链接

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的目光穿过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间.

——布特勒

当你通过数学学习，感到自己头脑更加聪明，处事愈加条理公正，并能用数学的思想方法解决问题，探索自然和社会生活的种种奥秘时，你已经触摸到数学文化的脉搏了.

从蛮荒时代的结绳计数到现代通讯和信息时代神奇的数学，人类任何时候都受到数学的恩惠和影响，数学科学是人类长期以来研究数、量的关系和空间形式而形成的庞大科学体系.

走进美妙的数学世界，我们将一起走进崭新的“代数”世界，不断扩充的数系、奇妙的字母表示数、威力巨大的方程、不等式模型、运动变化的函数观念；

走进美妙的数学世界，我们将一起走进丰富的“图形”世界，拼剪、折叠、平移、旋转，在操作与实验活动中，发现这些图形的奇妙的性质，用它们设计精美的图案；

走进美妙的数学世界，我们将畅游在无边的“数据”世界，从图表中获取信息，并选择合适的图表来表达数据和信息；

走进美妙的数学世界，它将开阔我们的视野，它提醒我们有无形的灵魂，它改变我们的思维方式，它涤尽我们的蒙昧与无知.

诺贝尔奖获得者、著名物理学家杨振宁说：“我赞美数学的优美和力量，它有战术的机巧与灵活，又有战略上的雄才远虑，而且，奇迹的奇迹，它的一些美妙概念竟是支配物理世界的基本结构.”

西方把 153 称作“圣经数”. 这个美妙的名称出自圣经《新约全书》约翰福音第 21 章. 圣经数这一奇妙的性质是以色列人科恩发现的，英国学者奥皮亚杰对此作出了证明.

【例 1】 探究数字“黑洞”：“黑洞”原指非常奇怪的天体，它体积小，密度大，吸引力强，任何物体到了它那里都别想再“爬”出来，无独有偶，数字中也有类似的“黑洞”，满足某种条件的所有数，通过一种运算，都能被它吸进去，无一能逃脱它的魔掌，譬如：任意找一个 3 的倍数的数，先把这个数的每一个数位上的数字都立方，再相加，得到一个新数，然后把这个新数的每一个数位上的数字再立方、求和……，重

复运算下去，就能得到一个固定的数 $T=$________，我们称之为数字“黑洞”.

（青岛市中考题）

思路点拨 从一个具体的数操作，发现规律.

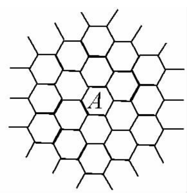
【例 2】 A、B、C、D、E、F 六个足球队进行单循环比赛，当比赛到某一天时，统计出 A、B、C、D、E 五队已分别比赛了 5、4、3、2、1 场球，则还没有与 B 队比赛的球队是（　　）.

A. C 队　　B. D 队　　C. E 队　　D. F 队

（第 18 届江苏省竞赛题）

思路点拨 用算术或代数方法解，易陷入困境. 用 6 个点表示 A、B、C、D、E、F 这 6 个足球队，若两队已经赛过一场，就在相应的两个点之间连一条线，这样用图来辅助解题，形象而直观.

【例 3】 用大小相同的正六边形瓷砖按如图所示的方式来铺设广场，中间的正六边形瓷砖记为 A，定义为第一组；在它的周围铺上 6 块同样大小的正六边形瓷砖，定义为第二组；在第二组的外围用同样大小的正六边形瓷砖来铺满，定义为第三组…按这种方式铺下去，用现有的 2005 块瓷砖最多能完整地铺满多少组？还剩几块瓷砖？

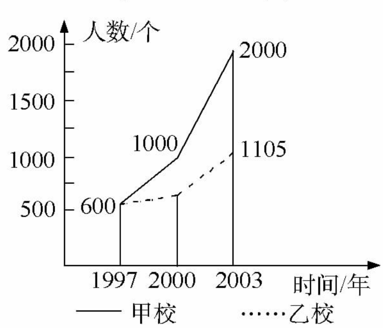


（第 16 届“希望杯”邀请赛试题）

思路点拨 探寻瓷砖铺设的规律，是解本例的关键.

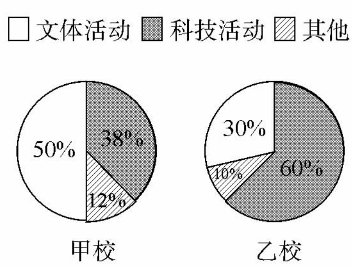
【例 4】 下面两幅统计图，如图①、图②，反映了某市甲、乙两所中学学生参加课外活动的情况. 请你通过图中信息回答下面的问题.

甲、乙两校参加课外活动的学生人数统计图
（1997—2003 年）



图①

2003 年甲、乙两校学生参加课外活动情况统计图



图②

链接

美国数学家斯蒂恩说：“如果一个特定的问题可以被转化为一个图形，那么思维就整体地把握了问题，并且能创造性地思考问题.”

数与形，以及数和形的关联与转化，这是数学研究的永恒主题，就解题而言，数与形的恰当结合，常有助于问题的解决.

(1)通过对图①的分析,写出一条你认为正确的结论;

(2)通过对图②的分析,写出一条你认为正确的结论;

(3)2003 年甲、乙两所中学参加科技活动的学生人数共有多少?

