·高等院校师范类专业系列教材·

数学课程标准研修与教材分析

ANALYSE OF MATHEMATICAL CURRICULUM STANDARDS AND TEXTBOOKS

杨光伟 编著 裴娣娜 主审

浙江大学出版社
ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高等院校师范类专业系列教材

数学课程标准研修与教材分析

杨光伟 编著
裴娣娜 主审

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书由两大板块构成:第一块是对数学课程标准的研修,包括课程标准的时代背景,对课程标准一些内容的阐释,课程标准与数学教学,课程标准的专题探讨;第二块是对课程标准实验教科书的有关分析,包括中学数学教材研究,不同版本高中数学实验教科书的介绍,人教A版高中数学实验教科书以及浙教版初中数学实验教科书的部分内容解析。

本书可以作为高等师范院校数学与应用数学专业本科生教材,也可供在职中学教师和其他数学教学研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学课程标准研修与教材分析 / 杨光伟编著. —杭州:浙江大学出版社,2011.5
ISBN 978-7-308-08091-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①数学课—课程标准—研究—中学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第216076号

数学课程标准研修与教材分析

杨光伟 编著
裴娣娜 主审

责任编辑 黄兆宁
封面设计 联合视务
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开 本 710mm×1000mm 1/16
印 张 18.25
字 数 337千
版 印 次 2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-08091-0
定 价 35.00元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换
浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前　言

《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》、《普通高中数学课程标准(实验)》的相继颁布,以及相应的课程标准实验教科书的出版发行与使用,掀开了我国基础教育数学课程改革在新世纪的宏伟篇章。目前,新课程正在实践中不断深化,并昭示出强大的生命力。

新课程实验不仅给基础教育带来了令人鼓舞的变化,而且也对高等师范教育产生了积极的影响。作为培养未来教师的摇篮,许多高等师范院校在近几年来也不断地修订培养方案,调整课程设置,改进教学方式,大力推进教师教育改革,以提高人才培养的质量,使得师范专业的毕业生能够适应基础教育课程改革的需要,适应师范生专业发展的需要。

就是在这样的一个背景下,浙江师范大学与时俱进地开设了"课程标准与教材分析"这样一门课程,并作为师范专业本科学生的专业必修课,从 2008 年开始实行。该课程的目标在于:通过该课程的学习,师范生能够领会并掌握课程标准的基本理念,并在标准理念的指导下逐步形成分析教材、处理教材以及驾驭教材的能力,从而为教育实习、教学实践,以及今后走向教学岗位胜任新时期的教育教学工作奠定必要的基础。

应该承认,设立这样的一门课程是高等师范院校课程体系建设中出现的新事物,编写相应的教材也是一个崭新的、艰苦的工作。《数学课程标准研修与教材分析》既不是系统地研修课程标准,也不是系统地分析课程标准实验教科书。这有两个方面的原因。其一,数学课程标准研制组对"两套标准"进行了系统的解读(即《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)解读》、《普通高中数学课程标准(实验)解读》,分别由北京师范大学出版社、江苏教育出版社出版发行);其二,以人民教育出版社发行的数学课程标准实验教科书来说,相配套的教师教学用书对教科书也进行了细致的分析(相关书籍的电子版本可以在线阅读,并可下载)。试图在该课程中全面地研修课程标准以及实验教科书,既不现实,也无必要。因为,不论是对课程标准的理解,还是对实验教科书的把握,对于作为准教师的师范生而言都是一个不断深入的过程,转化为自己的行动实践更是一

个开拓创造的过程。

因此,我们在编写本书的时候,其基本的指导思想就是:不求面面俱到,力求促进读者的思考。考虑到数学课程的特色,本书与其他学科的“课程标准研修与教材分析”在体例上略有不同。在每一章首先给出学习目标,然后以目标为主线展开相关的内容,最后都设计了一个专题研修活动,并确立了相关内容与相应的建议。此外,为了加深学生对课程的理解,还在书中设计了许多“做一做”、“议一议”、“想一想”、“谈一谈”、“查一查”、“记一记”、“看一看”等小栏目。

