



湖北省新闻出版局曾组织评选了“最有影响的10本书”，名列榜首的是《康熙大帝》，排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》（下简称《新帮手》）——黄东坡的大作，其余的8本书，也都选自不同的领域：政治、经济、科普、历史和艺术。从《武汉晚报》得到这一消息后，我感到非常激动，因为《新帮手》的成功也是我的预期，证明我对该书的判断和鉴赏是正确的，向读者的举荐和承诺是可信的；我感到激动，还因为一本关于培优竞赛辅导的书，也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中，毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就，本来只需作些修饰与补正的工作，但黄东坡并没有止于此，而是乘胜前进，继续探索，终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》（下简称《新方法》）问世。我赞赏这样的精神，因为著书与教学满足同样的公理：没有最好的，只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》，你就会发现，它的创新之处在于：从知识的回眸说起，重过程；以“知识纵横”发轫，浸透着历史的信息，重思想；在标题后是一则名言，紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养。这体现的是什么呢？一种改革的精神，一种数学教育的现代理念，这是同中之异。同样，你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念：比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想；以典型问题为载体，着力反映教学真实，选材联系课本而又高于课本的基本原则；点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式；着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料；以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等，这些被实践所证明了的成功经验，在本书中又得以进一步张扬，成为作者的写作个性，这体现的是什么呢？是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度，既有反思，又有发展，不是否定，而是扬弃，这正是现代数学教育理念的精神所在。因此，我们说，体现现代数学教育理念，而且把这种理念转化为教学行为和写作实践，是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布，数学教育正处于一个重要的变革时期，人们对数学的认识，对数学学习的认识，对数学价值与功能的认识，都在发生着显著的变化，它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化，影响到数学试题的立意、情境和设问方式，当这一切都在变化的时候，不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇，看来，这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着：有更多的老师会与作者达成共识，有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2006年5月



1 分解方法的延拓

——换元法与主元法



具有丰富知识和经验的人,比只有一种知识和经验的人更容易产生新的联想和独到的见解.

——泰勒

知识纵横

因式分解(factorization)是针对多项式的一种恒等变形,提公因式(common factor)法、公式法、分组分解法是因式分解的基本方法,通常根据多项式的项数来选择分解的方法.

一些复杂的因式分解问题,常用到换元法和主元法.

所谓换元,即对结构比较复杂的多项式,若把其中某些部分看成一个整体,用新字母代替(即换元),则能使复杂的问题简单化、明朗化,在减少多项式项数,降低多项式结构复杂程度等方面有独到作用.

所谓主元,即在解多变元问题时,选择其中某个变元为主要元素,视其他变元为常量,将原式重新整理成关于这个字母的按降幂排列的多项式,则能排除字母的干扰,简化问题的结构.

例题求解

【例 1】 分解因式: $(x^4 + x^2 - 4)(x^4 + x^2 + 3) + 10 =$ _____.

(第 12 届“五羊杯”竞赛题)

思路点拨 视 $x^4 + x^2$ 为一个整体,用一个新字母代替,从而能简化式子的结构.

【例 2】 多项式 $x^2y - y^2z + z^2x - x^2z + y^2x + z^2y - 2xyz$ 因式分解后的结果

分组分解法是因式分解的基本方法,体现了化整体为局部、又统揽全局的思想,如何恰当分组是解题的关键,常见的分组方法有:

- (1) 按字母分组;
- (2) 按次数分组;
- (3) 按系数分组.

为了能迅速解决一些与代数式恒等变形相关问题,读者应熟悉如下多项式分解因式后的结果:

- (1) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
- (2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
- (3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.



