2011

全国硕士研究生入学考试辅导教程系列精品丛书

博实教育

全国硕士研究生入学考试辅导教程

数学分册(经济类)

全国硕士研究生入学考试辅导教程编审委员会 编著
童 武 主编

- 来自北京大学、清华大学和中国人民大学的最新权威信息
- 原命题组组长领衔编写，20多位一线专家深度审稿，倾力推出2011年考研整体解决方案
- 以题型训练为核心，精辟阐明解题思路，全面展现题型变化
- 明示命题原则与规律，把握考研命题脉搏

航空工业出版社

全国硕士研究生入学考试辅导教程系列精品丛书

全国硕士研究生入学考试辅导教程
数　学　分　册
经 济 类

全国硕士研究生入学考试辅导教程编审委员会　编著
童　武　主编

航空工业出版社
北　京

内 容 提 要

本书内容涵盖了考研数学经济类考试大纲要求考生掌握的所有知识。本书各章以基本概念、重要定理与性质、典型例题精解、历年考研真题链接、题型训练与自测形式编写。其中，基本概念部分阐明了大纲规定的基本概念；重要定理与性质部分重点陈述了大纲规定的重要定理及其性质，强化了基础知识的记忆；典型例题精解部分配有有代表性的例题分析，以达到强化实际演练、巩固复习成果的目的；历年真题链接让考生见证了历年考试试题，依据考点进行分类解析；题型训练与自测题，让考生进行强化模拟，提高实战能力。本书是参加考研数学经济类考试的广大考生的必备用书。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试辅导教程．数学分册．经济类／童武主编．—北京：航空工业出版社，2010.5

ISBN 978-7-80243-522-3

Ⅰ．①全…　Ⅱ．①童…　Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．①G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第082989号

全国硕士研究生入学考试辅导教程数学分册　经济类

Quanguo Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi Fudao Jiaocheng

Shuxue Fence Jingjilei

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号　100029)

发行部电话：010-64815615　010-64978486

北京建泰印刷有限公司印刷　　全国各地新华书店经售

2010年5月第1版　　2010年5月第1次印刷

开本：787×1092　1/16　　印张：35.625　　字数：954千字

印数：1—8000　　定价：52.00元

前　言

考研整体形势分析

众所周知,“考研热”从兴起到如今的愈演愈烈已是不争的事实.我国每年报考硕士研究生的人数持续快速增长.2010年全国考研人数已达到140万人,考研的激烈竞争在不断升温.事实上,成功之路有多条,毕竟条条大路通罗马,但为什么我国的青年一代会把绝大部分目光聚焦在考研这一条路上呢?笔者认为,其中的原因是多方面的,但最根本的原因在于,考研这条路是将广大青年学子的个人发展与国家、社会的发展趋势紧密有机地联系在一起的,有着高度的内在统一性.我国从20世纪80年代开始改革开放,对内以经济建设为中心,对外学习西方先进文明成果,至今已愈20年.我国经济发展所取得的成就已为世界瞩目.中国为什么能成功?关键的因素就在于人才.国家的发展需要大量高素质、高学历的人才,这就为当代大学生提供了一个鲜明的导向.而从每个青年人渴望成功、实现自我价值的角度讲,将个人的前途命运与国家、人民的需要结合起来,无疑是明智的选择.由此一来,考研成为广大青年学生的首选之路就不足为奇了.

考研数学(经济类)考点分析与复习备考策略

一、考研数学(经济类)考点分析

1. 考查基本概念、基本理论、基本方法

从原则上讲,试卷中的选择题、填空题基本上都是反映出题者考查考生“三基”的意图的.

例 **1**　当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点?(　　)

(A) 2;　　(B) 4;　　(C) 6;　　(D) 8.

(2005年数学四题二(7))

[解析]　由题意,不妨令函数

$$g(x)=2x^3-9x^2+12x.$$

由

$$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$$

可得函数 $g(x)$ 恰有两个驻点 $x=1$ 与 $x=2$.