(2004 年贵阳市课改实验区中考题)

思路点拨 两幅不同的统计图提供了多种信息,可以根据不同统计图的特点提取信息.

【例 5】 在文字算式中,不同的文字代表不同的数字,相同的文字代表相同的数字.那么在"时代数学+时代数学+…+时代数学=好好好好好好"这样的式子中,最少需要几个"时代数学"才能使算式成立呢?

(2005 年俄罗斯萨温市竞赛题)

思路点拨 问题的实质是对一个数字相同的六位数进行分解,不妨考虑最简单情形.

学力训练

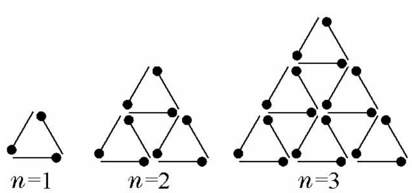
基础夯实

1. 用"✗"、"✘"定义新运算:对于任意数 a,b,都有 a✗$b=a$ 和 a✘$b=b$.例如,3✗2=3,3✘2=2,则(2006✘2005)✗(2004✘2003)=________.

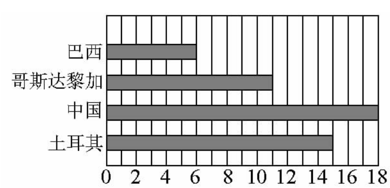
(2005 年北京市中考题)

2. 如图,是用火柴棍摆出的一系列三角形图案,按这种方式摆下去,当每边上摆 20(即 $n=20$)时,需要的火柴棍总数为________根.

(河北省中考题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 世界杯中,中国男足与巴西、土耳其、哥斯达黎加队同分在 C 组.赛前,50 名球迷就 C 组哪支球队将以小组第二名进入十六强进行竞猜,统计结果如图,认为

链接

人人都在或多或少的程度上要与采集和分析数据的事情打交道,统计学是"采集和分析数据的科学与艺术".基因学说的建立是受到 19 世纪中叶孟德尔豌豆试验所作的统计分析的启发,量子力学的奠基人之一薛定谔指出"在最近 60 年或 80 年中,统计方法和概率计算进入了一支又一支的科学".

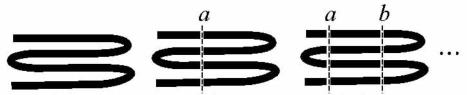
"思维之花"是世界上最美丽的花朵.数学思维常凝结在数学的一些重要思想方法之中,表现为严谨、灵动、富有想象力.解决数学问题,由沉思、迷茫到豁然开朗的那种巨大乐趣,是无数人痴迷数学的主要原因.

中国队将以小组第二名的身份进入十六强的人数占的百分比为________.

（第 14 届“希望杯”邀请赛试题）

4. 自然数 a、b、c、d、e 都大于 1，其乘积 $abcde=2000$，则其和 $a+b+c+d+e$ 的最大值为________，最小值为________.

5. 一根绳子弯曲成如图 1 所示的形状．当用剪刀像图 2 那样沿虚线 a 把绳子剪断时，绳子被剪为 5 段；当用剪刀像图 3 那样沿虚线 $b(b\parallel a)$ 把绳子再剪一次时，绳子就被剪为 9 段．若用剪刀在虚线 a，b 之间把绳子再剪 $(n-2)$ 次（剪刀的方向与 a 平行），这样一共剪 n 次时绳子的段数是（　　）.

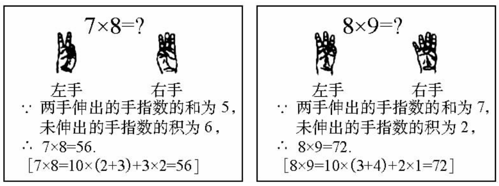


（第 5 题）

A. $4n+1$　　B. $4n+2$　　C. $4n+3$　　D. $4n+5$

（2005 年河北省中考题）

6. 法国的“小九九”从“一一得一”到“五五二十五”和我国的“小九九”是一样的，后面的就改用手势了．下面两个图框是用法国“小九九”计算 7×8 和 8×9 的两个示例．若用法国的“小九九”计算 7×9，左、右手依次伸出手指的个数是（　　）.



（第 6 题）

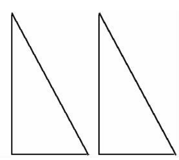
A. 2，3　　B. 3，3　　C. 2，4　　D. 3，4

（2005 年吉林省中考题）

7. 如果有 2003 名学生排成一列，按 1，2，3，4，3，2，1，2，3，4，3，2，…的规律报数，那么第 2003 名学生所报的数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 如图，有两张形状、大小完全相同的直角三角形纸片（同一个直角三角形的两条直角边不相等），把两个三角形相等的边靠在一起（两张纸片不重叠），可以拼出若干种图形，其中，形状不同的四边形有（　　）.



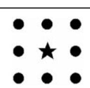
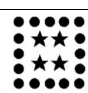
（第 8 题）

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

9. 观察下表，填表格后再解决问题：

(1) 完成下表：

表 1

序　号	1	2	3	…	n
图　形				…	……
●的个数	8		24	…	
★的个数	1	4		…	

(2) 试求第几个图形中“●”的个数与“★”的个数相等.