是()。

- A. $(y-z)(x+y)(x-z)$ B. $(y-z)(x-y)(x+z)$
 C. $(y+z)(x-y)(x+z)$ D. $(y+z)(x+y)(x-z)$

(上海市竞赛题)

思路点拨 原式是一个复杂的三元三次多项式,直接分解有一定困难,把原式整理成关于某个字母按降幂排列的多项式,改变其结构,寻找分解的突破口。



从换元的形式看,有常值代换、式的代换;从引元的个数看,有一元代换、二元代换等。换元的思想是简化式子的表达形式,在代数式的化简求值、因式分解、解方程等方面有广泛的应用。用换元法解题时,需认真观察,恰当变形,发现数式的结构特点。

项数多、次数高、元数多是解代数问题时产生困难的原因之一,主元法是促使我们解决困难的有效方法。选择次数低的字母为主元,是确定主元的基本方法,也是运用主元法解题的关键。

【例 3】 把下列各式分解因式:

- (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$; (天津市竞赛题)
 (2) $1999x^2-(1999^2-1)x-1999$; (重庆市竞赛题)
 (3) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(xy-1)^2$; (“希望杯”邀请赛试题)
 (4) $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3$. (第 13 届“五羊杯”竞赛题)

思路点拨 (1)是形如 $abcd+e$ 型的多项式,分解这类多项式时,可适当把 4 个因式两两分组,使得分组相乘后所得的有相同的部分;(2)式中系数较大,不妨把数用字母表示;(3)式中 $x+y, xy$ 多次出现,可引入两个新字母,突出式子特点;(4)式前两项与后一项有密切联系。

【例 4】 把下列各式分解因式:

- (1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;
 (2) $x^2+xy-2y^2-x+7y-6$.

思路点拨 (1)式字母多、次数高,可尝试用主元法;(2)式是形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 的三元二次多项式,解题思路宽,用主元法或分组分解法或用待定系数法分解。

【例 5】 证明:对任何整数 x 和 y ,下式的值都不会等于 33.

$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5.$$

(莫斯科奥林匹克八年级试题)

思路点拨 33 不可能分解为四个以上不同因数的积,于是将问题转化为只需证明原式可分解为四个以上因式的乘积即可。



基础夯实

- 分解因式： $a^3 - 2a^2b + ab^2 =$ _____ .
(2005 年陕西省中考题)
- 分解因式： $x^2 - 2xy + y^2 - 9 =$ _____ .
(2004 年北京市中考题)
- 分解因式： $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 =$ _____ .
- 已知 a, b, c 满足 $a + b = 5, c^2 = ab + b - 9$, 则 $c =$ _____ .
- 将多项式 $x^4 - 2x^2 - 3$ 分解因式, 结果正确的是().
 A. $(x^2 + 3)(x^2 - 1)$ B. $(x^2 + 1)(x^2 - 3)$
 C. $(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$ D. $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$
- 多项式 $ac - bc + a^2 - b^2$ 分解因式的结果是().
 A. $(a - b)(a + b + c)$ B. $(a - b)(a + b - c)$
 C. $(a + b)(a + b - c)$ D. $(a + b)(a - b + c)$
(2005 年四川省中考题)
- 要使二次三项式 $x^2 - 5x + p$ 在整数范围内能进行因式分解, 那么整数 p 的取值可以有().
 A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 无数个
(2004 年杭州市中考题)
- 若 $a + b = -\frac{1}{5}, a + 3b = 1$, 则 $3a^2 + 12ab + 9b^2 + \frac{3}{5}$ 的值为().
 A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 0
(大连市“育英杯”竞赛题)
- 分解因式:
 - $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;
 - $(2x^2 - 3x + 1)^2 - 22x^2 + 33x - 1$;
 - $x^4 + 2001x^2 + 2000x + 2001$;
 - $(6x - 1)(2x - 1)(3x - 1)(x - 1) + x^2$;
 - $ab(a + b)^2 - (a + b)^2 + 1$;
(第 16 届“希望杯”邀请赛试题)
 - $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6$.
(“希望杯”邀请赛试题)



