



2014

最新版

全国成人高考专用教材

QUAN GUO CHENG REN GAO KAO
ZHUAN YONG JIAO CAI

数 学 文史类

高中起点升本、专科

- ▶ 全国成人高考试题研究组 审定
- ▶ 中国人民大学 黄一顺 主编
- ▶ 中国成人教育辅导中心 组织

超值
赠送

全套成考学习软件

三人行成考通关助手



电脑版



手机版



知识出版社

第一部分 代数

第一章 集合和简易逻辑

学习要求

1. 了解集合的意义及其表示方法. 了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法. 了解符号 $\subseteq, \supseteq, =, \in, \notin$ 的含义, 并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.
2. 了解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念.

一、集合的基本概念

1. 集合及其有关基本概念

集合: 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合, 一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

元素: 集合里的各个对象叫做集合的元素, 一般用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

$a \in A$: 表示 a 是集合 A 的元素, 读作“ a 属于 A ”.

$a \notin A$: 表示 a 不是集合 A 的元素, 读作“ a 不属于 A ”.

有限集: 含有有限个元素的集合叫做有限集.

无限集: 含有无限个元素的集合叫做无限集.

空集: 不含有任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$.

2. 常见的几种数集

自然数集: 全体自然数的集合叫做自然数集, 通常记作 $\mathbf{N}$. 注意 $0 \in \mathbf{N}$.

整数集: 全体整数的集合叫做整数集, 通常记作 $\mathbf{Z}$.

有理数集: 全体有理数的集合叫做有理数集, 通常记作 $\mathbf{Q}$.

实数集: 全体实数的集合叫做实数集, 通常记作 $\mathbf{R}$.

3. 区间的概念

设 a, b 是两个实数, 并且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x | a < x < b\}$ 叫做开区间, 记为 (a, b) ;

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 叫做闭区间, 记为 $[a, b]$;

(3) 满足不等式 $a < x \leq b, a \leq x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x | a < x \leq b\}, \{x | a \leq x < b\}$ 叫做半开半闭区间, 记为 $(a, b], [a, b)$.

特别地, 全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 表示为 $(-\infty, +\infty)$, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 注意“ $+\infty$ ”和“ $-\infty$ ”不是数, 只是一个记号.

满足不等式 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x | x \geq a\}, \{x | x > a\}, \{x | x \leq b\}, \{x | x < b\}$ 分别记为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$.

(4)不等式及不等式组的解集常用区间或区间的并集、交集等表示.

例 1 m 是什么实数时,方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实数根?

分析:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 当判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 大于 0 时有两个不相等的实数根,等于 0 时有两个相等的实数根,小于 0 时没有实数根.因此通过 $\Delta \geq 0$ 就可以确定题中的 m .

解:因为方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实数根,所以

$$\Delta=b^2-4ac=(m+2)^2-16 \geq 0,$$

即

$$m^2+4m-12 \geq 0,$$

因为方程 $m^2+4m-12=0$ 的根是

$$m_1=2, m_2=-6,$$

所以不等式 $m^2+4m-12 \geq 0$ 的解集是 $\{m | m \leq -6 \text{ 或 } m \geq 2\}$.

由此可知,当 $m \leq -6$ 或 $m \geq 2$,即 $m \in (-\infty, -6] \text{ 或 } m \in [2, +\infty)$ 时,原方程有实数根.

二、集合的表示法

1.列举法:把集合中的元素一一列举出来并写在大括号内,这种表示集合的方法叫做列举法,如 $\{a, b, c, d\}$.

2.描述法:把集合中的元素的共同特性描述出来并写在大括号内,这种表示集合的方法叫做描述法,如 $\{x \in \mathbf{R} | x^2-3x+2=0\}$, $\{\text{直角三角形}\}$.分析第一个集合可知, $x \in \mathbf{R}$ 是明确的,那么第一个集合也可以表示为 $\{x | x^2-3x+2=0\}$.

3.韦恩氏图:有时也可用图示法表示集合,如用图 1-1 表示集合 A .

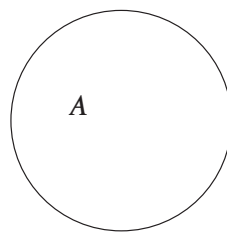


图 1-1

例 2 由不大于 7 的质数所组成的集合是

A. $\{1, 2, 3, 5, 7\}$

B. $\{2, 3, 5, 7\}$

C. $\{2, 3, 5\}$

D. $\{x | x \leq 7\}$

分析:1 不是质数;C 项表示小于 7 的质数所组成的集合;D 项表示不大于 7 的实数所组成的集合.

答:B

三、集合与集合的关系

1.子集

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

说明 在国家标准中,符号“ $\subseteq$ ”也可用“ $\subset$ ”,“ $\supseteq$ ”也可用“ $\supset$ ”.