（2005 年河南省中考题）

链接

阅读是人们摄取知识的主要手段和认识世界的重要途径，现代及未来社会要求人们具有的阅读能力已不再只是语文阅读能力，而是一种以语文阅读能力为基础，包括外语阅读能力、数学阅读能力、科技阅读能力在内的综合阅读能力.

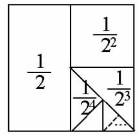
读数学书，要边读书边思考．对于概念，要抓住关键词句推敲，从概念间的相互联系中去掌握概念；对于公式、法则、性质等，要思考结论的准确意思、公式成立的条件、适用的范围；对于例题，要自己先动手做一做，再与书上的解答对照，找出知识上的缺陷、错误，并从中总结适用知识的规律.

10. 在数学活动中，小明为了求$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的值(结果用 n 表示)，设计如图甲所示的几何图形.

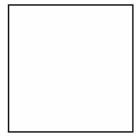
(1)请你利用这个几何图形求$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的值为________；

(2)请你利用图乙，再设计一个能求$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的值的几何图形.

(2005 年大连市中考题)



图甲

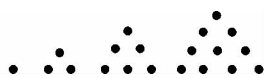

图乙

(第 10 题)

能力拓展

11. 勤奋智慧的中华民族在 4000 多年前就创造了十进制记数法，即“逢十进一”，如十进制数 $\overline{abc}=a\times10^2+b\times10+c$. 世界各地的记数方法中，除十进制以外，还有十二进制、六十进制、二进制等. 与计算机发展密切相关的二进制记数，就是“逢二进一”，如二进制数 101 等于十进制数________，在二进制加法中，$101+101=$________(结果仍用二进制表示).

12. 古希腊毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”，意思是数是宇宙万物的要素，他们常把数描绘成沙滩上的点子或小石子，根据点子或小石子的排列的形状把整数进行分类. 例如：1，3，6，10…这些数叫三角形数(如图). 则下列数 55、364、1830 中是三角形数的有________.


(第 12 题)

13. 若$\overline{k45k9}$是能被 3 整除的五位数，则 k 的可能取值有________个；这样的五位数中能被 9 整除的是________.

(“希望杯”邀请赛试题)

14. 观察下列图形的排列规律(其中△是三角形，□是正方形，○是圆)，□○△□□○△□○△□□○△□……，若第一个图形是正方形，则第 2008 个图形是________(填图形名称).

(2005 年辽宁省中考题)

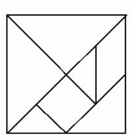
15. 3 个质数 p、q、r 满足 $p+q=r$，且 $p<q$，那么 p 等于(　　).

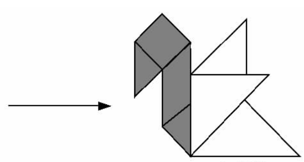
A. 2　　B. 3　　C. 7　　D. 13

(第 18 届江苏省竞赛题)

16. 用边长为 1 的正方形纸板，制成一副七巧板(如图①). 将它拼成“小天鹅”图案(如图②)，其中阴影部分的面积为(　　).

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{7}{16}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

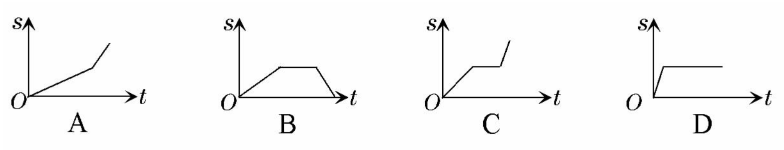

图①


图②

(第 16 题)

(2005 年陕西省中考题)

17. 某学生骑自行车上学，开始以某一速度匀速行进，中途由于自行车发生故障，停下修车耽误了几分钟. 为了按时到校，他加快了速度，但仍然保持匀速行进，结果准时到校. 他骑自行车行进的路程 s 与行进的时间 t 的关系有如下四种示意图，其中正确的是(　　).



18. 1 杯鲜橙汁售价 1.80 元. 现商家促销：买 1 杯鲜橙汁送奖券 1 张，3 张奖券兑换 1 杯鲜橙汁. 每张奖券的价值相当于(　　)元.

A. 0.3　　B. 0.45　　C. 0.5　　D. 0.6

(江苏省首届数学文化节基础闯关题)

19. (1)斐波那契是中世纪意大利数学家，他在研究兔子繁殖数量的问题时发现了一个奇妙的数列：1，1，2，3，5，8，13，…请按照该数列的规律写出紧接 13 的两个数________，具有这种规律的数列称为斐波那契数列.

(2)任选两个数 a，b，把它们作为第一、第二个数，按(1)中斐波那契数列的规律产生一个数列，证明：在此数列中，头 10 个数的和等于第 7 个数的 11 倍.

20. 能否很快写出 2005 个自然数，使它们的总和正好等于它们的乘积？

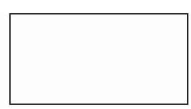
(2005 年俄罗斯萨温市竞赛题)

综合创新

21. 重排任一个三位数三个数位上的数字(三个数字不完全相同)，得到一个最大的数和一个最小的数，它们的差构成另一个三位数(允许百位数字为零). 再重复以上过程，问：重复 2003 次后所得的数是多少？证明你的结论.