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,有 $g(1)=5$,$g(2)=4$ 分别是函数 $g(x)$ 的唯一极大值与唯一极小值,且函数 $g(x)$ 的单调性如下表:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	从 $-\infty\nearrow$	极大值5	$\swarrow$	极小值4	$\nearrow$到 $+\infty$

由上表可知曲线 $y=g(x)$ 与水平直线 $y=4$ 恰有两个不同的交点,即当 $a=4$ 时,函数

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点. 所以选(B).

[点评] 本题考查考生对函数的零点、驻点、极值点等的掌握情况. 这部分内容属于较基础的范畴,但在考试中出现的频率较高,考生应该予以重视.

例 **2** 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$,求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(2005 年数学四题三(16))

[解析] 因 $\frac{\partial g}{\partial x}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'_x+yf'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_x=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x f'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'_y+f\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'_y$$

$$=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

故 $$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

[点评] 本题考查复合函数的二阶混合偏导数的知识,求解步骤是常规性的,原则上为送分题,但仍有部分考生因概念不清而失分.

关于复合函数求导的题目是比较基本的题型,要注意分清中间变量和自变量,尤其注意不要漏项.

例 **3** 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光. 电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行. 假设一游客在早八点的第 X 分钟到达底层候梯处,且 X 在[0,60]上均匀分布,求该游客等候时间的数学期望. (1997 年数学三题十二)

[解析] 由题设, X 在[0,60]上均匀分布,从而 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 Y 是游客的等候时间,则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0<X\leqslant 5,\\ 25-X, & 5<X\leqslant 25,\\ 55-X, & 25<X\leqslant 55,\\ 60-X+5, & 55<X\leqslant 60,\end{cases}$$

则由随机变量的数学期望得

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{60}(12.5+200+450+37.5)=11.67.$$

[点评] 本题考查随机变量的数学期望.随机变量的数学期望计算是最常见的考点,亦属"三基"类题目.

2. 考查重要定理、重要公式

数学中有不少重要定理和公式,考生必须在正确理解的基础上加以灵活运用.

例 **4** 设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

(2000 年数学四题八)

[解析] 本题考查考生对零点定理、积分中值定理、罗尔定理等的灵活运用.有以下两种较常见的做法:

证法 1 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$,显然 $F(0)=F(\pi)=0$.由题设知

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0,\quad 即\quad \int_0^\pi\cos x\mathrm{d}F(x)=0,$$

从而

$$F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=0.$$

由积分中值定理知,存在$0<\alpha<\pi$,使$\pi F(\alpha)\sin\alpha=0$.而$\sin\alpha\neq0$,所以$F(\alpha)=0$.综上可知

$$F(0)=F(\alpha)=F(\pi)=0.$$

由罗尔定理知,$\exists\xi_1\in(0,\alpha)$,$\xi_2\in(\alpha,\pi)$,使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,\quad 即\quad f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证法 2 反证法.首先由积分中值定理知,$\exists\xi_1\in(0,\pi)$,使$f(\xi_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$.然后假设$\xi_1$是$f(x)$在$(0,\pi)$内的唯一零点,则$f(x)$在$(0,\xi_1)$与$(\xi_1,\pi)$内不变号.而由$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$知$f(x)$在$(0,\xi_1)$与$(\xi_1,\pi)$内异号.不失一般性,设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$,则在$(\xi_1,\pi)$内$f(x)<0$.由已知$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$及$\cos x$在$[0,\pi]$内单调递减,有

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

矛盾.由此在$(0,\pi)$内除ξ_1外$f(x)$至少还存在一个零点ξ_2.结论得证.

[点评] 高等数学中零点定理、积分中值定理等概念性、技巧性都很强,需经过大量练习才能掌握并灵活运用.