实际上,我们在编写本书中所进行的一些探索,也是力图改变目前高校课堂中依然普遍存在的灌输教学模式。我们坚信:任何课程的学习过程绝不应只限于接受、记忆、模仿和练习。我们希望:使用本书的师生能够在课堂上有真正的交流与互动。

让我们在交流中集思广益,让我们在互动中深入思考。

因为,研修标准,需要我们深入思考;分析教材,更需要我们相互交流。

最后,需要说明的,本书在编写过程中引用了《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》、《普通高中数学课程标准(实验)》,以及《义务教育数学课程标准(修改稿)》其中的内容。为了行文的简洁,一律简称为《标准》,相信读者能够结合具体内容区分开来。另外,在本书的最后一章,我们有选择地分析了浙教版初中数学实验教科书,主要是考虑到部分师范毕业生将会到初级中学从事数学教学。该章也可以作为选学内容,根据实际教学课时,灵活机动地处理。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　　录

第一章　数学课程标准的时代背景 …… 1

第一节　数学以及数学教育的价值 …… 1
第二节　社会发展对数学课程的期望 …… 13
第三节　国际数学课程的改革经验 …… 16
第四节　我国数学课程的发展状况 …… 23

第二章　数学课程标准的内容与阐释 …… 33

第一节　初中数学学习内容的六个核心概念 …… 33
第二节　初中数学课程内容的四大领域 …… 44
第三节　高中数学课程标准的内容框架 …… 49
第四节　高中数学课程的基本内容 …… 53

第三章　课程标准与数学教学 …… 61

第一节　数学教学的本质 …… 61
第二节　教师角色的转变 …… 65
第三节　教学方式的改进 …… 69
第四节　评价方式的转变 …… 73

第四章　课程标准中的专题内容 …… 84

第一节　数学探究 …… 84
第二节　数学建模 …… 93
第三节　数学文化 …… 101

第五章　中学数学教材研究 …… 113

第一节　教材内容的选择原则 …… 113

第二节　教材编写的原则与体例 …… 121
第三节　教材内容的呈现 …… 125
第四节　教材的审定与选用 …… 131

第六章　数学课程标准实验教科书简介 …… 138

第一节　北师大版高中数学实验教科书 …… 138
第二节　人教 A 版高中数学实验教科书 …… 143
第三节　苏教版高中数学实验教科书 …… 147
第四节　湘教版高中数学实验教科书 …… 152

第七章　人教 A 版高中数学教材分析 …… 159

第一节　数学 1 …… 159
第二节　数学 2 …… 168
第三节　数学 3 …… 186
第四节　数学 4 …… 194
第五节　数学 5 …… 205
第六节　选修系列 1 与系列 2 …… 214

第八章　浙教版初中数学教材分析 …… 230

第一节　七年级 …… 230
第二节　八年级 …… 249
第三节　九年级 …… 260

参考文献 …… 284

后　记 …… 285

第一章

数学课程标准的时代背景



本章提要

制订数学课程标准，是贯彻《基础教育课程改革纲要（试行）》精神的重要举措，也是我国数学课程发展迈向现代化进程中的一个重要事件。围绕数学课程标准的开发与设计，数学课程标准研制组开展了一些奠基性的课题研究，获得了在新的时代背景下对于数学以及数学教育价值的一些新的认识，广泛调查并分析了社会发展对数学课程的时代期望，客观分析了我国数学课程的发展优势与固有局限，探讨了国际数学课程的改革特点与经验。通过本章的学习，应该达到如下的一些目标：

