



QINGSONG SHANG GAOZHONG

初中高中衔接读本

轻松 高中

数学

新课程
XINKECHENG

新理念
XINLINIAN

新方法
XINFANGFA

浙江教育出版社





目 录 CONTENTS

第 1 章 数	1
1.1 数的规律	1
⊙ 阅读材料 斐波那契	3
1.2 数的运算	4
1.3 数的估算	7
⊙ 阅读材料 数的发展	8
第 2 章 式	10
2.1 常用乘法公式补充	10
2.2 因式分解方法的拓展	13
2.3 含字母的绝对值	18
2.4 含字母的二次根式	20
2.5 多项式的除法	23
第 3 章 方程与不等式	26
3.1 一元二次方程补充	26
3.2 分式方程与无理方程	30
3.3 多元方程组	32
3.4 一元一次不等式的拓展	34
第 4 章 函数	36
4.1 二次函数的解析式	36
4.2 在限定范围内求函数的最值	40
4.3 一般函数的图象	45
⊙ 阅读材料 数学大师 科学巨匠——华罗庚	47

第5章 图形	48
5.1 面积法	48
5.2 图形的变换	55
5.3 折叠与展开	57
5.4 几个常用定理及应用	60
◎阅读材料 使用最久的数学教科书 ——《几何原本》	66
参考答案	67



编者的话

《轻松上高中》丛书是专为初中毕业、即将升入高中的学生而编写的课外读物,包括语文、数学、英语、物理、化学五门学科。

比较初高中数学,在教材内容、教学要求、教学方式、思维层次,以及学习方法上都发生了突变。就教材内容而言,与初中数学教材比较,高中数学概念抽象,定理严谨,逻辑性强,教材叙述比较严谨、规范,知识难度加大,且习题类型多,解题技巧灵活多变,计算繁冗复杂,体现了“起点高、难度大、容量多”的特点。就思维层次而言,高中数学对数学能力和数学思想的运用要求明显提高。高中数学突出四大能力,即运算能力,空间想象能力,逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力;渗透四大数学思想方法,即数形结合,函数与方程,等价与变换,分类与讨论。这些虽然在初中数学中有所体现,但到高中才充分反映出来。这些能力、思想方法也正是高考命题的要求。本书根据内容编排章节,旨在从内容方面,为初中毕业生补充一些与高中数学联系较大的知识,如代数式的运算、化简、求值;函数的确定和性质;立体几何中空间问题转化为平面问题等。可以说是部分初中数学知识的延拓和提高,但不是简单的重复。内容不求面面俱到,以实用为原则。另外,对高中数学所用到的数学能力和数学思想渗透在内容中讲述。

参加本书编写的有:许芬英、朱恒元、郑日锋、蔡小雄、俞小平、吕峰波、李柏青、张宗余、黄宗巧、胡克元、陈云彪等教师,全书由许芬英统稿。

2006年5月

第1章 数

1.1 数的规律

普鲁士天文学家提丢斯(Titius, 1729~1796)通过研究下面一列数 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, $\dots$, 推导出从太阳到行星的距离的经验定律, 并探明了一些行星.

这是科学史上的一个真实故事!

提丢斯发现:

1. 每个数恰好是前一个数的 2 倍;
2. 如果把 0 加在这一列数的最前面作为第一个数, 我们再做一个简单的运算: 每个数加上 4, 然后再除以 10, 就得到另一列数: 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0, 19.6, $\dots$

这可不是一列简单的数: 第一个数表示太阳到其最近的行星——水星的近似距离, 第二个数表示太阳到金星的近似距离……依次类推, 他得到一张出色的表:

距 离 类 别 \ 行 星	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?	?
实际距离	0.39	0.72	1.0	1.52	?	5.2	9.5	?	?
计算距离	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6	$\dots$

注: 表中数据的单位是天文单位, 一个天文单位等于太阳到地球的距离, 约为 149 597 870km.