例 **5** 一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的.假设每箱平均重 50 千克,标准差为 5 千克.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977.($\Phi(2)=0.977$,其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数)

(2001 年数学四题十一)

［解析］　由题设，设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位：千克)，n 是所求箱数，则由已知条件 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量. 设 n 箱的总重量为 T_n，则 $T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$. 又由题设，$E(X_i)=50,D(X_i)=25$，$i=1,2,\cdots,n$，从而

$$E(T_n)=n\cdot 50=50n,\quad D(T_n)=25n.$$

由中心极限定理知，T_n 近似服从参数为 $50n,25n$ 的正态分布，即 $N(50n,25n)$. 由条件

$$P(T_n\leqslant 5000)=P\left(\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$

可得出 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，即 $n<98.0199$. 所以最多可以装 98 箱.

［点评］　本题考查中心极限定理. 考生对中心极限定理应该理解和掌握，并能灵活运用.

3. 考查综合运用多个知识点

例 **6**　设函数 $f(x)$ 有导数，且 $f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$. 证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

(1994 年数学四题八)

［解析］　由已知 $F(x)$ 的被积函数中含 x，则令 $x^n-t^n=u$，从而

$$F(x)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u}{nx^{2n}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)\cdot n\cdot x^{n-1}}{2nx^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

证毕.

［点评］　这是一道综合题，主要考查定积分的变量代换、变上限积分求导、洛必达法则及导数定义.

例 **7**　设函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求 $f(t)$.

(1997 年数学三题八)

［解析］　由题设所给 $f(t)$ 中的二重积分的积分区域与被积函数可知，应采用极坐标来计算. 由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)\mathrm{d}r,$$

于是

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)\mathrm{d}r.$$

将此式两边对 t 求导，得

$$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\cdot 2tf(t)\cdot 2,$$

此即

$$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t).$$

此为一阶线性非齐次微分方程，解之得

$$f(t)=\left(\int 8\pi t e^{4\pi t^2}\cdot e^{-\int 8\pi t dt}dt+C\right)e^{\int 8\pi t dt}=\left(8\pi\int t dt+C\right)e^{4\pi t^2}=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}.$$

又由原方程知 $f(0)=1$，代入上式得 $C=1$. 所以

$$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}.$$

［点评］ 本题考查二重积分、变上限定积分求导、一阶微分方程的计算，涉及的知识点较多，难度较大. 综合题涉及的知识点较多，且如何将各个知识点在题设条件下有机地联系起来也是一个难点，考生只有在全面掌握所有知识点的前提下，多加练习，才能顺利解决此类题型.

二、考研数学复习备考策略

考试的性质决定了考试的难度. 在明确了这一点后，准备报考研究生的大学生们就需要进行长期艰苦细致的准备工作. 首先，要在心理上作好充分准备，既要明白研究生入学考试的难度，又要树立信心. 考试虽然很难，但对每个人都是公平的，只要付出了足够的努力，必然会有理想的结果，天道酬勤. 同时，每位报考者在迈出这一步的最初时刻，就要意志坚定、百折不挠，绝不要半途而废. 在长期的备考过程中，要时刻与忧虑、郁闷和退缩作斗争. 这些不仅是成功考取研究生的必经环节，更是对自己意志品质最好的锤炼. 相信经过这一关，对每个人将来迎接事业、生活中方方面面的挑战都是大有裨益的.

研究生入学考试是选拔性考试，当然重在考查考生的能力高低. 能力是建立在基础之上的，基本功不扎实，一切无从谈起. 从考试大纲来看，要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深、透、准. 尽管大学期间的期中期末考试基本反映了这一要求，但从程度上讲，远没有考研的要求高，相信大家都有同感. 通过大学的期末考试其实不难，甚至基本概念不甚清晰，知识点掌握不够通透也有可能取得较不错的成绩. 这是由于大学考试有其固定套路，即便考查相同的知识点，其题目的迷惑性、技巧性都远逊于研究生入学考试的题目. 因此，狠抓基础是一项必要的工作. 虽然很多考生可能会认为基础的东西学起来有点费力不讨好，短期收效不明显，但笔者再三强调，不可轻视基础，必须夯实到理解得入木三分的程度.