子集的几个推论:

(1)任何一个集合 A 都是它本身的子集: $A \subseteq A$,因为集合 A 的任何一个元素都属于集合 A 本身;

(2)空集是任何一个集合 A 的子集: $\emptyset \subseteq A$;

(3)对于集合 A, B, C ,如 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

集合相等:对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,那么称集合 A 与集合 B 相等,记作

$$A = B,$$

读作“ A 等于 B ”.这就是说,集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素;反之,集合 B 的任何一个元素也都是集合 A 的元素.这两个集合所包含的元素完全一样,两个集合是同一个集合.

真子集:如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称集合 A 为集合 B 的真子集,记作

$$A \subsetneq B \text{ 或 } B \supsetneq A.$$



下面是常见的几种数集的关系:

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}.$$

例 3 用适当的符号($\in, \notin, =, \subsetneq, \supsetneq$)填空:

$$(1) 0 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{R}; \quad (2) \emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{a\}; \quad (3) \{a, b\} \underline{\hspace{1cm}} \{b, a\};$$

$$(4) \{a, b\} \underline{\hspace{1cm}} \{a\}; \quad (5) a \underline{\hspace{1cm}} \{b, c\}.$$

分析:(1)数 0 与小写拉丁字母 a, b, c 均表示集合的元素,但将这些字母带上括号 $\{\}$ 后就表示集合. $\emptyset, \mathbf{R}$ 分别表示空集、实数集.

(2)元素与集合之间具有的关系是 $\in, \notin$;集合与集合之间具有的关系是 $\subseteq (\supseteq), \subsetneq (\supsetneq), =$.

(3)集合与其元素的排列次序无关,即 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 均表示同一个集合.

(4)注意区分 a 与 $\{a\}$ 两者的关系: a 是 $\{a\}$ 的元素, $\{a\}$ 是只含 a 的集合.

答:(1) $\in$ (2) $\subsetneq$ (3) $=$ (4) $\supsetneq$ (5) $\notin$

例 4 用适当的符号($\in, \notin, =, \supsetneq, \subsetneq$)填空:

$$(1) 1 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N};$$

$$(2) 0 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N}^*;$$

$$(3) \emptyset \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q};$$

$$(4) \mathbf{R} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Z};$$

$$(5) \{1\} \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 3\};$$

$$(6) 1 \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 3\};$$

$$(7) 0 \underline{\hspace{1cm}} \{0\};$$

$$(8) \{0\} \underline{\hspace{1cm}} \emptyset;$$

$$(9) 0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset;$$

$$(10) \{1, 2, 3\} \underline{\hspace{1cm}} \{3, 2, 1\}.$$

分析:(1) $\in$ (属于)与 $\notin$ (不属于)符号是用来表示元素与集合之间的关系,因此有 $1 \in \mathbf{N}, 0 \notin \mathbf{N}^*$ 等.

(2)符号 $\supsetneq$ 与 $\subsetneq$ 表示集合与集合之间的关系,因此有 $\emptyset \subsetneq \mathbf{Q}, \mathbf{R} \supsetneq \mathbf{Z}$ 等.

(3)一般地, a 表示一个元素,而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合,不要将 $\{a\}$ 与 a 混淆,因此有 $\{1\} \subsetneq \{1, 2, 3\}, 1 \in \{1, 2, 3\}, 0 \in \{0\}$ 等,不能写成 $\{1\} \in \{1, 2, 3\}, 1 \supsetneq \{1, 2, 3\}, 0 = \{0\}$.

(4) $\emptyset$ (空集)是一个集合,其中不含任何元素, 0 是一个元素, $\{0\}$ 是含有元素 0 的集合,因此 $\{0\} \supsetneq \emptyset, 0 \notin \emptyset, 0 \in \{0\}$,不能写成 $\{0\} = \emptyset, 0 = \emptyset$.

(5)用列举法表示集合时,不必考虑元素之间的顺序,因此有 $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

答:(1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\subsetneq$ (4) $\supsetneq$ (5) $\subsetneq$

(6) $\in$ (7) $\in$ (8) $\supsetneq$ (9) $\notin$ (10) $=$

2. 交集

由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$,读作“ A 交 B ”(如图 1-2 所示),即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

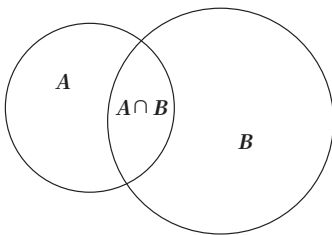


图 1-2

交集的性质:

$$(1) A \cap A = A;$$

$$(2) A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$(3) A \cap B = B \cap A \text{ (交换律)}.$$

3. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的并集,记作

$A \cup B$, 读作“A 并 B”(如图 1-3 所示), 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

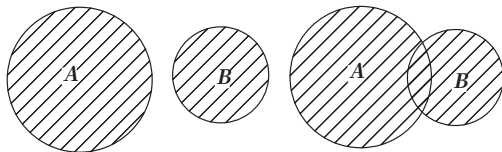


图 1-3

并集的性质:

- (1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$; (3) $A \cup B = B \cup A$ (交换律).