当时表中还有一些空格未填上. 1781 年, 人们发现了天王星(与太阳的距离是 19.2 天文单位), 差不多恰好处在定律所预言的轨道(19.6)上. 于是, 天文学家们开始在距离约为 2.8 个天文单位的区域寻找尚未被发现的行星. 1801 年, 意大利天文学家比亚兹(Biaz, 1749~1826)果然在这个区域发现了谷神星, 它与太阳的近似距离为 2.7 个天文单位.

小小一列数真不简单!

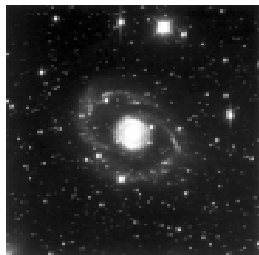
本节我们将探究数的规律, 并根据它们的规律求一些较为复杂的算式的和.

例 1 观察下列已有数的规律, 在“()”内填入恰当的数.

1, 1, 2, 3, 5, 8, (), 21, 34, (), 89, $\dots$

分析 我们观察发现: $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $\dots$ 也就是说, 从第 3 个数开始, 每一个数是其前 2 个数的和. 所以 8 后面的数是 13, 34 后面的数是 55.

这一列数最初由意大利数学家斐波那契(Fibonacci, 约 1170~约 1250)在其著作《算盘书》中提出的一个“兔子问题”, 后来被广泛应用于传染病预测、植物的花瓣数、松果的排列数等.



一般地,为了寻找这些数的规律,我们总是从它们相邻的数之间找规律.比如,有的是按增加或减少相同数值的规律排列,有的则按增加或减少相等的倍数排列等.

例 2 求下列各算式的和:

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{90};$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

分析 分数相加,一般先将分母通分,然后相加.但对上述两个问题采用这个方法显然太繁琐,甚至行不通.仔细观察算式的特征,我们发现每一项的分母是两个数的乘积,若把这一项拆成两个分数的差再进行计算,则比较简便.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{90} \\ &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

如例 2 这种求和方法,我们称它为拆项法(也可叫裂项法).它主要是将所求算式的每一个数或式,拆成两个数或式的差,然后求和.

试一试,你能用类似的方法求算式: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的值吗?

作业题

A 组

1. 观察下列已有数的规律,在“()”内填入恰当的数:

$$(1) 0.5, 1.5, 4.5, (), 40.5, \cdots$$

$$(2) 1, (), 9, (), 25, 36, 49, \cdots$$

2. 如图,表中已经填入了1~16这16个数中的一些数,请将剩下的数填入空格中,使每行、每列及对角线上各数的和都为34.
3. 我们通常用 a_n 表示一列数中的第 n 个数.已知某一列数中的第一个数 $a_1=1$,第 n 个数 a_n 与第 $n+1$ 个数 a_{n+1} 满足关系式 $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.试写出这列数中的第4个数与第6个数.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

(第2题)

B组

4. 已知某一列数的前5个数为 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \sqrt{11}$.试写出这列数的第7个数和第9个数,并写出这列数中的第 n 个数 a_n .
5. 计算:
- (1) $(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$;
- (2) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$.

阅读材料

斐波那契

斐波那契,意大利数学家,12,13世纪欧洲数学界的代表人物.生于比萨,早年跟随经商的父亲到北非的布日伊(今阿尔及利亚东部的小港口贝贾亚),在那里受教育.以后到埃及、叙利亚、希腊、西西里、法国等地游历,熟习了不同国度在商业上的算术体系.1200年左右回到比萨,潜心写作.

他的书保存下来的共有5种.最重要的是《算盘书》(Liber Abac,1202年完成,1228年修订,亦译作《算经》),算盘并不单指罗马算盘或沙盘,实际是指一般的计算.《算盘书》最大的功绩是系统介绍印度记数法,影响并改变了欧洲数学的面貌.现传《算盘书》是1228年的修订版,其中最耐人寻味的是,这本书中出现了中国《孙子算经》中的不定方程解法.书中的题目是:一个不超过105的数分别被3,5,7除,余数是2,3,4,求这个数.解法和《孙子算经》一样.另一个“兔子问题”也引起了后人的极大兴趣:假定一对大兔子每一个月可以生一对小兔子,而小兔子出生后两个月就有生殖能力,问从一对大兔子开始,一年后能繁殖成多少对兔子?这就是“斐波那契数列”:1,1,2,3,5,8,13,21,⋯其规律是每一项(从第3项起)都是前两项的和.这个数列与后来的“优选法”有密切的关系.