(2004 年"*CASIO* 杯"武汉市选拔赛试题)

22. 如图是一张"3×5"(表示边长分别为 3 和 5)的长方形，现要把它分成若干张边长为整数的长方形(包括正方形)纸片，并要求分得的任何两张纸片都不完全相同.



(第 22 题)

(1)能否分成 5 张满足上述条件的纸片？

(2)能否分成 6 张满足上述条件的纸片？

若能分，用"$a\times b$"的形式分别表示出各张纸片的边长，并画出分割的示意图；若不能分，请说明理由.

(第 17 届江苏省竞赛题)

链接

自主的激情
自由的想象
大胆的怀疑
独立的批判
愿每个人
所闪现的创新的火花
缀满天空
哪怕只有萤火虫那样微弱的光芒

跨越 2
——从算术到代数

> 加里宁曾经说过:数学是锻炼思维的体操,体操能使你身体健康,动作敏捷;数学能使你的思想正确敏捷,有了正确的思想,你们才有可能爬上科学的大山.
>
> ——华罗庚

知识纵横

“算术”可以理解为“计算的方法”,而“代数”(algebra)可以理解为“以符号替代数字”,即“数学符号化”.著名数学教育家玻利亚曾说:“代数是一种不用词句而只用符号所构成的语言.”

用字母表示数是数学发展史上的一件大事,是由算术跨越到代数的桥梁,是人类发展史上的一个飞跃,也是代数与算术的最显著的区别.

字母表示数使得数学具有简洁的语言,能更普遍地说明数量关系,在列代数式(algebra expression)、求代数式的值、形成公式等方面有广泛的应用.

例题求解

【例 1】 (1)观察下列等式

$9-1=8$,

$16-4=12$,

$25-9=16$,

$36-16=20$,

……

这些等式反映出自然数间的某种规律,设 n 表示自然数,用关于 n 的等式表示出来:____________________.

(2)如图,在图 1 中,互不重叠的三角形共有 4 个,在图 2 中,互不重叠的三角形共有 7 个,在图 3 中,互不重叠的三角形共有 10 个,……,则在第 n 个图形中,互不重叠的三角形共有________个(用含 n 的代数式表示).

链接

华罗庚(1910—1985),我国现代有世界声誉的数学家,初中毕业后,靠自学成才,在数论、矩阵几何等许多领域中作出过卓越贡献.

纵观历史,数学的发展创造了数学符号,新的数学符号的使用又反过来促进了数学的发展,历史是这样一步步走过来的,并将这样一步步地继续走下去,数学的每一个进步都必须伴随着新的数学符号的产生.

在文明和科学的发展过程中,人类创造用符号代替语言、文字的方法,这是因为符号比语言、文字更简练、更直观、更具一般性.

从个别事物中发现一般性规律,这种研究问题的方法叫“归纳法”,是由特殊到一般的思维过程,是发明创造的基础.

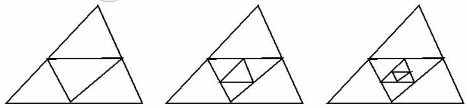


图 1　　图 2　　图 3

(2005 年重庆市中考题)

思路点拨　(1)在观察给定的等式基础上,寻找数字特点,等式的共同特征,发现一般规律;(2)从三角形个数规律或图形生成特点入手.

【例 2】 某商品 2000 年比 1999 年涨价 5%,2001 年又比 2000 年涨价 10%,2002 年比 2001 年降价 12%,则 2002 年比 1999 年(　　).

A. 涨价 3%　　B. 涨价 1.64%　　C. 涨价 1.2%　　D. 降价 1.2%

(2003 年"TRULY 信利杯"竞赛题)

思路点拨　设此商品 1999 年的价格为 a 元,把相应年份的价格用 a 的代数式表示,由计算作出判断.

【例 3】 计算

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2005}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2005}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)$$

(2005 年广西竞赛题)

思路点拨　直接计算复杂而繁难,注意括号内数式的联系,引入字母,将复杂的数值计算转化为简单的式的计算.

【例 4】 有这样的两位数,交换该数数码所得到的两位数与原数的和是一个完全平方数. 例如,29 就是这样的两位数,因为 $29+92=121=11^2$,请你找出所有这样的两位数.

(第 19 届江苏省竞赛题)

思路点拨　设原数为$\overline{ab}$,则新数为$\overline{ba}$,发现$\overline{ab}+\overline{ba}$的特点是解本例的关键.

链接

用字母表示数,有利于运用代数式揭示问题中的数量关系,便于找到数量的相依关系或相等不等关系,具有设元意识,会用代数式表示,是由算术习惯向代数过渡的重要步骤,是突破算术方法的定势的关键.

我们认识事物、探究问题的基本过程是:先研究具体对象,再归纳出一般规律,然后再运用这些规律去分析、研究、解决问题.

【例 5】 在右图中有 9 个方格，要求每个方格填入不同的数，使得每行、每列、每条对角线上三个数之和都相等，问：右图上角的数是多少？

?		
		19
	13	

（北京市“迎春杯”竞赛题）

思路点拨　虽然要求的只是右上角的数，但是题目的条件还与其他的数有关，因此，需恰当地引进不同的字母表示数，以便充分运用已知条件.