总而言之，考研准备工作的第一阶段（当然周期长短因人而异）应落脚于基础知识、基本概念的学习、巩固. 第二阶段的展开要以第一阶段为前提，不可急功近利，跨越第一阶段. 进入第二阶段，主要工作就是训练、提高能力. 能力反映在解答题目的准确性和速度上，反映在思路是否开阔、严密上，这就需要大量练习，认真钻研各种题型. 目前各类考研辅导书籍很多，选择好的参考资料是所有考生都要认真对待的问题. 就这一点而言，建议考生要多方了解信息加以选择. 在时间、精力允许的前提下，多多益善，但这也需要以质量做保证，否则囫囵吞枣读十本书，不如精读一本. 在选择参考资料时，既不要过分迷信所谓名师的书籍，也不要太过随意，不加甄别。在开始具体钻研考点、题目、技巧后，注意不必强迫自己所有遇见的题目都要做出来，总会碰到百思不得其解的问题. 钻研固然是好事，但钻牛角尖则费时费力，得不偿失，此时可以借助于解答，只要彻底弄懂，下次再遇到同样的或同类型的问题可以顺利解决就行了. 尤其要注意的一点是，学习一个阶段后要善于自我归纳总结，不断从各类题目中提炼出最本质、最精髓、最易于自己掌握，应用起来得心应手的东西. 学而不思则罔，进入题海只是手段，不是目的，最终要跳出题海，站在更高角度看待题海，这就需要不断深入和卓有成效的思考.

经过了前两个阶段，考生应该已经有了长足的进步，最后一个阶段当然是冲刺阶段. 此时每个考生都可能会感到疲惫，甚至厌学，出现这样的心理反差并不可怕，可怕的是不能正确对待，自我调整. 临近考试，心理压力增大，体力、精力下降，学会自我调节、自我减负是顺利通过

考试的有力保障.这一阶段应以查缺补漏、归纳总结、实战模拟为主要内容.其间,效率问题尤为重要,不能再过多投入精力于细枝末节,要着眼于以点带面,让所有知识点、难点在脑海中以系统化的状态呈现出来.实战模拟是不可或缺的,最好的模拟题当然就是历年的真题,但真题不只是按要求做完、纠错这么简单,应该作为重点对象反复研究、体会,从中发现规律性的东西.除此之外,多做一些其他的模拟试题,以强化熟练程度、解题技巧也是有益的.眼下市面上模拟试题集鱼龙混杂,质量参差不齐,考生要细心选择,以免被误导,否则既会浪费时间精力,又会扰乱思路.

德国大数学家高斯曾说过:“数学是科学的皇后.”毫无疑问,数学是对人类思维能力要求最高的学科,它不仅范围广、内容多,而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的最高境界.全国硕士研究生入学考试数学一科是考查考生的数学功底、思维能力,并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验.既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃.数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块,经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识.无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲.自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的.大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据.考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便有的放矢.大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力.同时要注意,不光应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至上一年的大纲,从比较中发现其变化.往往新增的知识点或考点会体现在今年的试卷中.大纲中删减的内容应果断舍弃.举几个例子如下:2003年数学一增加了“几何型概率”,删除了“两曲线的交角”和“包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组”;数学二增加了“实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角矩阵”;数学四增加了“常微分方程”;数学试卷满分调整为150分.2004年数学二增加了“多元函数微积分学”;将选择题与填空题考分比例由原来的48分增加到56分等.这些考研大纲中修订变化的部分无一不在当年的考试题中反映了出来.考生需在第一时间掌握好大纲,在着手复习后,也应不断对照大纲进行研究体会,直至临考.