能力拓展

10. 分解因式: $(x^2-1)(x+3)(x+5)+12=$ _____.
11. 分解因式: $x^2+5xy+x+3y+6y^2=$ _____. (河南省竞赛题)
12. 分解因式: $(x-2)^3-(y-2)^3-(x-y)^3=$ _____.
(第12届“五羊杯”竞赛题)
13. 在 $1\sim 100$ 之间若存在整数 n , 使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次式的乘积, 这样的 n 有 _____ 个. (北京市竞赛题)
14. $2x^3+x^2-13x+6$ 的因式是().
A. $2x-1$ B. $x+2$ C. $x-3$ D. x^2+1 E. $2x+1$
(美国犹他州竞赛题)
15. 已知 $a>b>c$, $M=a^2b+b^2c+c^2a$, $N=ab^2+bc^2+ca^2$, 则 M 与 N 的大小关系是().
A. $M<N$ B. $M>N$ C. $M=N$ D. 不能确定
(第13届“希望杯”邀请赛试题)
16. 把下列各式分解因式:
(1) $(a^2+a+1)(a^2-6a+1)+12a^2$;
(2) $(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$; (湖北省黄冈市竞赛题)
(3) $(x+y)^4+(x^2-y^2)^2+(x-y)^4$; (第16届“五羊杯”竞赛题)
(4) $(x^4-4x^2+1)(x^4+3x^2+1)+10x^4$; (第13届“五羊杯”竞赛题)
(5) $9x^2-6x-y^2+4y-3$. (2004年河南省竞赛题)



综合创新

17. 对方程 $a^2b^2+a^2+b^2=2004$, 求出至少一组整数解.
(2005年莫斯科市竞赛题)
18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$ (a, b, c 是三角形三边的长). 求证: $a+c=2b$.
(天津市竞赛题)



分解方法的延拓

2

——配方法与待定系数法

数学也是一种语言,从它的结构和内容看,这是一种比任何国家的语言都要完善的语言,实际上,数学是语言的语言,通过数学,自然界在论述;通过数学,世界的创造者在表达;通过数学,世界的保护者在讲演.

——第尔曼



知识纵横

在数学课外活动中,配方法与待定系数法也是分解因式的重要方法.

把一个式子或一个式子的部分写成完全平方或几个完全平方式的和的形式,这种方法叫配方法,配方法分解因式的关键是通过拆项或添项,将原多项式配上某些需要的项,以便得到完全平方,然后在此基础上分解因式.

对所给的数学问题,根据已知条件和要求,先设出问题的多项式表达形式(含待定的字母系数),然后利用已知条件,确定或消去所设待定系数,使问题获解的这种方法叫待定系数法,用待定系数法解题的一般步骤是:

1. 根据多项式次数关系,假设一个含待定系数的等式;
2. 利用恒等式对应项系数相等的性质,列出含有待定系数的方程组;
3. 解方程组,求出待定系数,再代入所设问题的结构中去,得到需求问题的解.



例题求解

【例 1】 分解因式: $4x^2 - 4x - y^2 + 4y - 3 =$ _____.

(重庆市竞赛题)

思路点拨 直接分组分解困难,由式子的特点易想到完全平方,关键是将常数项拆成几个数的代数和,以便凑配.

拆项即把代数式中的某项拆成两项的和或差,添项即把代数式添上两个符号相反的项,通过拆添项,多项式增加了项数,从而可以用分组分解法分解.

配方法与待定系数法是数学中重要的思想方法,不仅仅拘泥于分解因式,在后续的学习中如解高次方程、确定函数解析式、挖掘隐含条件、讨论最值问题等方面有广泛的应用.





基础夯实

- (1) 在多项式 $4x^2+1$ 中, 添加一个单项式, 使其成为一个完全平方式, 则添加的单项式是_____。
(2005 年山西省中考题)

(2) 分解因式: $2x^2-20x+50=$ _____。
(2005 年贵阳市中考题)

(3) 分解因式: $a^2-b^2+4a+2b+3$ 的结果是_____。
(郑州市竞赛题)
- 若 x^3+3x^2-3x+k 有一个因式是 $x+1$, 则 $k=$ _____。
- 已知 $(x+y)^2-2x-2y+1=0$, 则 $(x+y)^{999}=$ _____。
(2004 年广西竞赛题)
- 分解因式: $x^2-y^2+ax+ay=$ _____。
(2005 年河北省中考题)
- 已知 $a^2+b^2+4a-2b+5=0$, 则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为()。

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$
- 把多项式 $a^2-2ab+b^2-1$ 分解因式, 结果是()。

A. $(a-b+1)(a-b-1)$ B. $(a-b+1)(a+b-1)$
C. $(a+b+1)(a+b-1)$ D. $(a+b+1)(a-b-1)$
(2005 年南京市中考题)
- a^4+4 分解因式的结果是()。

A. $(a^2+2a-2)(a^2-2a+2)$ B. $(a^2+2a-2)(a^2-2a-2)$
C. $(a^2+2a+2)(a^2-2a-2)$ D. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$
(2005 年河南省竞赛题)
- 把下列各式分解因式:

(1) a^4+64b^4 ; (2) $x^4+x^2y^2+y^4$;
(3) $x^2+(1+x)^2+(x+x^2)^2$;
(4) $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$; (昆明市竞赛题)
(5) $a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4$; (第 15 届“希望杯”邀请赛试题)
(6) x^3+2x^2-5x-6 (重庆市竞赛题)
- 已知 x^2+2x+5 是 x^4+ax^2+b 的一个因式, 求 $a+b$ 的值。
(第 13 届“希望杯”邀请赛试题)



能力拓展

10. 已知 x^2+x-6 是多项式 $2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$ 的因式, 则 $a=$ _____, $b=$ _____.

(第 15 届江苏省竞赛题)

11. 已知 $4x^2-3x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 对任意数 x 成立, 则 $4a+2b+c=$ _____.

12. 已知 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$, 则 $(x-y-z)^{2002}=$ _____.

(北京市竞赛题)

13. 已知 n 为正整数, 且 $4^7+4^n+4^{1998}$ 是一个完全平方数, 则 n 的值为 _____.

14. 若 $3x^3-kx^2+4$ 被 $3x-1$ 除后余 3, 则 k 的值为().

- A. 2 B. 4 C. 9 D. 10

(2005 年武汉市“CASIO 杯”选拔赛题)

15. 若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$ (x, y 是实数), 则 M 的值一定是().

- A. 正数 B. 负数 C. 零 D. 整数

(2005 年“CASIO 杯”全国初中数学竞赛题)

16. 若 a, b, c, d 都是正数, 则在以下命题中, 错误的是().

- A. 若 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, 则 $a=b=c$
 B. 若 $a^3+b^3+c^3=3abc$, 则 $a=b=c$
 C. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=2(a^2b^2+c^2d^2)$, 则 $a=b=c=d$
 D. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, 则 $a=b=c=d$

17. 把下列各式分解因式:

- (1) $4x^3-31x+15$;
 (2) $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$;
 (3) $x^2-2x-2y^2+4y-xy$; (2004 年重庆市竞赛题)
 (4) x^3+5x^2+3x-9 ;
 (5) $x^4+2x^3-9x^2-2x+8$. (2004 年“CASIO 杯”河南省竞赛题)

18. 已知关于 x, y 的二次式 $x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$ 可分解为两个一次因式的乘积, 求 m 的值. (太原市竞赛题)

综合创新

19. 证明恒等式: $a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$. (北京市竞赛题)

20. 一个自然数 a 若恰好等于另一个自然数 b 的平方, 则称自然数 a 为完全平方数, 如 $64=8^2$, 64 就是一个完全平方数, 已知 $a=2001^2+2001^2 \times 2002^2+2002^2$, 求证: a 是一个完全平方数.



一元高次多项式, 分解因式有下列两种常用方法:

- (1) 拆添项法;
 (2) 待定系数法.

拆添项是一项技巧性很强的工作, 只有认真观察多项式的结构特征和数量关系, 才能正确地对多项式进行拆添项, 待定系数法虽具有一般性, 但是操作过程较繁, 因此, 需具体问题具体分析, 灵活选用方法分解.



因式分解的应用

3

链接



对一个数学问题,改变它的形式,换一种叙述方式,变换它的结构,直到发现有价值的东西,这是解题的一个重要原则.

——玻利亚



知识纵横

在一定的条件下,把一个代数式变换成另一个与它恒等的代数式称为代数式的恒等变形,是研究代数式、方程和函数的基础.

因式分解是代数变形的重要工具,在后续的学习中,因式分解是学习分式、一元二次方程等知识的基础,现阶段,因式分解在数值计算、代数式的化简求值、不定方程(组)、代数等式的证明等方面有广泛的应用.同时,通过因式分解的训练和应用,能使我们的观察能力、运算能力、变形能力、逻辑思维能力、探究能力得以提高.因此,有人说因式分解是学好代数的基础之一.