链接

有些问题涉及的量比较多，关系复杂，我们就需要引入不同的字母，便于把数量关系表示出来，在解题中我们不需（或不能）求出所有字母的值，只需求出关键的字母的值，这种方法我们称之为“设而不求”.

学力训练

基础夯实

1. 给出下列算式：

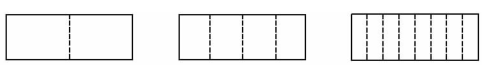
$$1^2+1=1\times2,$$
$$2^2+2=2\times3,$$
$$3^2+3=3\times4,$$
$$\cdots\cdots$$

观察上面一列算式，你能发现什么规律，用代数式子表示这个规律：________________.

（福州市中考题）

2. 将一张长方形的纸对折，如图可得到一条折痕，继续对折，对折时每次折痕与上次折痕保持平行，连续对折了 3 次后，可以得到 7 条折痕，那么对折 4 次可以得到________条折痕，如果对折 n 次可以得到________条折痕.

（南京市中考题）



第一次对折　　第二次对折　　第三次对折

（第 2 题）

3. 一种商品成本为 a 元，按成本增加 25%定出价格，后因库存积压减价，按价格的 92%出售，每件还能盈利________元.

（2005 年南宁市中考题）

4. 某同学上学时步行，回家时坐车，路上一共要用 90 分钟，若往返都坐车，全部行程只需 30 分钟，如果往返都步行，那么，需要的时间是________.

（河南省竞赛题）

5. 如果 a 是一个三位数，现在把 1 放在它的右边得到一个四位数，这个四位数是(　　).

A. $1000a+1$　　B. $100a+1$　　C. $10a+1$　　D. $a+1$

(2004 年重庆市竞赛题)

6. 某专卖店在统计 2003 年第一季度的销售额时发现，二月份比一月份增加 10%，三月份比二月份减少 10%，那么三月份比一月份(　　).

A. 增加 10%　　B. 减少 10%　　C. 不增不减　　D. 减少 1%

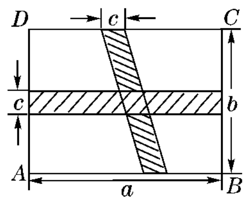
(河南省中考题)

7. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，横向阴影部分是长方形，另一阴影部分是平行四边形，依照图中标注的数据，计算图中空白部分的面积，其面积是(　　).

A. $bc-ab+ac+c^2$　　B. $ab-bc-ac+c^2$

C. $a^2+ab+bc-ac$　　D. b^2-bc+a^2-ab

(河北省中考题)



(第 7 题)

8. 已知 n 是整数，现有两个代数式：(1)$2n+3$，(2)$4n-1$. 其中，能表示“任意奇数”的(　　).

A. 只有(1)　　B. 只有(2)　　C. 有(1)和(2)　　D. 一个也没有

9. 从 1 开始，连续的奇数相加，和的情况如下：

$1=1^2$,

$1+3=4=2^2$,

$1+3+5=9=3^2$,

$1+3+5+7=16=4^2$,

$1+3+5+7+9=25=5^2$,

(1)请你推测出，从 1 开始，n 个连续的奇数相加，它们的和 s 的公式是什么？

(2)计算：

①$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$;

②$11+13+15+17+19+21+23+25$.

(3)已知 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=225$，求整数 n 的值.

(4)请你提出一个类似的问题，并探索其中的规律.

10. 有一张纸，第 1 次把它分割成 4 片，第 2 次把其中的 1 片分割成 4 片，以后每一次都把前面所得的其中一片分割成 4 片，如此进行下去，试问：

(1)经 5 次分割后，共得到多少张纸片？

(2)经 n 次分割后，共得到多少张纸片？

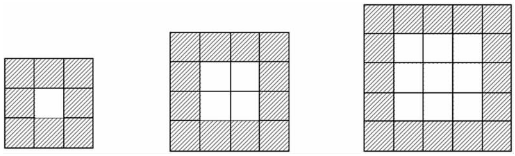
(3)能否经若干次分割后共得到 2003 张纸片？为什么？

(第 17 届江苏省竞赛题)

能力拓展

11. 如图，用同样规格的黑白两种正方形瓷砖铺设正方形地面，观察图形并猜想填

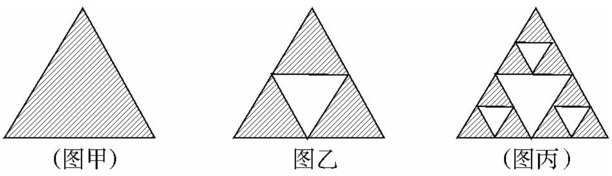
空：当黑色瓷砖为 20 块时，白色瓷砖为________块；当白色瓷砖为 n^2（n 为正整数）块时，黑色瓷砖为________块.



（第 11 题）

（2004 年宜昌市中考题）

12. 在图甲中取阴影等边三角形各边的中点，连成一个等边三角形，将其挖去，得到图乙；对图乙中的每个阴影等边三角形仿照先前的做法，得到图丙，如此继续．如果图甲的等边三角形面积为 1，则第 n 个图形中所有阴影三角形面积的和为________.