- 掌握数学的价值以及数学教育的价值；
- 理解社会发展对数学课程的期望；
- 了解我国数学课程的发展状况；
- 掌握国际数学课程的改革经验。

第一节　数学以及数学教育的价值

数学对于推动人类进步与社会发展，形成人类的理性思维，促进个体智能发展等多方面具有重要的作用。数学以及数学教育的价值内涵也随着时代的发展呈现出不断丰富的过程。

一、对数学价值的认识

认识数学的价值涉及一系列关于数学本质问题的思考，诸如“什么是数学”“数学有什么用”等等。而要回答这些问题，必须要从历史、社会、文化、传统等不同的角度来理解数学以及数学的意义。为了既说明问题，又节省篇幅，我们这里只从两个层面来认识数学的价值。

(一)数学为探索自然现象与社会现象的基本规律提供了重要的语言、工具与技术

1.作为语言的数学

早在400年前,享有“近代自然科学之父”尊称的伽利略就指出,展现在我们眼前的宇宙像一本用数学语言写成的大书,如果不掌握数学的符号语言,就像在黑暗的迷宫里游荡,什么也认识不清。

事实也确实如此,在自然科学的研究中,正因为使用了明白而简洁的数学语言,才使得自然科学的理论研究有可能走到很远的地方。在自然科学研究中,特别是在一些所谓“精密科学”的领域,不熟悉数学语言,就无法深入这些学科领域。

(1)数学语言的发展

数学语言伴随着数学的产生而产生、发展而发展,凝结着人类的智慧。

数学语言的发展大致包括如下方面:由各种计数法发展成为国际通用的记数法;阿拉伯人发明的代数术语言;牛顿—莱布尼茨创立微积分使用的极限语言;19世纪中出现的 ε-N,ε-δ 语言(标志着数学推理的算术语言);20世纪以来康托儿创立的集合论语言以及数理逻辑语言;20世纪纯粹数学处理高维空间图形所采用的同伦与同调等基本语言;以计算机程序化为特征的机器语言。

(2)数学语言的优越性

数学语言符号系统的优越性在于它的精确化与简约性。

人们在进行科学交往中需要用最少量明确的语言传达最大量、最准确的信息,数学语言没有含糊不清或者产生歧义的缺点。量子力学创始人波尔指出:“数学语言的精确化,给普通语言补充了适当的工具来表述一些关系,对这些关系用普通的语句是不精确的或者过于纠缠的。”实际上,当代物理学的基本规律——牛顿力学的运动规律,牛顿万有引力定律,电磁场原理,热力学第一、第二定律,统计力学原理,狭义相对论原理,广义相对论原理,量子力学定律,电子的相对论波动原理,规范场论等的表述,如果没有数学语言,是不可想象的。

所以,爱因斯坦也高度评价数学语言的作用,在他看来,理论物理学在描述各种关系时,要求尽可能达到最高标准的严格精确性,只有运用数学语言才能做到如此。

(3)数学语言是科学的通用语言

数学语言是各种科学的通用语言。虽然各种科学都要使用一定的、具有学科特点的符号表达系统,但其中所使用的数学语言是通用的。

在今天,不仅物理学、化学、生物学等自然科学要运用数学语言,而且社会科学和人文科学也加入到运用数学语言的行列。科学数学化、社会数学化的过程,乃是数学语言的运用过程。

这种各门科学对数学语言的运用，并不只是把数学语言作为研究的工具，而更是把数学语言作为表述自身科学理论的语言。可以说，如果没有数学这样一种科学的语言，就不可能有自然科学与社会科学的现代成就，也就不可能有对自然现象与社会现象的深入认识。正是在这样的意义上，马克思才说，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

(4)数学语言是世界的通用语言

数学语言还是世界各国各民族的通用语言。数学语言比任何语言都更具有世界性。

世界各国各地区都有自己的语言系统，甚至同一个地区的不同地域也都有自己独特的语言表达方式。但是，数学语言对于所有民族都是公共的，只要一看到数学符号，大家都知道是什么意义，而无需再翻译。

