新理念·新问题·新思维

有谁不想揭开新课程的帷幕,感受新课程的理念?有谁不想知道新课程从学习内容到学习方式、考试命题将追求怎样的目标?在广阔而丰富的文化领域,怎样提高素养,提升学习品位?

随着课程改革的逐步展开,新课程理念极大地冲击与改变了我们的固有观念与传统,需要我们运用新的思维方法去探索:重新审视传统考试的得与失,重新思考当前教学的进与退,重新评价考试命题的新与旧。

当课程改革从初期实验走向深入发展阶段,广大师生关注的一个问题是:与历经数年的原中考竞赛相比,新课程中考竞赛“新”在何处?试题类型、考查重点有何变化?增加的新内容考什么?如何考?与保留的原课程的传统内容有何联系?新中考竞赛怎样由传统的计算证明向操作探究应用转移?怎样降低逻辑思维的要求,增加创新意识的考查?

湖北省武汉市武昌区是国家级课改实验区之一,笔者历经了三年的课程改革试验。在试验中,当固有的传统观念与新课程理念碰撞时,有过迷茫与痛苦,但更多的是喜悦与激动,所有这一切积淀为“探究应用新思维”丛书。

在编著本丛书过程中,力求突出以下几点:

科学准确定位

本丛书以“注重探究,强化应用”为宗旨,首先满足广大学生提高学科能力、提升学科素养、培养探究能力、培育应用意识、升入重点中学的愿望;其次考虑学生在学科竞赛中表现才能的需要,既不因为照顾所有学生而降低标准,也不因为适应个别学生的特殊兴趣而偏离标准。与教材同步,与学生的发展同步,在课程标准的基础上概括、深化和拓展,力求在夯实基础的前提下循序渐进,发展学科才能。

精心组织问题

本丛书以近年中考试题、竞赛试题为候选题,特别关注课程改革试验区的中考试题,以导向性、新颖性为原则,注重问题的情境性、益智性、探索性、开放性与应用性,从一个侧面反映新课程中考竞赛问题在内容、立意、设问等方面的特点,折射着考试命题的新趋势。旨在以典型问题为载体,着意为学生掌握思想方法、学会思维、领悟文化创造良好的情境。

营造文化氛围

本丛书介绍了古今中外著名数学家、物理学家、化学家的生平与成就,通过“视野窗”、“数海拾贝”、“物理沙龙”等板块,勾画了学科发展的历史进程,揭示了不同学科的联系,凸

现了学科应用的广泛性,介绍了引人入胜的名题,力求营造文化氛围,潜移默化地培养学生的学习兴趣,改变学科观念,为学生持续发展打下坚实基础。

愿本丛书能给你一个新的思维方法,帮助你进行理性思考,丰富你观察世界的方式,点燃你胸中的求知欲望。

黄东坡

2005 年 6 月于湖北省水果湖第二中学

前言

《物理探究应用新思维》与《物理培优竞赛新方法》是两套姊妹书。编写这两套书的目的是为了解决素质教育与课程改革所面对的一个主要问题:怎样使学生学会学习。

会学习的核心是会思维,因此培养学生会学习必须重视培养学生会思维,也即教给学生思维的方法。这两套书从思维与方法入手做了一些尝试,以期对学生有所收益。

《物理探究应用新思维》的编写以《物理课程标准》为指导,以人教版九年义务教育物理实验教材为依据,以2004年全国各地中考题为载体,以培养学生思维品质、思维能力为目的,将整个初中物理按教材的编排次序构建为46个专题。每个专题由8个部分组成。

物理学家:紧扣专题,介绍相关的物理学家,使学生以物理学家为榜样,积极向上。体现物理课改关注人文精神培养的新理念。

课标解读:以课标为依据,以相关物理知识为载体,使学生明确该专题的三维目标要求,帮助学生构建该专题的知识网络,体现物理课程的基础要求。

视野窗:以物理学史、生活生产、前沿科技为背景对本专题涉及的相关知识进行拓展,帮助学生扩大视野,体现从生活走向物理,从物理走向社会的现代教育思想。

思维方法:对物理学习中常用的控制变量法、归纳法、演绎法、图象法、类比法、实验法等思维方法进行说明、剖析举例,使学生学会思维从而使学生学会学习,体现现代教育以知识为本向以人为本的理念转变。