复习备考的过程,前文已有所述,数学考试的准备过程基本上也在其框架内,即分阶段、分步骤进行.基础扎实的考生可以节省时间复习基础知识,基础薄弱的考生则应在基本概念、理论、方法上花大力气,紧扣大纲,全面系统地复习大学时期的教材.大学教材中的习题通常较为基础,难题、综合性题目较少,这些方面的训练放在能力提高阶段解决.数学学科本身具有很强的概念性、技巧性,因而对任一个难点或疑点,考生不能满足于一遍两遍就解决问题,必须反复琢磨推敲,不断归纳、提炼,以形成自己的一套经验、观点.参考书、辅导班等从本质上讲皆属于外因,个人的认识程度、水平才是内因,考生要始终坚持立足于自身,不能依赖甚至把宝押在某本资料或某个考研辅导班上.

关于临场应试经验或技巧,笔者认为最重要的是心理素质要过硬.经过长期准备之后,考生的大体水平已不会在短时间内有大的变动,能否考出好成绩,甚至超水平发挥,基本上取决于临场发挥.考前最后阶段,一方面考生要学会心理状态调节,一方面在实战模拟中培养考场应变能力.题目有难有易,会做的一定要拿分,不会的尽量多答出一些可以拿分的环节,争取结果最优,千万不可患得患失,影响大局.在实战模拟的每一套模拟题解答中,学会估计真正应试

中自己会遇到哪些困难，思想准备充分了，才能临阵不乱. 实际考试中，预料不到的困难也时有发生. 这大体上分为两种情况：一种是非技术性因素，即与知识水平、考题难易无关的因素，比方说答题时看错题目或漏答题目，考试用具出现差错等，这些虽属于低级失误，却可能造成不堪设想的后果，考生应在考前充分考虑周到，坚决杜绝；另一种就是纯技术性因素了，如遇见无从下手的题目或似曾相识但也不知所措的题目，此时考生唯一要做的是平心静气，积极思考应对方法，切不可自乱阵脚. 事实上，考试意图中已包含了考查考生应付困难的能力，而不仅考查考生的知识水平. 总而言之，知识水平高，应付困难能力高者必然会脱颖而出.

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料，其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势. 因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分.

全国硕士研究生入学考试辅导教程编审委员会
2010 年 5 月于北京

第一部分　高 等 数 学

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

【大纲基本要求】

（1）理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系.

（2）了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

（3）理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及图形，了解初等函数的概念.

一、基本概念

1. 函数的概念

定义 **1**　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数值 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定且唯一的值与它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

值域　当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

确定一个函数的两个要素：定义域和对应法则.

注　当且仅当两个函数的定义域和对应法则都完全相同时，这两个函数才表示同一函数.

2. 反函数的概念

定义 **2**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于值域 W 中的任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故通常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注　（1）$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合；$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

（2）只有一一对应的函数才有反函数.

（3）函数在其严格单调区间内是一一映射，故存在反函数. 例如 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在反函数 $y=\sqrt{x}$，在 $(-\infty,0)$ 内存在反函数 $y=-\sqrt{x}$.

3. 初等函数

3.1　基本初等函数

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记，在此就不一一复述了.

(1) 常数函数 $y=C\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$(x 的取值范围由常数 μ 确定).

(3) 指数函数 $y=a^{x}\ (x\in\mathbf{R})$,其中 a 是常数且 $a>0,a\neq1$.

(4) 对数函数 $y=\log_{a}x\ (x\in(0,+\infty))$,其中 a 是常数且 $a>0,a\neq1$.

(5) 三角函数:

正弦函数 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$;

余弦函数 $y=\cos x\ (x\in\mathbf{R})$;

正切函数 $y=\tan x\ \left(x\in\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right)$;

余切函数 $y=\cot x\ (x\in\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$;

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}\ \left(x\in\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right)$;

余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}\ (x\in\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$.

(6) 反三角函数:

反正弦函数 $y=\arcsin x\ (x\in[-1,1])$;

反余弦函数 $y=\arccos x\ (x\in[-1,1])$;

反正切函数 $y=\arctan x\ (x\in(-\infty,+\infty))$;

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x\ (x\in(-\infty,+\infty))$.