也正因为如此，世界各国一般都普遍重视“母语”、“外语”和“数学”主课，这三门课程实际上都是关于语言的，前两种属于日常用语，而数学则是科学用语。

一个公式胜过一打文字说明。数学语言的高度简约性与概括性，尽可能地消除了交往过程中的冗余信息，当之无愧地成为一种世界语言。人们甚至认为，数学语言应该是有智慧的生物的共同语言，不是有人建议把勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 作为星际生物间通讯的媒介语言吗？

更要看到的是，在现代社会，数学与社会的关联更加紧密。数学语言已经成为人类社会信息流通、信息交往的重要手段和重要媒介。使用数学语言可以使得人们在表达思想时做到清晰、准确、简洁，在处理问题时能够将问题中的各种因素之间的复杂关系表述得条例清楚、逻辑连贯、结构分明。

2.作为工具的数学

数学从它萌芽之日起，就为人们解决各种实际问题提供工具，只不过现代数学的巨大发展所带来的多样化成果极大地丰富了数学的“工具库”，拓展了数学的用武之地。数学不仅为人们的日常生活中的各种问题的解决提供常规的数学工具，也为现代科学技术的发展甚至是新技术领域的开辟提供专用的工具，更为各门学科中形形色色问题的解决以及理论基础的建构提供特有的工具。

(1)数学作为自然科学的工具

利用数学作为工具探索自然现象的例子，在科学史上可以说是俯拾皆是。仅仅以天文学的发展就能窥其一斑。哥白尼在提出日心说时，并没有多少观测证据，甚至在某种程度上，一些结果还不如原来的地心说准确，正是他依据数学的理论、运用数学的方法建立起新的天文学理论；开普勒则进一步在天文学上应用数学，他利用第谷、布拉赫的大量观测数据，通过大量的计算和数学分析工作，最终使得他抛弃了从古希腊人开始就一直认为行星具有圆形轨道的观点，

从而建立起新的行星运行理论;到了伽利略和笛卡儿那里,数学就成了一般的科学方法。



想一想

你可以再举一些科学史上成功使用数学工具的例子么?

(2)数学作为人文科学的工具

在众多人文学科中,运用数学最早、迄今最为成功、成果也最为显著的当推经济学。

经济学中研究商品的价格、供给、需求、利润等诸多问题,无不借助数学工具来定量刻画。数学在经济学中的成功运用,不仅解决了若干重大的经济问题,而且也推动了数理经济学的发展,特别是计量经济学的建立与发展。现代社会,运用数学工具对经济指标进行统计分析,确定各种经济要素之间的函数关系,以及对生产组织和资源分配进行优化配置,已经成为经济学家和经济管理人员寻求经济规律、降低成本、创造财富的常用手段。

即使在一些过去看来与数学难以"亲密接触"的人文学科,例如历史学、考古学,也成功运用数学工具改变了人们的看法。计量史学运用数理统计方法,分析人类历史上的人口、户籍、生产量、进出口贸易额等数据,建立数学模型进行解释,进而作出预测;而数量考古学利用碳-14 断代技术测定出土文物、古迹化石的年代,从而为最后的科学判断提供依据。



查一查

除了经济学、历史学、考古学以外,在其他的人文社会科学中,还有哪些使用数学工具而获得成功的?

(3)计算机使得数学工具更具威力

电子计算机的发明与使用是第二次世界大战以来对人类文明影响最为深刻的科技成就之一。电子计算机是数学与工程技术相结合的产物,而在其发展的每一个历史关头,数学都起到了关键的作用。

更为主要的是,计算机的出现与发展给数学研究与发展带来的重大变化,比望远镜、显微镜给天文学、生物学带来的影响更加广泛和深刻。人们看到的是,借助计算机技术,数学的工具价值更是如虎添翼。数学在计算机时代愈加充满活力,焕发出青春。

首先,计算机强大的计算能力极大地改变了传统的计算方式,极大地改变了数学工具运用的有效性。它使得过去由于太复杂、需要大量重复运算而只能"纸上谈兵"的问题都可以实现。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