思维点拨:以中考考点、热点为例对题中隐含的思维方法进行半透明的点拨,引导学生体会思维方法、应用思维方法。

思维训练:以最新的中考题为载体,按基础知识广场、思想方法天地、应用探究乐园三个栏目对相应专题的基础、能力、拓展三个层次进行训练,使学生理解专题的知识,掌握思维方法。

物理沙龙:是作者与学生交流的园地,我们在其中谈学习体会、谈教学心得、谈解题技巧、谈物理发展、谈物理应用……

参考答案:对思维点拨、思维训练给予详解,便于学生自我评价。

本书能满足学生的同步培优,能激发学生学习物理的兴趣,能培养学生的思维方法。由于作者水平有限,时间仓促,欢迎广大读者及社会各界朋友不吝赐教,以期再版时有所增益。

邹家武

2005年6月

序

数学竞赛本来是数学教育内部的事,现在却成了社会热点。组织者、培训者、参与者、追随者、评论者之众,是从来没有过的。家长苦企盼,学生竞奔波,校方恋声誉,教师须奋争,官员叹无奈,名士说担忧。面对这样一副众生相,数学竞赛的功过该如何评说?

不用怀疑,数学竞赛可以激发学生对数学的兴趣,培养学生的心智,在发展和完善人的过程中,有着非常重要的作用。数学竞赛给学有余力的学生搭建了充分发展的平台,也给普通学生在更为广阔的领域欣赏数学提供了机会。M.克莱因说过:“数学是人类最高超的智力成就,也是人类心灵最独特的创作。音乐能激发和抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科学可改善物质生活,但数学能给予以上一切。”你想获得克莱因所说的这一切吗?那么,你可以参加数学竞赛。

但是,这里有一个前提,你必须遵循数学学习的心理规律,必须顺应课程改革的基本趋势,必须选择反映数学本质的学习资源。否则,会适得其反。请听数学家们那黄钟大吕般的警示:奥林匹克数学竞赛的不正确导向,有可能扼杀我们的天才(丘成桐语)。可见,数学竞赛的正确导向是多么重要。

遗憾的是,在如此繁荣的竞赛盛世,人们都在忙着立名目,兴产业,办家教,争市场,却少有顾及它的正确导向。在数学竞赛中,我们应该给学生什么?什么东西才是真正有价值的?用什么方式才能提高学生的想象力和创造力,而不是相反?这些问题,摆在我们面前,考验着每一个主办者、培训者甚至教师的良心和智慧。

正是在这样的背景下,《数学探究应用新思维》一书问世。

这部书,是《数学培优竞赛新帮手》、《数学培优竞赛新方法》等两部书的继续和发展,其中不仅包括了多年来提升数学素养的成功经验,还包括了近年来国家级课程改革试验区实践现代理念的丰硕成果。

本书与学习进程同步、与学生发展协调的设计思想,内容确定与安排则由以“教学大纲”为依据转变为以“课程标准”为依据,每讲从“解读课标”开始,强化了课程目标的导向作用,突出了探究应用的新课程理念。

本书以旁批点评与计白当黑的例题呈现方式,通过“试一试”引领学生解决问题的过程,“视野窗”能使学生在自主探究的活动中寻求解题规律、题型趋势与问题背景诸方面的支持。

本书以典型问题为范例,用广博资源构筑“知识技能、思想方法、应用探究”训练阶梯的基本模式,并根据应用探究的情景设置了必要的知识链接,为学生经历数学活动的过程、获得数学活动的经验创造了条件。