例 5 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, 则 $A \cup B$ 等于()

- A. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 1, 2, 4, 8, 16\}$
 B. $\{3, 6, 8, 12, 16\}$
 C. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16\}$
 D. $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 16\}$

答:C

例 6 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, 则 $A \cap C$ 等于()

- A. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ B. $\{1, 2, 3, 6\}$
 C. $\{1, 3, 6\}$ D. $\{1, 2, 6\}$

答:B

4. 全集

在研究某些集合与集合之间的关系时, 如果这些集合都是某一给定集合的子集, 则这个给定的集合叫做全集, 用符号 U 表示. 这就是说, 全集含有所要研究的各个集合的全部元素.

例如, 在研究数集时, 常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集; 在研究图形的集合时, 常常把所有的空间图形组成的集合作为全集.

注意 全集是相对于所讨论的问题而言的, 一个集合在一定条件下是全集, 在另一条件下就可能不是全集. 例如, 讨论的集合仅含整数元素时, 则整数集可作为全集; 若讨论的集合包括分数元素时, 则整数集不是全集, 而有理数集或实数集则可作为全集.

5. 补集

如果已知全集为 U , 且集合 $A \subseteq U$, 则由 U 中所有不属于 A 的元素所组成的集合, 叫做 U 中子集 A 的补集, 记作 $\complement_U A$. 当 U 明确时, 简记作 $\complement A$ (读作“A 补”), 即

$$\complement A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

例 7 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $N = \{0, 3, 4\}$, 则 $M \cap \complement N$ 为 ()

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 2\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

分析: $\complement N$ 是由全集 U 中去掉 N 中的元素剩下的元素所组成的, 即 $\complement N = \{1, 2\}$. 因此

$$M \cap \complement N = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}.$$

答:B

四、简易逻辑

1. 命题的条件和结论

一个数学命题都有条件和结论两部分. 如果把条件和结论分别用 A, B 表示, 那么命题可写成“如



果 A 成立,那么 B 成立”,或简写成“若 A ,则 B ”.

2.充分条件

如果 A 成立,那么 B 成立,即 $A \Rightarrow B$,这时我们称条件 A 是 B 成立的充分条件.

3.必要条件

如果 B 成立,那么 A 成立,即 $B \Rightarrow A$,这时我们称条件 A 是 B 成立的必要条件.

4.充要条件

如果 A 既是 B 成立的充分条件,又是 B 成立的必要条件,即既有 $A \Rightarrow B$,又有 $B \Rightarrow A$,这时我们称条件 A 是 B 成立的充分必要条件,简称充要条件.

例 8 三角形全等是三角形面积相等的

()

A.充分但不必要条件

B.必要但不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

分析:要判断一个命题的条件是结论成立的什么条件,首先要分清楚命题的“条件”和“结论”,设它们分别为 A, B .然后再检查是否有 $A \Rightarrow B$ 成立,或 $B \Rightarrow A$ 成立.本题中 A 为“两个三角形全等”, B 为“这两个三角形的面积相等”,显然 $A \Rightarrow B$ 成立, $B \Rightarrow A$ 不成立.

答:A

例 9 $b=0$ 是直线 $y=kx+b$ 过原点的

()

A.充分但不必要条件

B.必要但不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

分析:设 A 为“ $b=0$ ”, B 为“直线 $y=kx+b$ 过原点”.因为当 $b=0$ 时,直线方程为 $y=kx$,这是正比例函数,图形过原点,所以 $A \Rightarrow B$ 成立.又因为当 $y=kx+b$ 过原点时,把 $(0,0)$ 代入方程得 $0=k \times 0 + b, b=0$,即 $B \Rightarrow A$ 成立.

答:C

注意 讨论此类题目,一定要同时考察 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ 两个式子是否成立,否则不能判定哪个答案正确.

要点说明

- 1.正确理解集合的概念.注意三个特性:确定性、无异性、无序性.
- 2.集合的表示方法:描述法、列举法、韦恩氏图.
- 3.注意空集 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 和 $\{0\}$ 的区别.
- 4.注意区分元素对集合、集合对集合的隶属关系.正确使用符号 $\in, \notin, \subseteq$ 等.
- 5.熟练掌握集合的子、交、并、补的定义及运算,重视数形结合的解题思想.



同步练习

一、选择题

1.用列举法表示集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$,结果是

()

A.1

B.2

C.1,2

D. $\{1,2\}$

2.若 $M = \{x | x \leq \sqrt{17}\}, a = \sqrt{15}$,则

()

A. $a \subsetneq M$

B. $a \notin M$

C. $\{a\} \in M$

D. $\{a\} \subseteq M$

3.用列举法表示集合 $\{x | -9 \leq x < -1, \text{且 } x \text{ 为奇数}\}$,结果是

()