其次，由于计算机技术与数学的“完美联姻”，在传统的逻辑演绎与实验研究之间产生了一种新的数学认识方法，这就是数学实验。当代对天文学中超新星的爆炸过程、地质学中地壳运动以及人口控制、人身健康、战争结果等，都无法在实验室对其本身进行实验，却可以借助计算机通过数学模型的模拟来对各种理论解释进行实际检验。

毫无疑问，在数学的未来发展历程中，计算机将继续发挥它巨大的威力，并不断地拓展数学的使用范畴，数学的工具价值必将在现代社会生活的各个领域得到淋漓尽致的展现。

3.作为技术的数学

把数学视为一种技术，是现代数学发展到今天人们对它形成的另一个新的认识。

(1)数学具有技术的品质是数学发展的结果

数学的技术品质的凸显是现代数学发展的必然结果。它表明社会经济、科学技术的发展与竞争已经不满足于数学只是通过为其他学科提供辅助性工具间接地为其服务，而是需要数学直接为社会增长财富，同时，它也表明社会对数学的倚重与需求都得以增强。

实际上，数学在早期的发展也表现出一种实用的技术，广泛应用到解决处理人类生活与社会活动中的各种实际问题。例如食物、牲畜、劳动工具以及生产资料的分配与交换，房屋、仓库等的建造，丈量土地，兴修水利，编制历法等。近代以来，随着数学的发展与社会文明的进步，数学逐渐深入到更一般的技术领域、科学领域以及人文社会科学领域，并在当代使得各门科学的数学化程度成为一种强大的趋势。

(2)数学具有技术的品质是数学应用的结果

人类从蛮荒时代的结绳计数，到如今用电子计算机指挥宇宙航行，无时无刻不受到数学的恩泽。今天，数学正以崭新的面貌与姿态活跃在现实世界和人们的生活之中。

数学在当代社会中的许多出乎意料的应用，越来越彰显出数学的技术品质。在当代，高新技术的基础是应用数学，而应用数学的基础是数学，也越来越成为不可否认的现实。尤其是随着计算机科学的迅猛发展，数学兼有了科学与技术的双重身份，现代科学技术也越来越表现为一种数学技术。当代高新技术的高精度、高速度、高自动、高质量、高效益等特点，无一不是借助数学模型与数学方法并通过计算机的控制来实现的。并且，由于运用计算机技术与手段，数学理论和数学模型借助计算机的强大功能直接“物化”为科技产品的核心部分。

可以毫不夸张地说，今日的数学，已经不甘于站在台后，而是大踏步地从科学技术的幕后走向了前台，直接参与创造生产价值。现代数学与计算机结合所

产生的威力无穷的“数学技术”,已经广泛渗透到与人类生存息息相关的各个领域,并成为一个国家综合实力的重要组成部分。

总而言之,数学的广泛应用使得数学科学自身已经成为现代社会中一种普遍适用的技术。数学具有技术的品质标志着数学的应用达到了一个崭新的阶段,也标志着数学在现代社会中的地位得到了进一步的提高。