本书关注人文精神的培养,课前有人物聚焦,课后设数海拾贝,恰如其分地展示了数学的文化价值、理性精神和深刻背景。

选择,是我们这个时代赋予每位学子的关键词。不论是求学、求师,还是求书,我们都面临着太多的选择,你想绕过它都不可能,选择实在是太重要了。

作者在《新帮手》、《新方法》的基础上,不断探索,与时俱进,追求卓越,止于至善,才有了现在的《新思维》。同学们从文山书海中选择了它,是不会失望的。

提升智慧的数学竞赛及其培训,应该具备三个特征:一是它的基本性,必须建立在已有知识和经验的基础上。不论竞赛题为我们展示的数学背景多么广阔,它都只是提高了教育的层次,而没有也不应该脱离基本教育的范围;二是以开发智力为目的,所比较的是智力的高下,而不是知识的多寡。竞赛当然要考查知识的灵活应用,但所涉及的知识必须是学生在常规学习中就应该掌握的,其中的思想和方法,哪怕是具有高等数学背景的思想和方法,都必然由这些知识生成,而不应该是追加的。数学竞赛的基本精神,就是在相同的知识背景下,有不同于他人的表现,在有限的知识背景下,有超越他人的能力。通过扩充知识来降低试题思维层次的做法,可以产生某些短期效果,如因有某类题而侥幸获得较好的分数,但这种效果是以放弃能力培养为代价的;三是应该具有生动活泼的形式,为学生自主发展和充分表现提供广阔的天地。恕我直言,现在的很多培训都不具备这样的特征。超前学习,题型归类,千篇一律的模拟考试,把应试教育的一套推向了极致。这些作法,已经完全背离了数学竞赛的初衷。

现在,不少家长在鼓励自己的孩子超前学习,担心输在起跑线上。这样的家长也许并不知道,超前学习的做法,在很多情况下都是有害无益的。因为在短时间内扩大知识范围,必然会忽略知识的背景、知识的来龙去脉以及知识的本质,忽略获得知识过程中的能力生成、情感体验和文化关怀。学生以后会学现在还不知道的东西,而这些未知的东西正是构成问题情境的基本要素,问题情境则是我们教学的出发点,是激发我们不断探索的原动力,这是教学中最有潜在价值的部分,却被超前学习消解了。很多人发展的持续性、可能性就是这样被窒息的。更有甚者,有人还在推崇"超前学习+题型训练"的模式。这是十分危险的。因为正是这一模式,侵占着学生宝贵的智力资源,限制着学生的思维和想象,消磨着学生的热情和创造力。其结果,也许不会输在起跑线上,但必然会输在跑道上。

为了不输在跑道上,你应该向真正的教师学习。真正的教师不会用高中教材来糊弄初中学生,不会让陈省身所谓"不好的数学"充斥课堂,也不会单纯地依赖模仿与记忆。谁是真正的教师?黄东坡可以算是一位。读了他的《新思维》,你就会明白我上面所说的话。

裴光亚

2005 年 6 月于沙湖

CONTENTS

目录

数与代数

统计与概率

空间与图形

目录

综合与拓展

1 追问求根公式

链接

> 在真实的生命里,每桩事业都是由信心开始,并由信心跨出第一步。
>
> ——史格勒

知识纵横

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程叫一元二次方程(quadratic equation in one variable),配方法(solving by of completing the square)、公式法(solving by formula)、因式分解法(solving by factorization)是解一元二次方程的基本方法. 而公式法是解一元二次方程的最普遍、最具有一般性的方法.

求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 内涵丰富:它包含了初中阶段已学过的全部代数运算;它回答了一元二次方程的诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题;它展示了数学的简洁美.

降次转化是解方程的基本思想,有些条件中含有(或可转化为)一元二次方程相关的问题,直接求解可能给解题带来许多不便,往往不是去解这个二次方程,而是对方程进行适当的变形来代换,从而使问题易于解决. 解题时常用到变形降次、整体代入、构造零值多项式等技巧与方法.

一部代数史就是研究方程、讨论方程根的历史. 一元三次方程或更高次数的方程,是否也如一元二次方程有求根公式? 16 世纪意大利数学家卡当给出了三次和四次方程的公式解;19 世纪 20 年代,挪威数学家阿贝尔意识到一般的四次以上方程没有公式解;大约又过了十年,法国数学家伽罗华彻底回答了这个问题,并创立群、环、域等概念,深刻影响着物理学、现代数学的发展.