（第 12 题）

（第 18 届江苏省竞赛题）

13. 已知 17 个连续整数的和是 306，那么，紧接在这 17 个数后面的那 17 个整数的和为________.

（天津市竞赛题）

14. 已知 $x_1=2, x_{n+1}=1-\frac{1}{x_n}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $x_{2004}=$________.

（2004 年重庆市竞赛题）

15. 下列四个数中可以写成 100 个连续自然数之和的是（　　）.

A. 1627384950　　B. 2345678910　　C. 3579111300　　D. 4692581470

（第 17 届江苏省竞赛题）

16. 给出两列数：1，3，5，7，9，…，2001 和 1，6，11，16，21，…，2001，同时出现在这两列数中的数的个数为（　　）.

A. 199　　B. 200　　C. 201　　D. 202

（重庆市竞赛题）

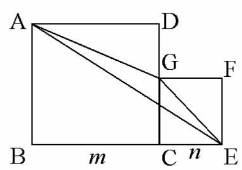
17. 老师报出一个 5 位数，同学们将它的顺序倒排后得到的 5 位数减去原数，学生甲、乙、丙、丁的结果分别是 34567，34056，23456，34956. 老师判定 4 个结果中只有 1 个正确，答对的是（　　）.

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

（第 16 届"五羊杯"竞赛题）

18. 如图，正方形 $ABCD$ 和 $CEFG$ 的边长分别为 m，n，那么 $\triangle AEG$ 的面积的值（　　）.

A. 只与 m 的大小有关　　B. 只与 n 的大小有关



（第 18 题）

C. 与 m,n 的大小都有关　　D. 与 m,n 的大小都无关

（第 19 届江苏省竞赛题）

19. 已知 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a_n}}(n=1,2,3,\cdots 2002)$，求当 $a_1=1$ 时，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{2002}a_{2003}$ 的值.

20. 在一次数学竞赛中，组委会决定用 NS 公司的赞助款购买一批奖品，若以 1 台 NS 计算器和 3 本《数学竞赛讲座》书为一份奖品，则可买 100 份奖品；若以 1 台 NS 计算器和 5 本《数学竞赛讲座》书为一份奖品，则可买 80 份奖品．问这笔钱全部用来购买计算器或《数学竞赛讲座》书，可各买多少？

（湖北省黄冈市竞赛题）

综合创新

21. 将 1～16 这 16 个整数填入 4×4 的正方形表格中，使得每行、每列、每条对角线上四个数之和都相等，如右图所示，恰有 8 个小方格中填的数被一个淘气的小朋友擦掉了，请你将擦掉的这 8 个数设法恢复出来.

		14	4
12			9
8	10		
	3	2	

（第 21 题）

22. 扑克牌游戏：

小明背对小亮，让小亮按下列四个步骤操作：

第一步　分发左、中、右三堆牌，每堆牌不少于两张，且各堆牌的张数相同；

第二步　从左边一堆拿出两张，放入中间一堆；

第三步　从右边一堆拿出一张，放入中间一堆；

第四步　左边一堆有几张牌，就从中间一堆拿出几张牌放入左边一堆．

这时，小明准确地说出了中间一堆牌现有的张数，聪明的读者，你认为中间一堆牌的张数是多少呢？

（2004 年河北省中考题）

创造的基石 3

——观察、归纳与猜想

链接

G. 玻利亚，美籍匈牙利人，现代著名数学家，他的《怎样解题》等著作，被誉为第二次世界大战后的数学经典著作之一.

> 要想成为一个好的数学家，你必须是一个好的猜想家，数学家的创造性工作的结果是论证推理，是一个证明，但证明是由合情推理、由猜想来发现的.
>
> ——G. 玻利亚

观察、实验、猜想是科学技术创造过程中一个重要的方法，通过观察和实验提出问题，再提出猜想和假设，最后通过推理去证明假设和猜想.

举世瞩目的“数学皇冠上的明珠”——哥德巴赫（德国数学家），就是从下面这些等式：$6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7$，$12=5+7$，$14=3+11$. 归纳得出：“任何不小于6的偶数均可以表示成两个奇质数的和.”

我国数学家陈景润于1973年证明了“$1+2$”，离解决哥德巴赫问题，即“$1+1$”仅一步之遥.

知识纵横

当代著名科学家波普尔说过：我们的科学知识，是通过未经证明的和不可证明的预言，通过猜测，通过对问题的尝试性解决，通过猜想而进步的.

从某种意义上说，一部数学史就是猜想与验证猜想的历史. 20世纪数学发展中巨大成果是，1995年英国数学家维尔斯证明了困扰数学界长达350多年的“费尔马大猜想”，而著名的哥德巴赫猜想，历经了两个半世纪的探索，尚未被人证实猜想的正确性.

当一个问题涉及相当多的乃至无穷多的情形时，我们可以从问题的简单情形或特殊情况入手，通过对简单情形或特殊情况的试验，从中发现一般规律或作出某种猜想，从而找到解决问题的途径或方法，这种研究问题的方法叫归纳猜想法，是创造发明的基石.