A. $\emptyset$

B. $\{-9, -7, -5, -3\}$

C. $\{-9, -7, -5, -3, -1\}$

D. $\{-7, -5, -3\}$

4. 用列举法表示集合 $\{(x, y) | x + 2y = 7, \text{且 } x, y \text{ 为正整数}\}$, 结果是 ()
 A. $\{x = 5, 3, 1; y = 1, 2, 3\}$ B. $\{(5, 1), (3, 2), (1, 3)\}$
 C. $\{(1, 5), (2, 3), (3, 1)\}$ D. $\{(7, 0), (5, 1), (3, 2), (1, 3)\}$
5. 由全体偶数所组成的集合是 ()
 A. $\{m | m = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{m | m = 2k, k \in \mathbf{N}\}$
 C. $\{m | m = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ D. $\{m | m = k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$
6. 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则集合 $\{x | -1 < x < 1\}$ 为 ()
 A. $M \cup N$ B. $M \cap N$ C. $\complement_U M \cup N$ D. $\complement_U M \cap N$
7. 由坐标平面内不在坐标轴上的点所组成的集合是 ()
 A. $\{(x, y) | xy \neq 0\}$ B. $\{(x, y) | x \neq 0\}$
 C. $\{(x, y) | y \neq 0\}$ D. $\{(x, y) | xy = 0\}$
8. 满足 $\{1, 2\} \cup M = \{1, 2, 3\}$ 的所有集合 M 的个数是 ()
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
9. m 是有理数是 m 是实数的 ()
 A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
10. A, B 全不为零是 $Ax + By + C = 0$ 为直线方程的 ()
 A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
11. 一元二次方程根的判别式为零, 是这个一元二次方程有两个相等的实根的 ()
 A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

12. 用适当的符号($\in, \notin, =, \subseteq, \supseteq$)填空:

- (1) $\{a\}$ _____ $\{a\}$; (2) a _____ $\{a\}$;
 (4) $\emptyset$ _____ $\{0, 1, 5\}$; (4) 1 _____ $\{0\}$;
 (5) 1 _____ $\{1, 7, 9\}$; (6) $\{a, b\}$ _____ $\{d, b, a\}$;
 (7) $\mathbf{N}$ _____ $\mathbf{Q}$; (8) $\mathbf{R}$ _____ $\mathbf{Z}$;
 (9) $\complement_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}$ _____ $\mathbf{R}$; (10) $\{x | x > 1\}$ _____ $\{x | x > 2\}$

13. 设集合 $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{c, b, e, f\}$, 则 $M \cup N =$ _____, $M \cap N =$ _____, $(M \cup N) \cap N =$ _____, $M \cup (N \cap M) =$ _____.

三、解答题

14. 全集 U , 集合 A, B 如图 1-4 所示, 用列举法表示 $A, B, \complement_U A, \complement_U B$.

15. 写出下列集合的所有子集, 并指出其中有几个非空真子集:

- (1) $\{a, b, c\}$; (2) $\{0\}$.

16. 设 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$, $B = \{a - 5, 1 - a, 9\}$, $A \cap B = \{9\}$, 求 a 值.

17. 设 $A = \{x | x > -2\}$, $B = \{x | x \geq 3\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.

18. 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, $C = \{(x, y) | 2x - 2y = 3\}$, $D = \{(x, y) | 6x + 4y = 2\}$, 求 $A \cap B, B \cap C, A \cap D$.

19. 设 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, 求 $\complement_U A, \complement_U B$.

20. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 证明: $\triangle ABC$ 是等边三角形的充要条件是 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

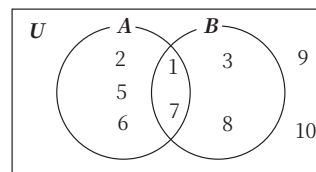


图 1-4



参考答案

一、选择题

- 1.D 2.D 3.B 4.B 5.A 6.B
7.A 8.D 9.A 10.A 11.C

二、填空题

12. (1) = (2) $\in$ (3) $\subseteq$ (4) $\notin$ (5) $\in$
(6) $\subseteq$ (7) $\subseteq$ (8) $\supseteq$ (9) $\subseteq$ (10) $\supseteq$

说明 做这类题时首先分清表示元素与集合的两种不同的符号.一般来说,集合是用花括号表示的,只有特殊的数集,如实数集、有理数集、整数集、自然数集等分别用 $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ 等字母表示.特别地, $\emptyset$ 表示空集.其次注意元素与集合之间是“属于”或“不属于”的关系;集合与集合之间是“包含”“包含于”或“相等”等关系,如: $0, a, 1$ 表示元素; $\{0\}, \{a\}, \{1\}$ 表示集合.此外,注意分清元素和集合的两种不同符号,如符号“ $\in$ ”用于元素与集合的关系表示,而符号“ $\subseteq (\supseteq), =$ ”用于集合与集合的关系表示.

13. $\{a, b, c, d, e, f\}; \{b, c\}; \{c, b, e, f\}$ (或 N); $\{a, b, c, d\}$ (或 M)

三、解答题

14. 解: 如图 1-5 所示, 有

$$A = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 7, 8\}$$

$$\complement_U A = \{3, 8, 9, 10\}$$

$$\complement_U B = \{2, 5, 6, 9, 10\}$$

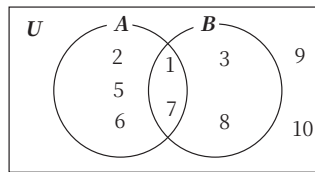


图 1-5

15. 解: (1) 集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集是 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$, 其中 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ 是非空真子集;
(2) 集合 $\{0\}$ 的所有子集是 $\emptyset, \{0\}$, 它没有非空真子集.