例题求解

【例 1】 满足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$ 的整数 n 有________个.

(全国初中数学竞赛题)

思路点拨 从指数运算律、±1 的特征入手,将问题转化为解方程.

【例 2】 设 x_1、x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于(　　).

A. -4　　B. 8　　C. 6　　D. 0

（全国初中数学联赛题）

思路点拨　求出 x_1、x_2 的值再代入计算，则计算繁难，解题的关键是利用根的定义及变形，使多项式降次，如 $x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$.

【例 3】　解关于 x 的方程 $(a-1)x^2-2ax+a=0$.

思路点拨　因不知晓原方程的类型，故需分 $a-1=0$ 及 $a-1\neq0$ 两种情况讨论.

【例 4】　设方程 $x^2-|2x-1|-4=0$，求满足该方程的所有根之和.

（重庆市竞赛题）

思路点拨　通过讨论，脱去绝对值符号，把绝对值方程转化为一般的一元二次方程求解.

【例 5】　设关于 x 的二次方程 $(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$①及 $(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$②（其中 a、b 皆为正整数，且 $a\neq b$）有一个公共根，求 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

（2005 年福建省惠安市竞赛题）

思路点拨　分别求出方程的根，或设出两方程的公共根 m，建立 a、b 的等式.

链接

一元二次方程常见的变形形式有：

(1) 把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 直接作零值多项式代换；

(2) 把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 变形为 $ax^2=-bx-c$，代换后降次；

(3) 把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 变形为 $ax^2+bx=-c$ 或 $ax^2+c=-bx$，代换后使之转化关系或整体地消去 x.

解含字母系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，在未指明方程类型时，应分 $a=0$ 及 $a\neq0$ 两种情况讨论；解绝对值方程需脱去绝对值符号，并用到绝对值一些性质，如 $|x|^2=|x^2|=x^2$.

解公共根问题的基本策略是：当方程的根有简单形式表示时，利用公共根相等求解；当方程的根不便于求出时，可设出公共根，设而不求，通过消去二次项寻找解题突破口.

学力训练

链接

基础夯实

1. 方程 $x(x+3)=x+3$ 的解是________.

2. 已知 $x^2-3x-2=0$，那么代数式 $\frac{(x-1)^3-x^2+1}{x-1}$ 的值是________.

（四川省中考题）

3. 若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，则 $x+y$ 的值为________.

（TI 杯全国初中数学竞赛题）

4. 若使分式 $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ 的值为 0，则 x 的取值为（　　）.

A. 1 或 -1　　B. -3 或 1　　C. -3　　D. -3 或 -1

（2005 年安徽省芜湖市中考题）

5. 若两个方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 只有一个公共根，则（　　）.

A. $a=b$　　B. $a+b=0$　　C. $a+b=1$　　D. $a+b=-1$

（第 16 届江苏省竞赛题）

6. 根据下列表格的对应值：

x	3.23	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.06	-0.02	0.03	0.07

判断方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 一个解 x 的范围是（　　）.

A. $3<x<3.23$　　B. $3.23<x<3.24$

C. $3.24<x<3.25$　　D. $3.25<x<3.26$

（2005 年浙江省中考题）

7. 解下列关于 x 的方程：

(1) $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$；

(2) $x^2-|x|-1=0$；　　(3) $|x^2+4x-5|=6-2x$.

8. 已知 $x^2-2x-2=0$，求代数式 $(x-1)^2+(x+3)(x-3)+(x-3)(x-1)$ 的值.

（上海市中考题）

9. 是否存在某个实数 m，使得方程 $x^2+mx+2=0$ 和 $x^2+2x+m=0$ 有且只有一个公共的实根？如果存在，求出这个实数 m 及两方程的公共实根；如果不存在，请说明理由.

能力拓展

链接

10. 设方程 $2002^2x^2-2003\times2001x-1=0$ 的较大根为 r，方程 $2001x^2-2002x+1=0$ 的较小根为 s，则 $r-s$ 的值为________.