许多多项式分解因式后的结果在解题中经常用到,我们应熟悉以下的常用结果:

- $ab \pm b \pm a + 1 = (a \pm 1)(b \pm 1)$;
- $ab \pm a \mp b + 1 = (a \mp 1)(b \pm 1)$;
- $a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$;
- $4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$;
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$;
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.



例题求解

【例 1】若 $x^2 + xy + y = 14$, $y^2 + xy + x = 28$, 则 $x + y$ 的值为 _____.

(全国初中数学联赛题)

思路点拨 恰当处理两个等式,分解关于 $x + y$ 的二次三项式.

在信息技术飞速发展的今天,信息已经成为人类生活中最重要的因素.在军事、政治、商业、生活等领域中,信息的保密工作显得格外重要.现代保密技术的一个基本思想,在编制密码的工作中,许多编码方法,就来自于因数分解、因式分解技术的应用.

代数式求值的常用方法是:

(1) 代入字母的值求值;

(2) 通过变形,寻找字母间的关系,代入关系求值;

(3) 整体代入求值.





基础夯实

1. 多项式 $x^2 + px + 12$ 可分解为两个一次因式的积, 整数 p 的值是 _____ (写出一个即可).

(2005 年湖北省荆门市中考题)

2. 在日常生活中如取款、上网等都需要密码. 有一种用“因式分解”法产生的密码, 方便记忆. 原理是: 如对于多项式 $x^4 - y^4$, 因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$, 若取 $x=9, y=9$ 时, 则各个因式的值是: $(x-y)=0, (x+y)=18, (x^2+y^2)=162$, 于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3 - xy^2$, 取 $x=10, y=10$ 时, 用上述方法产生的密码是: _____ (写出一个即可).

(2005 年浙江省中考题)

3. 已知 a, b, c, d 为非负整数, 且 $ac + bd + ad + bc = 1997$, 则 $a + b + c + d =$ _____.

4. 对一切大于 2 的正整数 n , 数 $n^5 - 5n^3 + 4n$ 的最大公约数是 _____.

(四川省竞赛题)

5. 已知 $1 + x + x^2 + x^3 = 0$, 则 $1 + x + x^2 + \dots + x^{2004}$ 的值为 ().

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 2004

(2004 年重庆市竞赛题)

6. 若 a, b, c 为三角形的三边, 则下列关系式中正确的是 ().

- A. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc > 0$ B. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc = 0$
 C. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$ D. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc \leq 0$

7. a, b, c 是正整数, $a > b$, 且 $a^2 - ab - ac + bc = 7$, 则 $a - c$ 等于 ().

- A. -1 B. -1 或 -7 C. 1 D. 1 或 7

(第 17 届江苏省竞赛题)

8. 设 $a = \frac{2004^3 - 2003 \times (2004^2 + 2005)}{2003 \times (2002^2 - 2001) - 2002^3}$, $b = \frac{2005^3 - 2004 \times (2005^2 + 2006)}{2004 \times (2003^2 - 2002) - 2003^3}$, 则 a, b 的大小关系是 ().

- A. $a > b$ B. $a = b$ C. $a < b$ D. 无法确定.

(中学生智能通讯赛试题)

9. (1) 求证: $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除;

(2) 证明: 当 n 为自然数时, $2(2n+1)$ 形式的数不能表示为两个整数的平方差;



(3) 计算:
$$\frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\left(8^4 + \frac{1}{4}\right)\left(10^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\left(7^4 + \frac{1}{4}\right)\left(9^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

(江苏省竞赛题)

10. 若 a 是自然数, 则 $a^4 - 3a^2 + 9$ 是质数还是合数? 给出你的证明.

(“五城市”联赛题)



能力拓展

11. a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 且 $3a^3 + 6a^2b - 3a^2c - 6abc = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 _____.

12. 对于一个正整数 n , 如果能找到正整数 a, b , 使得 $n = a + b + ab$, 则称 n 为一个“好数”, 例如 $3 = 1 + 1 + 1 \times 1$, 3 就是一个“好数”, 那么, 在 $1 \sim 20$ 这 20 个正整数中, 好数有 _____ 个.

(2005 年四川省竞赛题)

13. 整数 a, b 满足 $6ab = 9a - 10b + 303$, 则 $a + b =$ _____.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

14. 已知 $a^5 - a^4b - a^4 + a - b - 1 = 0$, 且 $2a - 3b = 1$, 则 $a^3 + b^3$ 的值等于 _____.