例题求解

【例1】 （1）用●表示实圆，用○表示空心圆，现有若干实圆与空心圆按一定规律排列如下：

●○●●○●●●○●○●●○●●●○●○●●○●●●○……

问：前2001个圆中，有______个空心圆.

（江苏省泰州市中考题）

（2）古希腊数学家把数1，3，6，10，15，21，…叫做三角形数，它有一定的规律性，则第24个三角形数与第22个三角形数的差为________.

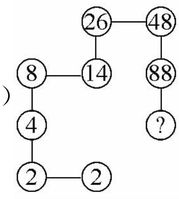
（舟山市中考题）

思路点拨　(1)仔细观察,从第一个圆开始,若干个圆中的实圆数循环出现,而空心圆的个数不变;(2)每个三角形数可用若干个数表示.

【例 2】　观察右图寻找规律,在"?"处填上的数字是(　　).

A. 128　　B. 136　　C. 162　　D. 188

(2005 年南宁市中考题)



思路点拨　从探讨数字间的关系入手.

【例 3】　化简$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}+1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}$

(第 18 届江苏省竞赛题)

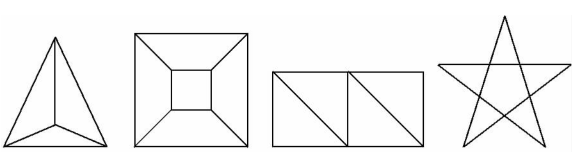
思路点拨　先考察 $n=1,2,3$ 时的简单情形,然后作出猜想,这样,化简的目标更加明确.

【例 4】　一楼梯共有 n 级台阶,规定每步可以迈 1 级或 2 级或 3 级,设从地面到台阶的第 n 级,不同的迈法为 a_n 种,当 $n=8$ 时,求 a_8.

(2005 年河南省竞赛题)

思路点拨　先求出当 $n=1,2,3,4$ 时,a_1,a_2,a_3,a_4 的值,解题的关键是,从某级开始,寻找 a_n 与 a_{n-1}、a_{n-2}、a_{n-3} 的联系.

【例 5】　图(a)、(b)、(c)、(d)都称作平面图.



(a)　(b)　(c)　(d)

图	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(1)数一数每个图各有多少个顶点,多少条边,这些边围出了多少区域,将结果填入表中(其中(a)已填好).

(2)观察表,推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系?

链接

观察是解决问题的先导,发现往往是从观察开始的,归纳与猜想是建立在细致而深刻的观察基础上的,解题中的观察活动主要有三条途径:

(1) 数与式的特征观察;

(2) 图形的结构观察;

(3) 通过对简单、特殊情况的观察,再推广到一般情况.

归纳总是与递推联系在一起的,所谓递推,就是在归纳的基础上,发现每一步与前一步或前几步之间的联系,更容易发现规律或证明通过归纳所猜测的规律的正确性.

(3)现已知某一平面图有 999 个顶点和 999 个区域,试根据(2)中推断出的关系,确定这个图有多少条边?

(“华杯赛”决赛试题)

思路点拨　从特殊情况入手,仔细观察、分析、试验和归纳,从而发现其中的共同规律,这是解本例的关键.

链接

历史上著名的数学家欧拉曾研究过正多面体,惊奇地发现了正多面体的顶点数(V)、面数(F)、棱数(E)存在一个奇妙的相等关系,史称“欧拉公式”,它不仅在数学方法上有所创新,而且推动了现代数学的重要分支——拓扑学的发展.

学力训练

基础夯实

1. 阳阳和明明玩上楼梯的游戏,规定一步只能上一级或二级台阶,玩着玩着两个人发现:当楼梯的台阶数为一级、二级、三级……逐步增加时,楼梯的上法依次为 1,2,3,5,8,13,21,…(这就是著名的斐波那契数列).那么上 10 级台阶共有________种上法.

(2005 年武汉市中考题)

2. 瑞士中学教师巴尔末成功从光谱数据$\frac{9}{5}$,$\frac{16}{12}$,$\frac{25}{21}$,$\frac{36}{32}$,…中得到巴尔末公式,从而打开了光谱奥妙的大门,请按这种规律写出第七个数据是________.

(2005 年福州市中考题)

3. 已知一列数:1,-2,3,-4,5,-6,7,…将这列数排成下列形式:

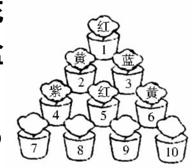
第 1 行	1				
第 2 行	-2	3			
第 3 行	-4	5	-6		
第 4 行	7	-8	9	-10	
第 5 行	11	-12	13	-14	15
…	…				

按照上述规律排下去,那么第 10 行从左边数第 5 个数等于______.

(2005 年淮安市中考题)

4. 把编号为 1,2,3,4……的若干盆花按图所示摆放,花盆中的花按红、黄、蓝、紫的颜色依次循环排列,则第 8 行从左边数第 6 盆花的颜色为________色.