11. 已知 a、b 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，b、c 是方程 $x^2-8x+5m=0$ 的两个根，则 $m=$________.

（2004 年山东省竞赛题）

12. 已知 a 是方程 $x^2-x-2000=0$ 的一个正根，则代数式 $3+\dfrac{2000}{1+\dfrac{2000}{1+\dfrac{2000}{a}}}$ 的值为________.

（河北省竞赛题）

13. 已知 α、β 是方程 $2x^2-3|x|-2=0$ 的两个实数根，则 $\dfrac{\alpha\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ 的值为（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

（2004 年太原市竞赛题）

14. 自然数 n 满足 $(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$，这样的 n 的个数是（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. 3　　D. 4

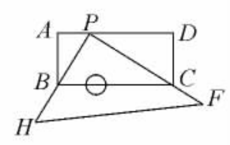
（第 15 届江苏省竞赛题）

15. 已知 a、b 都是负实数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a-b}=0$，那么 $\dfrac{b}{a}$ 的值是（　　）.

A. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　　C. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

16. 已知 m、n 是一元二次方程 $x^2+2001x+7=0$ 的两个根，求 $(m^2+2000m+6)(n^2+2002n+8)$ 的值.

17. 如图，有一块塑料矩形模料 $ABCD$，长为 10cm，宽为 4cm，将你手中足够大的直角三角板 PHF 的直角顶点 P 落在 AD 边上（不与 A、D 重合），在 AD 上适当移动三角板顶点 P.



（第 17 题）

(1)能否使你的三角板两直角边分别通过点 B 与点 C？若能，请你求出这时 AP 的长；若不能，请说明理由．

(2)再次移动三角板位置，使三角板顶点 P 在 AD 上移动，直角边 PH 始终通过点 B，另一直角边 PF 与 DC 延长线交于点 Q，与 BC 交于点 E，能否使 $CE=2$cm？若能，请你求出这时 AP 的长；若不能，请你说明理由．

（2004 年重庆市中考题）

链接

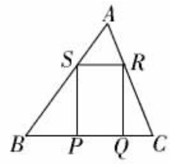
综合创新

18. 二次三项式 x^2-x-2n 能分解为两个整系数一次因式的乘积.

(1)若 $1\leqslant n\leqslant 30$,且 n 是整数,则这样的 n 有多少个?

(2)当 $n\leqslant 2005$ 时,求最大整数 n.

(2005 年四川省竞赛题)



(第 19 题)

19. 如图,锐角$\triangle ABC$ 中,$PQRS$ 是$\triangle ABC$ 的内接矩形,且 $S_{\triangle ABC}=nS_{\text{矩形}PQRS}$,其中 n 为不小于 3 的自然数. 求证:$\frac{BS}{AB}$为无理数.

(上海市竞赛题)

2 判别式

——二次方程的根的检测器

链接

> **我没有试图直接解决某一物理问题，而只是试图寻求某种优美的数学。**
>
> **——狄拉克**

知识纵横

为了检查产品质量是否合格，工厂里通常使用各种检验仪器，为了辨别钞票的真伪，银行里常常使用验钞机，类似地，在解一元二次方程有关问题时，最好能知道根的特性：如是否有实数根，有几个实数根，根的符号特点等。我们形象地说，判别式是一元二次方程根的“检测器”，在以下方面有着广泛的应用：

利用判别式，判定方程实根的个数、根的特性；

运用判别式，建立等式、不等式，求方程中参数或参数的取值范围；

通过判别式，证明与方程相关的代数问题；

借助判别式，运用一元二次方程必定有解的代数模型，解几何存在性问题、最值问题.

运用判别式解题，需要注意的是：

(1) 解含参数的二次方程，必须注意二次项系数不为 0 的隐含制约；

(2) 在解涉及多个二次方程的问题时，需在整体方法、降次消元等方法思想的引导下，综合运用方程、不等式的知识.

例题求解

【例 1】 (1)已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}x-1=0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是________.