(二)数学为人类进步与社会发展提供了重要的思想、方法与模式

1.作为思想的数学

数学思想应包括两个部分:论证的思想和公理化的思想。论证的思想是逻辑的论证,不是一般的归纳,对于一般的归纳出来而没有加以证明的结论只能作为猜想。公理化思想是对一些在实践中或理论中得到的一些零散的、不系统的思想和方法进行分析,找出一些不证自明的前提(公理),从这些前提出发,进行逻辑的论证,形成严密的体系。论证的思想和公理化的思想是数学最重要的特点之一,古希腊欧几里德从古巴比伦、古埃及在实践和理论证明中得到的零散的、不系统的数学思想和方法进行分析,找出一些不证自明的前提(公理),然后从这些前提出发,逻辑地演绎出严密的几何公理体系。现代分析数学体系也经历了这样的过程,从牛顿不太严密的微积分,经历了欧拉等一大批伟大的数学家发现分析数学的丰富的结论和方法,在这个基础上,到19世纪、20世纪之交,形成了一个严密的逻辑的数学分析体系。其他的大部分数学分支也都大致上经历了这样的过程。这种思维模式不仅对于数学的发展,而且对于科学的发展和人类思想的进步都起了重要的作用。西方的科学家和思想家常常以这种思维模式来思考和研究科学、社会、经济以至政治问题。从柏拉图、培根(F.Bacon,1561—1626)、伽利略、笛卡儿(R.Descartes,1596—1650)、牛顿、莱布尼兹一直到近代的很多思想家常常遵循这种思维模式。例如,牛顿从他发现的力学三大定律(他称之为“公理或运动定律”)出发,逻辑地建立了经典力学系统。美国的独立宣言是又一个例子,它的作者试图借助公理化的模式使人们对其确实性深信不疑。“我们认为这些真理是不证自明的……”,不仅所有的直角相等,而且“所有的人生来平等”。马克思从商品出发,一步步演绎出资本主义经济发展的过程和重要结论,实际上,这个过程也受到了公理化思想的影响。

实际上,欧几里德公理化的思想受了某种哲学思想的影响。古希腊时代,占主流的知识分子大都认为自然界是按照数学的规律运行的,所以非常重视数学,才由此形成对数学的整理、系统化,出现了欧几里得几何。后来文艺复兴笛卡儿的思想、希尔伯特统一的思想、罗素主义等,都受着某种哲学思想的指导。因此,他们不仅仅研究纯粹数学,而且描述了自然界。而我国古代社会和文化传统对于数学直至科学技术并不重视,只是作为编纂历书、工程、运输、管理等方面的计算方法。在这种背景下,我国古代可以提出一些很好的算法或朴素的

概念和思想，如位值制、负数、无理数、极限的思想，但没有上升到理论体系，在文化传统中不占主流地位，甚至明朝有的皇帝认为机器是奇技淫巧。近代的数学主要是向西方逐步学习的，而且并没有研究（至少没有认真研究）数学在思想方面的作用，数学仍然没有融入我国的文化传统。因此，我们讲授数学不只是数学本身及其应用，而是要让人们知道，如果不从数学在思维方面所起的作用来了解她，不学习运用数学思维方法，我们就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界，从而为人类作出更大的贡献，我们应该特别重视数学思想在人类进步和社会发展中的重要作用。



读一读

数学是研究空间形式和数量关系的科学，是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具。数学科学是自然科学、技术科学等科学的基础，并在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用。数学的应用越来越广泛，正在不断地渗透到社会生活的方方面面，它与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值，推动着社会生产力的发展。数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用。数学是人类文化的重要组成部分，数学素质是公民所必须具备的一种基本素质。

——摘自于《普通高中数学课程标准（实验）》

2.作为方法的数学

从方法论的角度看，数学作为人类认识世界与改造世界的方法是独特的。这种独特性集中体现在两个方面：数量分析与模式抽象。

（1）数学方法强调数量分析

数学所反映的并不是客观事物和现象的质的内容，而仅仅是量的属性。由于数学是从数量关系和空间形式方面来刻画并反映现实世界的内在规律，必然体现和揭示客观世界普遍存在的秩序、统一、结构等特征。客观世界的这些特征便在数学的概念上、数学图形的性质中、数学空间的结构里和数学知识的系统中得到反映。正如感受到自然界的美并用美丽的语言去讴歌她，这就是诗歌；用美丽的色彩去表现她，这就是绘画；而感受到存在于数和形的美，并以理智引导下的证明去表现她，这就是数学。

数学这部交响曲大体上由四个乐章组成，它们是精确数学、随机数学、模糊数学和突变数学，其发展的过程经历了初等数学、高等数学、现代数学这样的三个阶段。作为数学研究对象的数和形，在这三个阶段的含义是很不同的。初等数学阶段的数是常量，形是孤立的、简单的几何形体；高等数学阶段的数是变