16. 解: 从已知 $A \cap B = \{9\}$ 得 $2a - 1 = 9$ 或 $a^2 = 9$, 故 $a = 5$ 或 $a = \pm 3$.

检验: 当 $a = 5$ 时, $A = \{-4, 9, 25\}, B = \{0, -4, 9\}$, 此情况不合题意, 舍去.

当 $a = 3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}, B = \{-2, -2, 9\}$, 此情况不符合集合的性质, 舍去.

当 $a = -3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}, B = \{-8, 4, 9\}$, 此情况符合题意. 故 $a = -3$.

17. 解: $\because A = \{x | x > -2\}, B = \{x | x \geq 3\}$,
 $\therefore A \cup B = \{x | x > -2\}, A \cap B = \{x | x \geq 3\}$.

18. 解: $\because A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$,

$$B = \{(x, y) | x - y = 2\},$$

$$C = \{(x, y) | 2x - 2y = 3\},$$

$$D = \{(x, y) | 6x + 4y = 2\},$$

$$\begin{aligned} \therefore A \cap B &= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \right\} \\ &= \{(1, -1)\}, \end{aligned}$$

$$B \cap C = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \right\} = \emptyset \left(\text{因为方程组} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \text{无解} \right),$$

$$\begin{aligned} A \cap D &= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases} \right\} \\ &= \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 1 \}. \end{aligned}$$

19. 解: $\because U = \{a, b, c, d, e, f\}, A = \{a, c, d\}, B = \{b, d, e\},$

$$\therefore \complement_U A = \{b, e, f\},$$

$$\complement_U B = \{a, c, f\}.$$

20. 证明: (1) 充分性:

如果

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,$$

那么

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0,$$

所以

$$a-b=0, a-c=0, b-c=0,$$

即

$$a=b=c,$$

所以, $\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) 必要性:

如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 那么

$$a=b=c,$$

所以

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0,$$

即

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

故 $\triangle ABC$ 是等边三角形的充要条件是 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$.

第二章 函数

学习要求

1. 了解函数概念,会求一些常见函数的定义域.
2. 了解函数的单调性和奇偶性的概念,会判断一些常见函数的单调性和奇偶性.
3. 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图象和性质,会求它们的解析式.
4. 理解二次函数的概念,掌握它的图象和性质以及函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 $y=ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象之间的关系;会求二次函数的解析式及最大值或最小值.能运用二次函数的知识解决有关问题.
5. 理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质,掌握指数函数的概念、图象和性质.
6. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质,掌握对数函数的概念、图象和性质.

一、函数的概念

1. 函数的定义

如果在某变化过程中有两个变量 x, y , 并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值, 按照某个对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就是 x 的函数, x 叫做自变量, 可以记作 $y=f(x)$ (其中 f 表示对应法则).

自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域, 和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域.

2. 函数的表示法

- (1) 解析法: 用等式表示两个变量间的函数关系的方法.
- (2) 列表法: 列表表示两个变量间的函数关系的方法.
- (3) 图象法: 用图象表示两个变量间的函数关系的方法.

3. 函数的性质

(1) 函数的单调性:

在一个区间上, 如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在此区间上是增函数; 如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在此区间上是减函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数, 就说函数 $f(x)$ 在此区间上具有单调性, 此区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 函数的奇偶性:

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数; 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数图象关于原点对称, 偶函数图象关于 y 轴对称.

例 1 函数 $y=(1+x)^0 - \frac{\sqrt{1+x}}{x}$ 的定义域是 ()

- | | |
|--|---|
| A. $\{x x \leq -1\}$ | B. $\{x x \geq -1\}$ |
| C. $\{x x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$ | D. $\{x x > -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$ |

分析:由 $1+x \geq 0$, 可得 $x \geq -1$, 再由 $(1+x)^0 = 1$ 时, $x+1 \neq 0$, 又分母 $x \neq 0$, 所以函数的定义域为 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 0\}$.

答:D

例2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为区间 $[a, b]$, 且 $g(x)=f(x+1)$, 则函数 $g(x)$ 的定义域是区间 ()

A. $[a, b]$

B. $[a+1, b+1]$

C. $[a-1, b-1]$

D. $[a-1, b+1]$

分析: $\because g(a-1)=f(a), g(b-1)=f(b),$

$\therefore g(x)$ 的定义域为 $[a-1, b-1]$.

答:C

例3 函数 $y=\sqrt{8-2^{x+1}}+\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是 ()

A. $\{x | x > 1\}$

B. $\{x | x \leq 2\}$

C. $\{x | 1 < x < 2\}$

D. $\{x | 1 < x \leq 2\}$

分析:由 $8-2^{x+1} \geq 0$, 得 $2 \cdot 2^x \leq 8 = 2^3$, 所以 $x \leq 2$. 又由 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0$, 从而 $0 < x-1 \leq 1$, 所以 $1 < x \leq 2$.