（广西中考题）

(2)关于 x 的方程 $x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$ 只有一个实数根，则 a 的取值范围是________.

（2004 年四川省竞赛题）

思路点拨 对于(1)，利用判别式建立关于 k 的不等式组，注意 $1-2k$、$k+1$ 的隐含制约. 对于(2)，通过分解降次，将高次方程转化为一元二次方程根的情形讨论.

链接

【例 2】 已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根；$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根；$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，则 a、b 的取值范围是（　　）.

A. $2<a<4,2<b<5$　　　B. $1<a<4,2<b<5$

C. $1<a<4,1<b<5$　　　D. $2<a<4,1<b<5$

（江苏省竞赛题）

思路点拨　由判别式得到一个含等式、不等式的混合组，解题的关键是整体代入消元.

【例 3】 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$.

（1）求证：无论 k 取任何实数值，方程总有实数根；

（2）若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=1$，另两边长 b、c 恰好是这个方程的两个根，求$\triangle ABC$ 的周长.

（湖北省荆门市中考题）

思路点拨　对于（1）只需证明 $\Delta\geqslant 0$；对于（2）由于未指明底与腰，须分 $b=c$ 或 b、c 中有一个与 a 相等两种情况讨论，运用判别式、根的定义求出 b、c 的值.

涉及等腰三角形的考题，需要分类求解，这是命题设计的一个热点，但不一定每个这类题均有多解，还须结合三角形三边关系定理予以取舍.

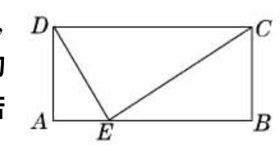
【例 4】 设方程 $|x^2+ax|=4$ 只有 3 个不相等的实数根，求 a 的值和相应的 3 个根.

（重庆市竞赛题）

思路点拨　去掉绝对值符号，原方程可化为两个一元二次方程. 原方程只有 3 个不相等的实数根，则其中一个判别式大于零，另一个判别式等于零.

运用根的判别式讨论方程根的个数为人所熟悉，而组合多个判别式讨论方程多个根（三个以上）是近年中考、竞赛依托判别式的创新题型，解这类问题常用到换元、分类讨论等思想方法.

【例 5】 已知：如图，矩形 $ABCD$ 中，$AD=a$，$DC=b$，在 AB 上找一点 E，使 E 点与 C、D 的连线将此矩形分成的三个三角形相似，设 $AE=x$，问：这样的点 E 是否存在？若存在，这样的点 E 有几个？请说明理由.



（云南省中考题）

思路点拨　要使 Rt$\triangle ADE$、Rt$\triangle BEC$、$\triangle ECD$ 彼此相似，点 E 必须满足 $\angle AED+\angle BEC=90^\circ$，为此，可设在 AB 上存在满足条件的点 E 使得 Rt$\triangle ADE$ $\backsim$ Rt$\triangle BEC$，建立一元二次方程的数学模型，通过判别式讨论点 E 的存在与否及存在的个数.

有些与一元二次方程表面无关的问题，可通过构造方程为判别式的运用铺平道路，常见的构造方法有：

(1) 利用根的定义构造；

(2) 利用根与系数关系构造；

(3) 确定主元构造.

学力训练

链接

基础夯实

1. 如果关于 x 的方程 $x^2+4x+a=0$ 有两个相等的实数根，那么 $a=$________.

（2005 年上海市中考题）

2. 若关于 x 的方程 $x^2+2\sqrt{k}x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是________.

（辽宁省中考题）

3. 等腰$\triangle ABC$ 中，$BC=8$，AB、AC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的两根，则 $m=$________.

（2004 年宁波市中考题）

4. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2+3x-1=0$ 有实数根，则 k 的取值范围是（　　）.

A. $k\leqslant-\frac{9}{4}$　　B. $k\geqslant-\frac{9}{4}$ 且 $k\neq0$　　C. $k\geqslant-\frac{9}{4}$　　D. $k>-\frac{9}{4}$ 且 $k\neq0$

（2005 年扬州市中考题）

5. 已知一直角三角形的三边为 a、b、c，$\angle B=90^\circ$，那么关于 x 的方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 的根的情况为（　　）.