量,形是曲线和曲面;而现代数学研究的对象是一般的集合、各种空间和流形,已很难区分数和形的具体范畴了。可以说,现代数学所具有公理化、结构化、统一化、泛函性、抽象性、应用性、非线性、不确定性等特点,已经极大地扩充了数学的研究对象,远远超出了原先理解的数量关系和空间形式的范围。也就是说,现代数学所研究的各种结构可由非数量的关系产生,而且可以导致不同于通常理解的空间形式。这也从另一个侧面极大地丰富了现代数学方法在数量分析上的多样性、广泛性。

从毕达哥拉斯学派的"万物皆数"的信念开始,数学方法就以数量关系的把握作为打开一切问题和科学大门的钥匙,时至今日,从定量分析入手到作出定性分析,使得数学方法成为人们心目中可靠性程度最高的方法。因为数量分析所舍弃的是事物或对象的物理特性,保留下来的是事物或对象的本质特征。许多不同学科领域的不同问题,表面看起来是完全不相同的,但是经过数量分析后却可以用同样的方式来表达,反映出它们之间所具有的共同性质,即它们的本质。

例如,$\mathrm{d}x/\mathrm{d}y=ky$,这是一个最简单的一阶微分方程。

这个微分方程可以用来描述放射性同位素的衰变过程(化学),可以用来描述某种细菌的繁殖过程(生物),可以用来描述某种条件下的热传导过程(物理),也可以用来描述某地区的人口变化过程(社会学)等等。

从数量关系的角度反映各种不同领域诸多问题的本质联系,体现出数学方法的普适性特点,从而也使得人类获得更加深刻的洞察力,促进人类对客观世界的理解程度。

(2)数学方法强调模式抽象

数学与其他学科相比,最主要的也是最基本的特点,就是它所研究的对象是抽象化的思维材料。物理、化学、生物、天文、地理等学科研究的对象是客观世界具体的物化形式或具体的运动形态。可以凭借感觉器官(视觉、听觉、嗅觉、触觉)来感知它们的实际存在,或者借助一定的仪器设备来观测。而数学对象,诸如点、线、面、体、群、环、域、方程、函数、算子、空间、向量等等,虽然可以找到它们形成的客观背景,但现实世界中并没有这些对象的实际存在,它们是人类思维的产物。由于数学对象是抽象的形式化的思想材料,这就决定了数学研究活动必然是以思辨的方式,也就是数学研究活动是人类抽象的思想活动。

模式抽象形成了当今普遍运用的数学模型方法。数学模型提供了人类看世界、看社会、看形形色色问题的特有"框架"。更重要的是,数学模型方法不仅能以适当的模式或模型去刻画现实对象,更能运用模型自身所具有的推理运算功能解决所提出的问题。也正因为如此,数学方法的有效性得到了公认。

对于数学模型,有的可以用现成的数学理论加以解决,有的没有现成的数

学成果可以利用,这就为数学家们提供了新的研究课题,由此现成新的数学理论,从而达到问题的解决。

应该强调的是,一些数学方法事实上已经超越了数学学科本身的范畴而上升为一般的科学方法层面。仔细分析一下数学学科,会发现它们都和某个哲学范畴或某对基本矛盾相联系。例如,微积分方法处理运动与静止,概率方法研究偶然与必然,数理逻辑方法处理原因与结果,拓扑方法研究局部和整体,计算数学方法讨论近似与精确,控制论方法处理可能与现实,等等。一般地说,重大的数学思想方法,都会反映某个哲学范畴或基本矛盾的数量方面。

3.作为模式的数学

数学作为一门抽象性学科,主要是研究理想化的“量化模式”。一般说来,数学模式是指按照某种理想化的要求(或实际可应用的标准)来反映(或概括地表现)一类或一种事物关系结构的数学形式。例如,自然数是数学史上产生最早的模式,三角形、圆、函数、导数、定积分等都是一些常见的数学模式。