(第 14 届“希望杯”邀请赛试题)

15. 若 $2x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + b$ 能被 $x^2 + x - 2$ 整除, 则 $a : b$ 的值是().

- A. -2 B. -12 C. 6 D. 4

(第 19 届江苏省竞赛题)

16. 若 $x + y = -1$, 则 $x^4 + 5x^3y + x^2y^2 + 8x^2y^2 + xy^2 + 5xy^3 + y^4$ 的值等于().

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 3

(第 14 届“希望杯”邀请赛试题)

17. 已知两个不同的质数 p, q 满足下列关系: $p^2 - 2001p + m = 0, q^2 - 2001q + m = 0, m$ 是适当的整数, 那么 $p^2 + q^2$ 的数值是().

- A. 4004006 B. 3996005 C. 3996003 D. 4004004

18. 已知 $A = 48 \times \left(\frac{1}{3^2-4} + \frac{1}{4^2-4} + \dots + \frac{1}{100^2-4}\right)$, 则与 A 最接近的正整数是().

- A. 18 B. 20 C. 24 D. 25

(2005 年“CASIO 杯”全国初中数学竞赛题)

19. 求证: 存在无穷多个自然数 k , 使得 $n^4 + k$ 不是质数.

20. 某校在向“希望工程”捐款活动中, 甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等, 都是 $(mn + 9m + 11n + 145)$ 元, 已知每人的捐款数相同, 且都是整数, 求每人的捐款数.

(全国初中数学联赛题)



21. 证明： $1999 \times 2000 \times 2001 \times 2003 \times 2004 \times 2005 + 36$ 是一个完全平方数.

(2005 年俄罗斯萨温市竞赛题)

22. 按下面规则扩充新数：

已有两数 a, b , 可按规则 $c = ab + a + b$ 扩充一个新数, 在 a, b, c 三个数中任取两数, 按规则又可扩充一个新数, …… 每扩充一个新数叫做一次操作.

现有数 1 和 4.

- (1) 求按上述规则操作三次得到扩充的最大新数；
- (2) 能否通过上述规则扩充得到新数 1999, 并说明理由.

(重庆市竞赛题)





分式的概念、性质及运算

4



在寻求真理的长河中,惟有学习,不断地学习,有创造性地学习,才能越重山,跨峻岭.

——华罗庚

知识纵横

分式(fraction)包括分式的概念、分式的基本性质、分式的运算、简单的分式方程等主要内容.

从整式到分式,我们可以形象地说是从“平房”到了“楼房”,在脚手架上活动,无疑增加了难点,体现在:解分式问题总是在分式有意义的前提下进行的,因此必须考虑字母取值范围;分式运算中的通分(changing fractions to a common denominator)和约分(reduction of a fraction)是技巧性较强的工作,需要灵活处理.

分式的运算与分数的运算相似,是以分式的基本性质、运算法则、通分和约分为基础,是以整式的变形、因式分解为工具,分式的加减运算是分式运算的难点,突破这一难点的关键是能根据问题的特点恰当地通分,常用通分的策略与技巧有:

1. 化整为零,分组通分;
2. 步步为营,分步通分;
3. 减轻负担,先约分再通分;
4. 裂项相消后通分等.

例题求解

【例 1】 (1) 当 $m =$ _____ 时,分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零;

(2005 年杭州市中考题)

(2) 要使分式 $\frac{1}{\frac{1-|x|}{|x|}}$ 有意义,则 x 的取值范围是 _____.

(“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 对于(2),当分式的分母不为零时,分式有意义,由于分式是繁分

在新事物面前,人们往往习惯于把它们与原有的、熟知的事物相比,这里蕴含的思想方法就是类比.

学习分式时,应注意:

(1) 分式与分数的概念、性质、运算的类比;

(2) 整数可以看作是分数的特殊情形,但整式却不是分式的特殊情形;

(3) 分式需要讨论字母的取值范围,这是分式区别于整式的关键所在.





式,因此考虑问题应细致周密.

【例 2】 已知 $a+b+c=0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -4$, 那么 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ 的值为().