(2005 年北京市海淀区中考题)

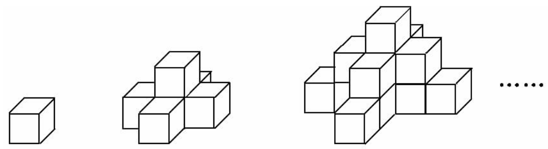


(第 4 题)

5. **在以下两个数串中：**
1，3，5，7⋯，1991，1993，1995，1997，1999 **和** 1，4，7，10，⋯，1990，1993，1996，1999 **同时出现在这两个数串中的数的个数共有(　　)个.**
A. 333　　B. 334　　C. 335　　D. 336

（“希望杯”邀请赛试题）

6. **图①是一个水平摆放的小正方体木块，图②、③是由这样的小正方体木块叠放而成，按照这样的规律继续叠放下去，至第七个叠放的图形中，小正方体木块总数应是(　　).**
A. 25　　B. 66　　C. 91　　D. 120



图①　　图②　　图③

（宁波市中考题）

7. **阅读材料，大数学家高斯在上学读书时曾经研究过这样一个问题，**$1+2+3+\cdots+10=$**？经过研究，这个问题的一般性结论是** $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，**其中** n **是正整数，现在我们来研究一个类似的问题：**$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=$**？**

观察下面三个特殊的等式：

$1\times2=\frac{1}{3}(1\times2\times3-0\times1\times2)$

$2\times3=\frac{1}{3}(2\times3\times4-1\times2\times3)$

$3\times4=\frac{1}{3}(3\times4\times5-2\times3\times4)$

将这三个等式的两边相加，可以得到 $1\times2+2\times3+3\times4=\frac{1}{3}\times3\times4\times5=20$.

读完这段材料，请你计算：

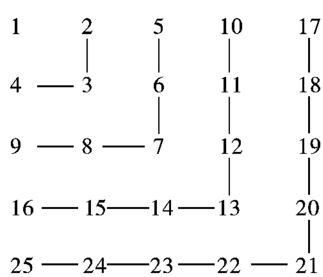
(1)$1\times2+2\times3+\cdots+100\times101$；

(2)$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$；

(3)$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$.

（2005 年四川省内江市中考题）

8. **自然数按下表的规律排列：**



链接

绘世界地图，不同的国家涂以不同的颜色来加以区分，简单的地图少用几种颜色，复杂的地图多用几种颜色. 19 世纪中期，有人通过观察猜想到：

任何复杂的地图最多只需四种颜色，就可以达到上述基本要求，这就是著名的“四色猜想”.

这个猜想从 1852 年提出到 1976 年解决，先后经历了 124 年之久，这一猜想的完全证明是 1976 年由美国伊利诺斯大学的阿佩尔教授和哈肯教授利用电子计算机，经过 1200 小时的运行而完成的，其间完成了约 200 亿个“逻辑”判断.

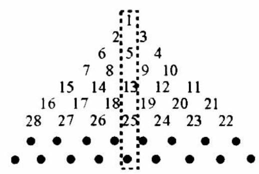
（1）求上起第 10 行，左起第 13 列的数；

（2）数 127 应在上起第几行、左起第几列？

（北京市“迎春杯”竞赛题）

能力拓展

9. (1)把数字按如图所示排列起来，从上开始，依次为第一行、第二行、第三行、……，中间用虚线围的一列，从上至下依次为 1、5、13、25、…，则第 10 个数为________.



（第 9 题）

（2005 年济南市中考题）

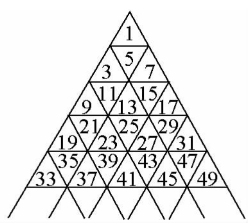
(2)将 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6}\cdots$ 按一定规律排成下表：

第 1 行	1
第 2 行	$-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}$
第 3 行	$-\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}\quad-\frac{1}{6}$
第 4 行	$\frac{1}{7}\quad-\frac{1}{8}\quad\frac{1}{9}\quad-\frac{1}{10}$
第 5 行	$\frac{1}{11}\quad-\frac{1}{12}\quad\frac{1}{13}\quad-\frac{1}{14}\quad\frac{1}{15}$
…	…

从表中可以看到第 4 行中，自左向右第 3 个数是 $\frac{1}{9}$，第 5 行中从左向右第 2 个数是 $-\frac{1}{12}$，那么第 199 行中自左向右第 8 个数是________，第 1998 行中自左向右第 11 个数是________.

（“希望杯”邀请赛试题）

10. 将奇数依顺序排列成如图所示的三角形数阵，从上到下称为行. 图中数 11 为第 3 行从左向右数的第 2 个数；数 29 为第 4 行、第 6 个数，那么，2003 为第________行、第________个数.

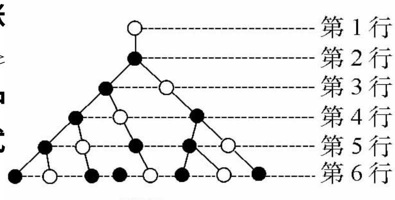


（第 10 题）

11. 如图是一个树形图的生长过程，依据图中所示的生长规律，第 15 行的实心圆点的个数等于______.

12. 池塘里有 3 张荷叶 A、B、C，一只青蛙在这 3 张荷叶上跳来跳去. 若青蛙从 A 开始，跳 $k(k\geqslant 2)$次后又回到 A，并设所有可能的不同跳法种数为 a_k，则当 $k>2$ 时，a_k 与 a_{k-1} 之间的关系式是________，a_8 的值是________.

（第 19 届江苏省竞赛题）



（第 11 题）