(1)数学模式的特点

数学模式的外延极其广泛。大而言之,每一个数学分支理论(包括按公理化方法表现的各种数学理论结构体系)都可以看做一个大型数学模式;小而言之,一个数学公式、一条数学定理、一种计算方法、一类数学问题的合理提法和一般处理方式,甚至按科学抽象法则概括出来的一个数学概念,也都可以视为一个小型的数学模式。这些数学模式们所反映的已不是某一特定事物或现象的量化特征,而是一类事物在量的方面的共同特征。

数学模式具有一定的特性,具体表现在如下两个方面。第一,就模式这个概念而言,数学模式都必须具有精确性、一定条件下的普适性与逻辑上的演绎性。第二,就模式的研究活动而言,数学模式的研究必须遵循:真理性,以体现数学的科学性;形式化,以体现数学的抽象性;层次性和多样性,以体现数学的统一性。

(2)数学是模式的科学

1988年,美国著名数学家、美国数学联合会前主席斯蒂恩,在《科学》杂志上发表论文,提出“数学是关于模式的科学”,并阐述了模式对于数学的重要作用——数学家在数中、在空间中、在科学中、在计算机中以及在想象中寻找模式,数学理论解释模式间的关系;函数和映射、算子和映射将一类模式与另一类模式联系起来,产生持久的数学结构。数学应用则是利用这些模式“解释”和预测符合它们的自然现象。模式可以启发新的模式,常常产生模式的模式。通过这种方式,数学按照其自身的逻辑,从科学的模式开始,通过添加由此派生的所有模式而结束。

应该指出的是,由于“空间形式”、“数量关系”、“量”、“结构”均可纳入“模

式”这个概念，因此，众多的数学家和哲学家都认为“数学是模式的科学”这一命题体现了对数学价值的新的认识。



记一记

在你看来，数学是什么呢？

数学是_____

数学是_____

数学是_____

数学是_____

数学是_____

数学是_____

二、对数学教育价值的认识

数学教育是学校教育的重要构成部分，是基础教育的核心要素。基础教育的重要任务是全面实施素质教育，因此，认识数学教育的当代价值必须从素质教育的高度出发。

（一）数学教育应该向被教育者提供进一步学习以及终身发展所需的数学基础知识

数学知识的产生与发展，在一定程度上就是数学发展的一个缩影。数学知识的发展，其内在的一个特点就是新知识总是在原有知识基础之上的进一步拓展与深化，在知识的“抽象度”上越来越高，知识的应用范围越来越广。而知识与知识之间具有内在的逻辑关联，若干有关的知识点形成了“知识块”，若干“知识块”构成知识的网络。数学的知识体系随着人类认识的不断深化而不断拓展、不断完善、不断精致。在数学的知识体系中，其基本的构成细胞就是数学的基础知识。学校数学的基础知识，特别是那些经过精心挑选与组织的数学知识，例如初等数学的基本事实、概念、定义、定理、公式、法则与性质等，是数学几千年发展所积淀的宝贵的精神财富，它们不仅是数学发展的“原始胚胎”，也是学生进一步学习高级数学的基石与阶梯，它们所承载的基础性与发展性，对于现代社会公民的数学素养而言都是有价值的、必要的和必需的。

从数学的发展历程中，我们认识到，数学的基础知识不仅包括结果是什么，也还包括过程是什么，即问题是怎样提出的，概念是怎样形成的，结论是怎样探索和猜测到的，以及证明的思路和计算的想法是怎样形成的；而且在有了结论以后，还应该理解结论的作用和意义等。因此，让学生掌握必要的数学基础知识，就要让学生理解知识的来龙去脉，“知其然，也知其所以然”。只有学会分析想法，分析思考的脉络，又能理解来龙去脉，才能真正理解数学知识的本质，才

需要全本请访问 www.ertongbook.com