斐波那契的其他数学著作还有《几何实践》(Practica Geometriae,1220),着重叙述希腊几何与三角术;《平方数书》(VLiber Quadratorum,1225),专论二次丢番图方程;《花朵》(Flos,1225),内容多为菲德里克(Frederick)二世宫廷数学竞赛问题.

斐波那契数列有许多奇妙的规律,如第3项、第6项、第9项、第12项的数能够被2整除.请你仔细观察这列数,再写出2条有关这列数的性质.



1.2 数的运算

1

图中是建设中的天下第一跨度的跨海大桥——杭州湾大桥. 桥梁、房屋等建筑的设计和现实生活中的许多问题都需要进行运算.



不用计算器, 你能快速计算出 $(10^4 - 1)^2$ 的结果吗?

解法一 先计算出 $10^4 - 1 = 9999$,

再计算 9999×9999 , 得 $(10^4 - 1)^2 = 99980001$.

解法二 利用代数恒等式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 可得:

$$(10^4 - 1)^2 = (10^4)^2 - 2 \times 10^4 \times 1 + 1^2 = 10^8 - 2 \times 10^4 + 1 = 99980001.$$

从以上计算我们可以发现, 计算也有诀窍与规律. 抓住了规律, 计算就可能变得较为简便.

例 1 已知 $x=8$, 计算: $(x^2 - 1)(1 + x + x^2) - x^3 + 1$.

分析 若将 $x=8$ 直接代入计算, 过程比较繁琐. 我们可以运用代数式的运算规律, 注意到 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, 则原式可先化简, 再代入求值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= (x+1)(x-1)(1+x+x^2) - (x^3 - 1) \\ &= (x+1)(x^3 - 1) - (x^3 - 1) \\ &= (x^3 - 1)(x+1-1) \\ &= x(x^3 - 1) \\ &= 8 \times (8^3 - 1) = 4088. \end{aligned}$$

例 2 已知 $a=2-\sqrt{3}$, $b=2+\sqrt{3}$, 计算: $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

分析 观察 a, b 这两个根式, 它们的乘积 $ab = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, 不含根式, 我们称之为“共轭根式”. 在这里, 充分运用“ $ab=1$ ”这一性质和提取公因式, 可简化计算.

$$\text{解法一} \quad \frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = a = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{解法二} \quad \frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{a+1}{b+1} = \frac{a+ab}{b+1} = \frac{a(1+b)}{b+1} = a = 2 - \sqrt{3}.$$

通过以上两例, 你是否体验到了“用字母代替数”的优越性了? 解这类问题, 通常先进行含字母的代数式运算, 利用运算规则进行化简, 再将数代入计算. 这样往往能减少计算量, 提高解题的正确性.

作业题

A 组

1. 计算: $(-6)^{15} \div (-8)^5 \div (-9)^7 - (-0.75)^3 \times (-2)^6$.
2. 下列各算式中, 运算结果等于 1 的有 _____ (只需填写序号).
 ① $\frac{3-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$; ② $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}$; ③ $(2-\sqrt{5})^2(2+\sqrt{5})^2$; ④ $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.
3. 计算:
 (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$;
 (2) 已知 $a=b=2, x=5, y=4$, 求 $(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by}) \cdot (2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$ 的值.

B 组

4. 计算:
 (1) $(3+\sqrt{10})^{15} \cdot (3-\sqrt{10})^{15}$;
 (2) $(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}})^2$.
5. 已知 $a=2$, 计算: $(1+a)(1+a^2)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n})$ 的值.

2

我们已学过实数的四则运算及乘方、开方运算, 在高中, 除实数的这些运算外, 还有其他一些运算.