答:D

例4 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $x \neq 0$ 的函数是 ()

A. $y=2^{-x}$

B. $y=x^{-1}$

C. $y=\lg x$

D. $y=2^x$

分析:因函数 $y=2^{-x}, y=2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $x > 0$, 而函数 $x^{-1} = \frac{1}{x}$ 中 x 为实数且 $x \neq 0$, 所以 B 项正确.

答:B

例5 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x|x|$, 则 $f(x)$ ()

A. 既是奇函数, 又是增函数

B. 既是偶函数, 又是增函数

C. 既是奇函数, 又是减函数

D. 既是偶函数, 又是减函数

分析:因为 $f(-x)=(-x)|(-x)|=-x|x|$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=x^2$, 所以 $f(x)$ 的图象是以 $(0,0)$ 为顶点, 开口向上的抛物线在 y 轴右侧的部分, 如图 2-1 所示.

当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=-x^2$, 这时 $f(x)$ 的图象是顶点为 $(0,0)$, 开口向下的抛物线在 y 轴左侧的部分, 因此, 在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ 是增函数.

答:A

例6 函数 $y=\frac{2}{2x^2-19x+35}$ 的定义域是_____.

解:函数表达式是分式, 它的定义域是使分母不为零的 x 值的集合.

因为 $2x^2-19x+35=0$ 的根 $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=7$ 是使分母为零的 x 的值, 故所求函数的定义域为

$$\left\{x \mid x \neq \frac{5}{2} \text{ 且 } x \neq 7\right\}.$$

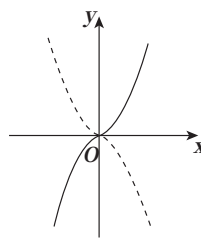


图 2-1



例 7 函数 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 的定义域是_____.

解: 函数表达式是偶次根式, 它的定义域是使被开方式非负的 x 值的集合.

要求 $x+3 \geq 0$, 此不等式的解集是 $\{x | x \geq -3\}$. 这就是所求函数的定义域.

例 8 函数 $y = \lg(4-3x-x^2)$ 的定义域是_____.

解: 函数的表达式是对数式, 它的定义域是使真数大于零的 x 值的集合.

要求 $4-3x-x^2 > 0$, 该不等式的解集是 $\{x | -4 < x < 1\}$. 这就是所求函数的定义域.

例 9 函数 $y = \sqrt{x^2-2x+1} \lg(-x)$ 的定义域是_____.

解: 所求函数的定义域由不等式组

$$\begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0 & \text{①} \\ -x > 0 & \text{②} \end{cases} \quad \text{确定.}$$

不等式①可写成 $(x-1)^2 \geq 0$, 解集为 $\mathbf{R}$.

不等式②的解为 $x < 0$.

因此, 上述两个不等式的公共解为 $x < 0$. 故所求函数的定义域为 $\{x | x < 0\}$.

例 10 试求函数 $y = \lg(1-x^2)$ 的单调区间.

解: $y = \lg(1-x^2)$ 的定义域是 $(-1, 1)$.

$y = \lg u$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$u = 1-x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

因此 $y = \lg(1-x^2)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递增, 而在 $[0, 1)$ 内单调递减.

故 $(-1, 0)$ 是函数 $y = \lg(1-x^2)$ 的单调递增区间, 而 $[0, 1)$ 是这个函数的单调递减区间.

二、一次函数和正比例函数

1. 定义

函数 $y = kx + b$ 叫做一次函数, 其中 k 与 b 是常数且 $k \neq 0$.

当 $b = 0$ 时, 函数 $y = kx$ 叫做正比例函数 (此时也说 y 与 x 成正比例).

2. 定义域与值域

一次函数的定义域与值域都是 $\mathbf{R}$.

3. 图象

正比例函数 $y = kx$ 的图象是经过原点 $(0, 0)$ 与点 $(1, k)$ 的直线. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象是经过点 $(0, b)$ 且与直线 $y = kx$ 平行的直线.

当 $b < 0$ 时, 直线通过负 y 轴 (如图 2-2 甲所示); 当 $b > 0$ 时, 直线通过正 y 轴 (如图 2-2 乙所示).

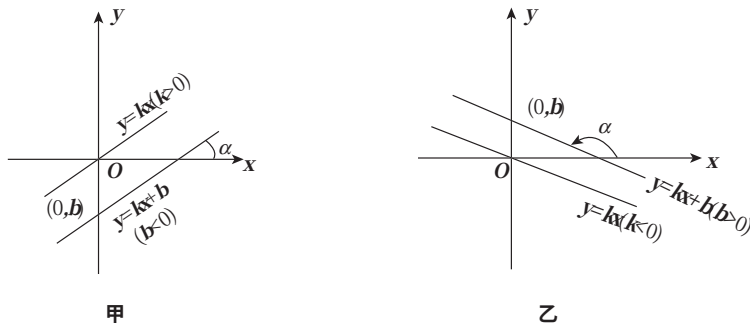


图 2-2

4. 性质——单调性、奇偶性

(1) 当 $k > 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数, 即 y 随 x 的增大而增大. 此时直线对于 x 轴

的倾斜角 α (倾斜角的定义见第十一章)是锐角(如图 2-2 甲所示).当 $k < 0$ 时函数 $y = kx + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数,即 y 随 x 的增大而减小,此时直线对于 x 轴的倾斜角 α 是钝角(如图 2-2 乙所示).