3.2 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_φ,并记 $D=\{x\,|\,x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$,则当 $x\in D$ 时,由 $y=f[\varphi(x)]$确定的函数称为 f 与 φ 的复合函数,而 u 称为中间变量.

3.3 初等函数

定义 4 由基本初等函数经过有限次代数运算和复合所构成的可用一个式子来表示的函数称为初等函数.

4. 其他常用函数

(1) 双曲函数:

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\ (x\in\mathbf{R})$;

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ (x\in\mathbf{R})$;

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数 $y=[x]\ (x\in\mathbf{R})$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

(4) 狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

注 符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数.分段函数不是初等函数.

二、函数的四个基本特性

有界性　若存在 $M>0$，使得对任一 $x\in I\subset D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$（$f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$），则称 $f(x)$ 在 I 上有界(有上界或下界)；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

注　无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大.

单调性　对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加(或严格单调增加)；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少(或严格单调减少).

奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

注 **1**　(1) 奇(偶)函数的定义域一定关于原点对称；

(2) 奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称；

(3) 对于奇函数有 $f(x)+f(-x)=0$，对于偶函数有 $f(x)+f(-x)=2f(x)$.

注 **2**　两个奇或偶函数运算具有以下结论：

奇±奇=奇；　偶±偶=偶；　奇$\overset{\times}{\div}$奇=偶；　偶$\overset{\times}{\div}$偶=偶；　奇$\overset{\times}{\div}$偶=奇.

周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，其中 T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注　(1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax+b)$ $(a>0)$ 的周期.

(2) 若 T_i 是 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的周期，则 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$ 及 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 经初等运算所得函数的公共周期.

(3) 常见的周期函数：$\sin x$，$\cos x$ 的周期均为 $T=2\pi$；$\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$ 的周期均为 $T=\pi$.

三、典型例题精解

1. 判断两个函数是否相同

例 **1**　下面(　　)中两函数相同.

(A) $y=x$，$y=\arctan(\tan x)$；　　(B) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，$y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$；

(C) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$，$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$；　　(D) $y=\ln x^2$，$y=2\ln x$.

解　根据两函数相同的两个要素知，答案应为(B).

2. 函数符号的运用

解这类题关键是对函数概念，特别是对符号 f 的正确理解与切实掌握.

例 **2**　设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解法 1　令 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,将 $h(x)$ 拼凑成以 $g(x)$ 表示的代数式得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

令 $t=g(x)=x+\dfrac{1}{x}$,则 $f(t)=t^2-2$,因而 $f(x)=x^2-2$.

解法 2　变量代换法.

令 $u=x+\dfrac{1}{x}$,解出 $x=\dfrac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}$,代入原式得

$$f(u)=\frac{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}=u^2-2,$$

故 $f(x)=x^2-2$.

3. 函数定义域的求法

几种简单函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

(2) $y=\sqrt[2n]{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,其中 $n\in\mathbf{N}$;

(3) $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$;

(4) $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$;

(5) $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

(6) $y=\arcsin x$(或 $\arccos x$)的定义域为 $[-1,1]$.

例 3　求下列函数定义域:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\lg(3x+1)}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\log_{\sqrt[3]{x^2-5}}[\log_2(25-x^2)]$;

(3) $f(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

解　(1) y 的定义域应是三个复合函数定义域的交集. 由

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1-x}{2}\right|\leqslant 1,\\ 4x-x^2\geqslant 0,\\ 3x+1>0,\\ 3x+1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ x>-\dfrac{1}{3},\\ x\neq 0\end{cases}$$

知,函数的定义域为 $(0,3]$.