例 3 记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[2.1]=2, [-0.128]=-1, [\frac{\sqrt{5}-1}{2}]=0$. 试计算: $[-\frac{\pi}{3}]+3 \cdot [\sqrt{2}]-[-\frac{5\sqrt{3}}{6}]$.

解 原式 $= -2 + 3 \times 1 - 2 = -1$.

例 4 设 x_1, x_2, y_1, y_2 是实数, 我们定义一种运算“ $\cdot$ ”, 使 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

- (1) 计算 $(\sqrt{15}, -2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5}, \sqrt{6})$ 的值;
- (2) 试证明: $(mx_1, my_1) \cdot (nx_2, ny_2) = mn[(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)]$.

解 (1) $(\sqrt{15}, -2\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5}, \sqrt{6}) = \sqrt{15} \times 2\sqrt{5} + (-2\sqrt{2}) \times \sqrt{6} = 6\sqrt{3}$.

(2) 证明: 左边 $= (mx_1, my_1) \times (nx_2, ny_2) = (mx_1) \times (nx_2) + (my_1) \times (ny_2)$
 $= mn(x_1x_2 + y_1y_2)$;

右边 $= mn(x_1x_2 + y_1y_2)$,



$$\therefore (mx_1, my_1) \cdot (nx_2, ny_2) = mn[(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)].$$

运算不仅局限于在实数范围内,还可定义在有序实数对之间.运算实际上是一种对应,它使得有序实数对经过运算后成为一个实数.用对应的思想来看待运算,会使得运算变得丰富多彩.

作业题

A 组

1. 设 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, m$ 是实数,定义运算“ $\odot$ ”和“ $\oplus$ ”,使:

$$(mx_1, my_1, mz_1) = m(x_1, y_1, z_1);$$

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

(1) 计算 $(1, 0, -1) \odot (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$ 的值和 $(1, 0, -1) \oplus (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$;

(2) 试证明:

$$\begin{aligned} & [(mx_1, my_1, mz_1) \oplus (-mx_1, -my_1, -mz_1)] \odot [(nx_1, ny_1, nz_1) \oplus (nx_2, ny_2, nz_2)] \\ &= mn(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2). \end{aligned}$$

2. 已知实数 x, y 满足 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, 定义一种运算“ $\otimes$ ”, 使 $x \otimes y = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}$. 计算:

(1) $\frac{1}{2} \otimes \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\left[\frac{1}{2} \otimes \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \times \left[\frac{1}{2} \otimes \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$.

3. 定义一种运算“!”, 试从下列几个算式中观察其运算规则: $2! = 2 \times 1 = 2$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. 试求出 $5!$ 与 $6!$ 的值, 并写出 $n!$ 的表示式 (其中 n 是正整数).

B 组

4. 设 a, b, c 是正实数, 且 $a \neq 1$. 若 $a^b = c$, 则定义它的逆运算为“ $\ominus$ ”, 使 $b = c \ominus a$. 例如:

由 $5^2 = 25$, 则可得 $2 = 25 \ominus 5$; 由 $125^{\frac{1}{3}} = 5$, 则可得 $\frac{1}{3} = 5 \ominus 125$.

(1) 计算: $100 \ominus 10$ 和 $25 \ominus 0.2$;

(2) 求证: $(2 \ominus 10) + (50 \ominus 10) = 2$.

5. 设 a, b, c, d 是实数, 定义一种运算“ $\left| \begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix} \right|$ ”, 使 $\left| \begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix} \right| = ad - bc$.

(1) 试计算 $\left| \begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix} \right|$ 的值;

(2) 试证明: $\left| \begin{smallmatrix} ma & c \\ mb & d \end{smallmatrix} \right| = m \left| \begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix} \right|$.

(3) 试探索运算“ $\left| \begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix} \right|$ ”, 你还能得到哪些性质?