(2) $y = kx$ 是奇函数.

例 11 已知函数 $f(x) = ax + b$, $f(2) = -2$, $f(6) = 0$, 则 $f(8) =$ _____.

解: $f(2) = 2a + b$, $f(6) = 6a + b$,

由 $f(2) = -2$ 得

$$2a + b = -2 \quad \text{①}$$

由 $f(6) = 0$ 得

$$6a + b = 0 \quad \text{②}$$

解由①②所组成的方程组得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$,

从而 $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$,

因此 $f(8) = \frac{1}{2} \times 8 - 3 = 1$.

例 12 设 $f(x) = ax + 2$, $g(x) = \frac{3}{x}$. 如果 $f(1) > g(1)$, 则 a 的取值范围是_____.

解: $f(1) = a \cdot 1 + 2 = 2 + a$, $g(1) = \frac{3}{1} = 3$,

由 $f(1) > g(1)$ 得 $2 + a > 3$. 解得 $a > 1$ 即为所求.

例 13 已知函数 $f(x) = kx + 5$, 设 $f(2) = 3$, 则使得 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是_____.

解: 由 $f(2) = 3$ 得 $2k + 5 = 3$. 解得 $k = -1$. 因此

$$f(x) = -x + 5,$$

由 $f(x) > 0$ 得 $-x + 5 > 0$. 解得 $x < 5$ 即为所求.

例 14 图 2-3 中的直线①②③④分别是一次函数 $y = ax + b$ 的图象. 在下列横线上填直线的编号.

_____ $a > 0, b > 0$;

_____ $a < 0, b > 0$;

_____ $a < 0, b < 0$;

_____ $a > 0, b < 0$.

解: 在直线 $y = ax + b$ 的图象上, a 表示斜率, b 表示 y 轴上的截距. 所以, 上边四种情形的直线分别为编号①②③④.

例 15 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象是通过点 $(-1, 1)$ 及点 $(2, 5)$ 的直线, 求 k, b 的值.

分析: 为了确定一次函数中的两个参数 k 与 b , 可寻找含 k, b 的两个方程, 这个二元一次方程组可由图象上两个已知点的坐标代入一次函数中得到.

解: 将点 $(-1, 1)$, $(2, 5)$ 分别代入 $y = kx + b$ 中, 得到二元一次方程组

$$\begin{cases} 1 = k \cdot (-1) + b, \\ 5 = k \cdot 2 + b, \end{cases}$$

由此解得 $k = \frac{4}{3}$, $b = \frac{7}{3}$.

说明 从几何角度看, 两点(两个条件)可以确定一条直线. 从函数角度看, 两个参数 k 与 b 的值(两

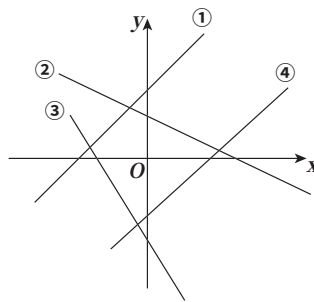


图 2-3



个条件)可以确定一个一次函数 $y=kx+b$. 这两个参数的值可由图象上的两点的坐标代入一次函数中得到的二元一次方程组来确定.

三、反比例函数

1. 定义

函数 $y=\frac{k}{x}$ 叫做反比例函数(此时也可以说 y 与 x 成反比例), 其中 k 是不等于零的常数.

2. 定义域与值域

反比例函数的定义域与值域都是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. 图象

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象是以原点为对称中心, $y=\pm x$ 为对称轴, 上下可与 y 轴无限靠近, 左右可与 x 轴无限靠近的等轴双曲线. 当 $k>0$ 时, 双曲线的两支分别在第一与第三象限(如图 2-4 甲所示); 当 $k<0$ 时, 双曲线的两支分别在第二与第四象限(如图 2-4 乙所示).

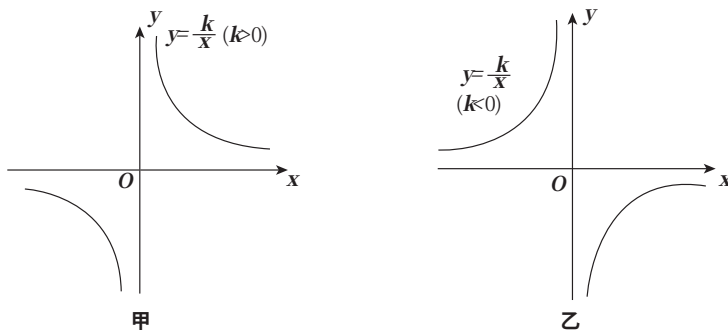


图 2-4

4. 性质——单调性、奇偶性

- (1) $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数;
- (2) $y=\frac{k}{x}$ ($k<0$) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数;
- (3) $y=\frac{k}{x}$ 是奇函数.