A. 有两个相等的实数根　　B. 没有实数根

C. 有两个不相等的实数根　　D. 无法确定

（河南省中考题）

6. 若 t 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 和完全平方式 $M=(2at+b)^2$ 的关系是（　　）.

A. $\Delta=M$　　B. $\Delta>M$

C. $\Delta<M$　　D. 大小关系不能确定

（2005 年杭州市中考题）

7. 在等腰三角形 ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，已知 $a=3$，b 和 c 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2-\frac{1}{2}m=0$ 的两个实数根，求$\triangle ABC$ 的周长.

（济南市中考题）

8. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(2-m)x+3-6m=0$

(1)求证：无论 m 取什么实数，方程总有实数根；

(2)如果方程的两实根分别为 x_1、x_2，满足 $x_1=3x_2$，求实数 m 的值.

（盐城市中考题）

链接

9. 已知关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2+n=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2，且 $(2x_1+x_2)^2-8(2x_1+x_2)+15=0$.

(1) 求证：$n<0$；

(2) 试用 k 的代数式表示 x_1；

(3) 当 $n=-3$ 时，求 k 的值.

（2005 年南通市中考题）

能力拓展

10. 上数学课时，老师给出一个一元二次方程 $x^2+ax+b=0$，并告诉学生，从数字 1、3、5、7 中随机抽取一个作为 a，从数字 0、4、8 中随机抽取一个作为 b，组成不同的方程共 m 个，其中有实数解的方程共 n 个，则 $\frac{n}{m}=$________.

（2004 年重庆市竞赛题）

11. 已知关于 x 的方程 $x^3+(1-a)x^2-2ax+a^2=0$ 有且只有一个实根，则实数 a 的取值范围是________.

12. 若方程 $|x^2-5x|=a$ 有且只有相异二实根，则 a 的取值范围是________.

13. 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根的个数(　　).

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 不能确定

14. 设三个方程 $x^2+4mx+4m^2+2m+3=0$，$x^2+(2m+1)x+m^2=0$，$(m-1)x^2+2mx+m-1=0$ 中至少有一个方程有实根，则 m 的取值范围是(　　).

A. $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{4}$　　B. $m\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant-\frac{1}{4}$

C. $m\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{4}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$

（江苏省竞赛题）

15. 已知△ABC 的三边长为 a、b、c，且满足方程 $a^2x^2-(c^2-a^2-b^2)x+b^2=0$，则方程根的情况是(　　).

A. 有两相等实根　　B. 有两相异实根

C. 无实根　　D. 不能确定

（河北省竞赛题）

16. 若 a、b、c、$d>0$，证明：在方程 $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}x+\sqrt{cd}=0$①；$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}x+\sqrt{ad}=0$②；$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$③；$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$④中，至少有两个方程有两个不相等的实数根.

（湖北省黄冈市竞赛题）

17. 已知三个实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$，$abc=1$，求证：a、b、c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.

18. 关于 x 的方程 $kx^2-(k-1)x+1=0$ 有有理根,求整数 k 的值.

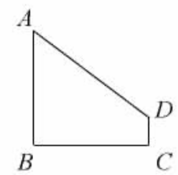
(山东省竞赛题)

综合创新

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(a+2b+3)x+(a^2+4b^2+99)=0$ 无相异两实根,则满足条件的有序正整数组 (a,b) 有多少组?

(2006 年全国初中数学联赛题)

20. 如图,$AB\perp BC$,$DC\perp BC$,垂足分别为 B、C.



(1)当 $AB=4$,$DC=1$,$BC=4$ 时,在线段 BC 上是否存在点 P,使 $AP\perp PD$?如果存在,求线段 BP 的长;如果不存在,请说明理由.

(2)设 $AB=a$,$DC=b$,$AD=c$,那么当 a、b、c 之间满足什么关系时,在直线 BC 上存在点 P,使 $AP\perp PD$?

(2004 年南京市中考题)