(2) 因为

$$\begin{cases}x-1>0,\\ \sqrt[3]{x^2-5}>0,\\ \sqrt[3]{x^2-5}\neq 1,\\ 25-x^2>0,\\ \log_2(25-x^2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ x^2-5>0,\\ x^2-5\neq 1,\\ 25>x^2,\\ 25-x^2>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ x>\sqrt{5}\text{ 或 }x<-\sqrt{5},\\ x\neq\pm\sqrt{6},\\ -5<x<5,\\ -2\sqrt{6}<x<2\sqrt{6},\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $(\sqrt{5},\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},2\sqrt{6})$.

(3) 该函数定义域为$(-\infty,+\infty)$，注意不是$x\neq0$. 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以$x=0$是被积函数的第一类间断点，因此$\dfrac{\sin x}{x}$在包含$x=0$的区间内积分有意义.

例 4 设函数$f(x)$的定义域为$(0,1)$，符号$[x]$表示不超过x的最大整数. 试求$f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$的定义域.

解 令$\varphi(x)=\dfrac{[x]}{x}$，因$f(x)$的定义域为$0<x<1$，故$f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)=f[\varphi(x)]$的定义域为

$$0<\varphi(x)=\frac{[x]}{x}<1.$$

为使$\dfrac{[x]}{x}<1$，必有$x>0$且$x\neq1,2,3,\cdots$. 又因$0<x<1$时$[x]=0$，为使$\dfrac{[x]}{x}>0$，必有$\{x|x<0$ 或 $x\geqslant1\}$. 所以，所求的定义域为$\{x|x>0$ 且 $x\neq1,2,3,\cdots\}$与$\{x|x<0$ 或 $x\geqslant1\}$的交集，即所求定义域为$\{x|x>1$，且 $x\neq2,3,\cdots\}$.

例 5 从一块半径为R的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(见图 1-1)，留下的中心角为φ. 试将漏斗容积表示成中心角φ的函数，并求其定义域.

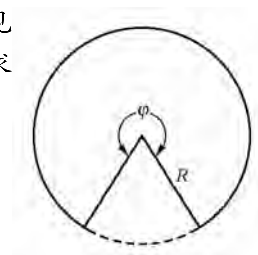

图 1-1

解 设做成的漏斗高为h，底半径为r，则体积为

$$V=\pi r^2h/3.$$

这里有两个变量r与h，但它们不是独立的，由圆铁片的半径R联系着：

$$R^2=h^2+r^2,\quad 即\quad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

于是V可表示成r的函数，故要将V表示成φ的函数只需求出r与φ的关系.

由$2\pi r=R\varphi$得$r=R\varphi/2\pi$，所以

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(2\pi),$$
$$V=\pi r^2h/3=R^3\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(24\pi^2).$$

又容积$V>0$，故$4\pi^2-\varphi^2>0$，即$\varphi^2<(2\pi)^2$，亦即$-2\pi<\varphi<2\pi$. 又φ表示留下的中心角，故$\varphi>0$. 所求定义域$0<\varphi<2\pi$.

注 实际问题中的函数定义域须由实际条件许可的范围来确定，而不只是根据它的分析表示式确定.

4. 关于函数特性的判别法

例 6 证明：函数$f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

证 利用不等式$2|ab|\leqslant a^2+b^2$，有

$$|f(x)|\leqslant1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant2,$$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

注 所谓$f(x)$有界，一定要指出x的变化范围及一个正数M，例如"问：$f(x)=\dfrac{1}{x}$有界吗?"就没有意义. 事实上，当$x\in[1,+\infty)$时，由于$|f(x)|=\dfrac{1}{|x|}\leqslant1$，故$f(x)$在区间$[1,+\infty)$

上有界;而当 $x\in(0,1)$ 时,则 $f(x)$ 无界.

例 **7** 设函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$,那么函数 $f(x)$ 是(　　).

(A) 有界函数;　　(B) 单调函数;　　(C) 周期函数;　　(D) 偶函数.

解　$\cos x$ 是偶函数,于是 $e^{\cos x}$ 也是偶函数.而 x 与 $\sin x$ 都是奇函数,它们乘积为偶函数.故 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是两个偶函数相乘,必为偶函数.本题答案为(D).

