4 + 64)(27^4 + 64)(35^4 + 64)}.$$

(第九届“华杯赛”试题)

试一试 对于(1), 观察分子、分母数字间的特点, 把恰当数用一个字母表示, 将复杂的数值计算转化为式的运算; 对于(2), 运用  $a^4 + 64 = (a^4 + 16a^2 + 64) - 16a^2 = (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8)$  的结果.

例4 已知  $n$  是正整数, 且  $n^4 - 16n^2 + 100$  是质数, 求  $n$  的值.

试一试 依据质数定义, 质数只能分解成 1 和本身的乘积. 故解本例的最自然的思路是: 对原式进行恰当的分解变形.

例5 按下面规则扩充新数:

已有两数  $a, b$ , 可按规则  $c = ab + a + b$  扩充一个新数, 在  $a, b, c$  三个数中任取两数, 按规则又可扩充一个新数, ……每扩充一个新数叫做一次操作.

现有数 1 和 4.

- (1) 求按上述规则操作三次得到扩充的最大新数;
- (2) 能否通过上述规则扩充得到新数 1999, 并说明理由.

(重庆市竞赛题)

试一试 从  $c + 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$  入手, 揭示按规则扩充所得新数的特征, 这是解本例的突破口.

视野窗

字母示数, 可以把复杂的数值计算转化为式的运算, 通过分解相约简化计算, 而解题的关键是能发现数字间的关联.

质数、合数的概念有不同的描述方式, 既可以从整除的角度定义, 又可以用分解的方式定义.

信息已成为人类生活中最重要的因素, 在军事、政治、商业、生活等领域中, 信息的保密工作显得非常重要, 现代保密技术中的许多编码方法就来自于因数分解、因式分解的应用.