例 16 设函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{2+3x}$, 则 $f(0)$ 等于 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. 0

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

分析: $f(0)=\frac{0^2-1}{2+3\times 0}=-\frac{1}{2}$.

答: A

例 17 若函数 $f(x)=-\frac{2}{x}$, 则 ()

A. $f(x)$ 是奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减

B. $f(x)$ 是奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增

C. $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减

D. $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增

分析: 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 是奇函数, 且当 $k < 0$ 时, 函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增.

答: B

例 18 若 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 则对任意不为零的实数 x 恒成立的是 ()

A. $f(x) = f(-x)$

B. $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

C. $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

D. $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

分析: 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - x$,

所以在四个选项中成立的是 $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$.

答: C

例 19 设 $y = f(x)$ 是反比例函数, 且 $f(-2) = 4$, 则 $f(x)$ 等于 ()

A. $\frac{4}{x}$

B. $\frac{-4}{x}$

C. $\frac{8}{x}$

D. $\frac{-8}{x}$

分析: $f(x) = \frac{k}{x}$, 则 $f(-2) = \frac{k}{-2} = 4$, 所以 $k = -8$.

答: D

例 20 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, 当 $x \neq \pm 1$ 时, $f(-x)$ 是 ()

A. $\frac{1+x}{1-x}$

B. $\frac{1-x}{1+x}$

C. $\frac{x+1}{x-1}$

D. $\frac{x-1}{x+1}$

分析: $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \neq 1$, 则 $f(-x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$.

答: B

例 21 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} (x > 0)$, 则 $f(x)$ 等于 ()

A. $\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$

B. $\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{x}$

C. $\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}$

D. $\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

分析: $\because f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$,



$$\therefore f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

答:D

例 22 函数 $y = k(x+1)$ 与函数 $y = \frac{k}{x}$, 当 $k > 0$ 时的图象只可能是 ()

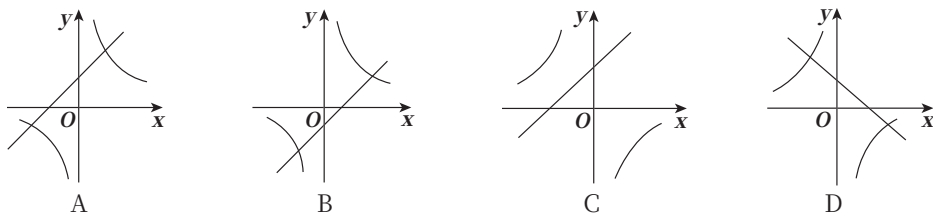


图 2-5

分析: 当 $k > 0$ 时, 直线 $y = k(x+1)$ 通过第一、二、三象限; $y = \frac{k}{x}$ 的图象——双曲线的两支在第一、三象限. 因此, 所求的图象只可能是 A 项.

答:A

例 23 建筑一个容积为 8000 m^3 , 深为 6 m 的长方体蓄水池, 池壁每平方米的造价为 15 元, 池底每平方米的造价为 30 元. 把总造价 y (元) 表示为水池的长 x (m) 的函数, 并求出函数的定义域.

分析: 总造价 y (元) 与池壁面积和池底面积有关, 池壁与池底的面积取决于水池的长、宽、深. 深度已知, 水池长为 x (m), 宽度可由容积推出, 这样就可以求出 y 与 x 的函数关系式了.

解: 设水池的长为 $x \text{ m}$, 则

水池的宽为 $\frac{8000}{6x} \text{ (m)}$,

池壁面积为 $2 \times 6 \left(x + \frac{8000}{6x} \right) \text{ (m}^2\text{)}$,

池壁造价为 $15 \times 12 \left(x + \frac{8000}{6x} \right) \text{ (元)}$,

池底面积为 $\frac{8000}{6} \text{ (m}^2\text{)}$,

池底造价为 $\frac{8000 \times 30}{6} = 40000 \text{ (元)}$,

所以, 总造价为 $y = 15 \times 12 \left(x + \frac{8000}{6x} \right) + 40000 = 180x + \frac{240000}{x} + 40000 \text{ (元)}$.

函数的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x > 0\}$.

注意 实际处理函数定义域问题时, 除了要考虑函数关系式本身必须有意义 (如在例 22 中, 要求 $x \neq 0$) 之外, 还要考虑实际问题的需要 (如在例 23 中, 长度必须为正数, 即要求 $x > 0$).

四、二次函数

1. 定义

函数 $y = ax^2 + bx + c$ 叫做二次函数, 其中 a, b, c 是常数且 $a \neq 0$.

2. 定义域

二次函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

3. 图象

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是顶点为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ 的抛物线. 当 $a > 0$ 时, 开口向上 (如图 2-6 甲所示); 当 $a < 0$ 时, 开口向下 (如图 2-6 乙所示).