注　选(A),(C)都不对,因为虽然 $\sin x$, $\cos x$ 都是有界的周期函数,但 $x\sin x$ 就不再是有界函数,也非周期函数.

例 **8** 设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$(其中 n 是确定的自然数),则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 无界函数;　　(B) 有界但非周期函数;

(C) 单调函数;　　(D) 以 $2n\pi$ 为周期的函数.

解　本题答案为(D).这里需要指出的是,在 $f(x)$ 的表达式中,n 是常数,是一个确定的值,所以 $\sin\dfrac{x}{n}$ 前面的正负号是确定的.

例 **9** 设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数,又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数.试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

解　因为 $F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t$,所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x).\end{aligned}\tag{①}$$

解法 1　由式①有

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x\mathrm{d}t\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 单调减少,当 $x\geqslant 0$ 时,$0\leqslant t\leqslant x$,从而 $f(t)-f(x)\geqslant 0$,于是 $F'(x)\geqslant 0$;当 $x<0$ 时,有 $F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$,$x\leqslant t<0$,而此时 $f(x)-f(t)\geqslant 0$, $x^{2n-1}<0$,所以 $F'(x)\leqslant 0$.因此,若 $f(x)$ 单调减少,则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加,在 $(-\infty,0]$ 上单调减少.

(2) 若 $f(x)$ 单调增加,则类似讨论可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少,在 $(-\infty,0]$ 上单调增加.

解法 2　利用积分中值定理式①可表示为

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)],$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调增加,当 $x>0$ 时,则 $0<\xi<x$,而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$,于是 $F'(x)\leqslant 0$;当 $x=0$ 时,则 $F'(x)=0$;当 $x<0$ 时,则 $x<\xi<0$,而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$,于是 $F'(x)\geqslant 0$.因此,若 $f(x)$ 单调增加,则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少,在 $(-\infty,0]$ 上单调增加.

(2) 若 $f(x)$ 单调减少,则类似可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加,在 $(-\infty,0)$ 上单调减

少.

注　判断 $f(x)$在 x 上单调性的常用方法：

(1) 利用单调性的定义；　　(2) 利用导数 $f'(x)$.

例 **10**　设 $f(x)$在包含原点的区间上可积，试由 $f(x)$的奇偶性讨论函数 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

解　设 $f(x)$为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，于是

$$\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-z} \int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)=-\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^x f(z)\mathrm{d}z=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\varphi(x),$$

所以，当 $f(x)$为偶函数时，$\varphi(x)$是奇函数.

同理可证当 $f(x)$为奇函数时，$\varphi(x)$是偶函数.

注　若 $f(x)$连续，则 $\varphi(x)$是 $f(x)$的一个原函数. $f(x)$的任一个原函数都可写成 $\varphi(x)+C$ (C 为任意取定的常数)的形式，且当 $f(x)$为偶函数时，$\varphi(x)$是奇函数，但 $\varphi(x)+C$ ($C\neq 0$) 都不是奇函数.

例 **11**　设 $f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 是常数，且$|a|\neq|b|$. 试证：$f(x)$是奇函数.

证　在所给方程中，用$\frac{1}{x}$代替 x 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

联立原方程，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

又$|a|\neq|b|$，所以

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right),$$

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x),$$

即 $f(x)$为奇函数.

例 **12**　设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的偶(奇)函数，且图形关于 $x=2$ 对称. 证明：$f(x)$为周期函数，并求周期 T.

分析　要证 $f(x)$为周期函数，只需设法找到 $T>0$，使 $f(x)$满足关系式 $f(x+T)=f(x)$ 即可.

证　(1) 若 $f(x)$为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$. 又 $f(x)$关于 $x=2$ 对称，所以

$$f(2+x)=f(2-x).$$

以 $x-2$ 代替 x 得

$$f(x)=f(4-x),$$

再用$-x$ 代替 x 得