- A. 3 B. 8 C. 16 D. 20

(2006 年“CASIO 杯”武汉市选拔赛试题)

思路点拨 由 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2$ 想到完全平方公式.

把一个真分式化成几个简单的真分式的代数和,其方法是:先将分式的分母分解因式,再根据分母的因式次数假设分解后的部分分式,最后用待定系数法求解.

整体与局部是一对矛盾,又可相互转化,当一个数学问题不能或不便于从整体上加以解决时,我们常从局部入手将原题分解,这就是解题的分解策略.解绝对值问题时用的分段、分类讨论、因式分解的分组分解法、分式运算中的分步分组通分等,是分解策略的具体运用.

【例 3】 计算下列各式:

(1) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4}$;

(2) $\frac{x^2+yz}{x^2+(y-z)-yz} + \frac{y^2-zx}{y^2+(z+x)y+zx} + \frac{z^2+xy}{z^2-(x-y)z-xy}$;

(第 12 届“五羊杯”竞赛题)

(3) $\frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1} + \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1} - \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$;

(江西省赣州市竞赛题)

(4) $\frac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)} + \frac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(y+z-2x)} + \frac{(x-z)(y-z)}{(y+z-2x)(x-2y+z)}$.

(安徽省马鞍山市竞赛题)

思路点拨 因各分式复杂,故须观察各式中分母的特点,恰当运用通分的相关策略与技巧.对于(1),分步通分;对于(2),拆项再通分;对于(3),先约分再通分;对于(4)注意到分母与分子的项与项之间的关系,如 $x-2y+z=(x-y)-(y-z)$,采用换元法简化式子.

【例 4】 已知 $\frac{2x^2+x-11}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$, 其中 A、B、C 为常数. 求 A+B+C 的值.

(第 17 届“五羊杯”竞赛题)

思路点拨 将右边通分,比较分子,建立 A、B、C 的等式.

把一个分式写成几个分式的和的形式,是分式加减的逆运算,解这类问题常用到待定系数法.





【例5】 (1) n 为自然数, 若 $n+6 \mid n^3+1996$, 则称 n 为 1996 的吉祥数, 如 $4+6 \mid 4^3+1996$, 4 就是 1996 年的一个吉祥数. 试求 1996 年的所有吉祥数的和;

(北京市竞赛题)

(2) 计算:

$$\frac{1^2}{1^2-100+5000} + \frac{2^2}{2^2-200+5000} + \dots + \frac{k^2}{k^2-100k+5000} + \frac{99^2}{99^2-9900+5000}$$

(上海市“宇振杯”竞赛题)

思路点拨 (1) 由于 n^3+1996 的次数高于 $n+6$ 的次数, 所以, 通过变形将两个整式整除的问题转化为一个分式的问题来解决, 是解本例的关键; (2) 首尾配对, 考查一般情形, 把数值计算转化为分式的运算.



类似于分数, 当一个分式的分子的次数高于或等于分母的次数, 那么就可以将分式化为整式部分与分式部分的和, 分式的这种变形称为拆项变形, 是拆项变形的一种.



基础夯实

1. (1) 若使分式 $\frac{a^2-4}{1+\frac{1+3a}{2a}}$ 没有意义, 则 a 的值为 _____;

(2) 若 $a = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{a^2-2a-3}{a^2-7a+12}$ 的值等于 _____.

(2005 年天津市中考题)

2. 已知 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$, 则 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y} =$ _____.

(第 16 届“希望杯”邀请赛试题)

3. 已知 $\frac{a}{x+2}$ 与 $\frac{b}{x-2}$ 的和等于 $\frac{4x}{x^2-4}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(山东省竞赛题)

4. 学校用一笔钱买奖品, 若以 1 枝钢笔和 2 本日记本为一份奖品, 则可买 60 份奖品; 若以 1 枝钢笔和 3 本日记本为一份奖品, 则可买 50 份奖品. 那么, 这笔钱全部用来买钢笔可以买 _____ 枝.

(江苏省镇江市中考题)

5. 已知式子 $\frac{(x-8)(x+1)}{|x|-1}$ 的值为零, 则 x 的值为().

- A. ± 1 B. -1 C. 8 D. -1 或 8

(第 15 届江苏省竞赛题)