1.3 数的估算

我们已学过多项式的乘法法则,试将下列各式展开成多项式的形式,并寻找展开式的规律:

$$(a+b)^1 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a+b)^4 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a+b)^5 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a+b)^6 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

当展开式的次数不是很大时,可用如图 1-1 中的数值确定展开式各项的系数.

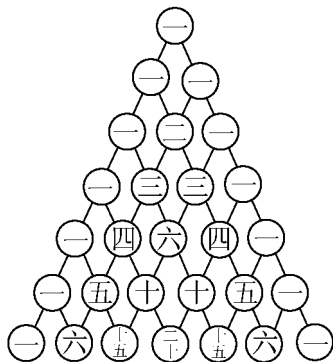


图 1-1

想一想,当 a 较小时,不用计算器如何估算 $(1+a)^n$ 的近似值?

例 1 计算: 0.998^6 (精确到 0.001).

分析 观察 0.998^6 , 可把它化为 $(1-0.002)^6$ 的形式, 展开后进行估算.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 0.998^6 &= (1-0.002)^6 \\ &= 1 + 6 \times (-0.002) + 15 \times (-0.002)^2 + \cdots + (-0.002)^6 \\ &\approx 1 + 6 \times (-0.002) = 1 - 0.012 = 0.988. \end{aligned}$$

例 1 中,展开式的第三项为 $15 \times (-0.002)^2 = 0.000\ 06 < 0.001$. 第三项以后的绝对值就更小了,所以从第三项起可以忽略不计.

试一试,不用计算器求下列各数的近似值(精确到 0.001):

$$(1) 1.002^4; \quad (2) 0.97^5; \quad (3) 2.998^4.$$

一般地,当 a 较小时, $(1+a)^n$ 的近似值可用 $(1+a)^n \approx 1+na$ 来估算.

例 2 设 $a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}, b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, 试比较 a 与 b 的大小.

$$\begin{aligned} \text{解法一} \quad a &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{6-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \\ b &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{3-\sqrt{3}}{2} < 1, \quad 1 < \frac{\sqrt{3}+1}{2} < \frac{3}{2},$$

$$\therefore a < b.$$



$$\text{解法二} \quad \because a-b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = 1 - \sqrt{3} < 0,$$

$$\therefore a < b.$$

化去分母中的根号,又称为分母有理化.

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a>0, b>0) \text{ 型根式分母有理化法则: } \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b};$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (a>0, b>0, a \neq b) \text{ 型根式分母有理化法则:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

即利用平方差公式进行分母有理化.

作 业 题

A 组

1. 计算: 2.02^4 (精确到 0.01).
2. 计算:
 - (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};$
 - (2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}};$
 - (3) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}.$
3. 写出三个夹在 100 与 101 之间的无理数: _____.
4. 试用尺规作图在数轴上标出 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ 的位置, 并比较 $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 的大小.

B 组

5. 计算: $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, 并指出它夹在哪两个与它最接近的整数之间.
6. 已知 $y = \sqrt{1-8x} + \sqrt{8x-1} + \frac{1}{2}$, 求代数式 $\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} - \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$ 的值.

阅读材料

数的发展

数的概念是由人类生产、生活实践和科学研究的需要而逐渐形成和发展起来的. 随着生产和科学的发展, 数的概念也得到发展.

早在原始社会末期, 由于计数的需要, 形成了 1, 2, 3, ... 这种“正整数”的概念. 任意两个正整数的和与积都是正整数(我们称正整数对加法、乘法这两种运算是“封闭的”), 但两个正整数的差与商却未必是正整数.

正整数和零构成“自然数”。

为了表示具有相反意义的量,人们引进了“负数”。公元3世纪,我国的刘徽已经对负数有了深刻的认识。在《九章算术注》中,他认为“今两算得失相反,要令正负以名之。”他还认为“言负者未必负于少,言正者未必正于多。”这两句话都是关于正负数的绝对值而言的,即负数的绝对值未必小、正数的绝对值未必大。

自然数、负整数构成“整数”。整数不但对加法、乘法这两种运算是“封闭的”,对减法也是封闭的,即任意两个整数的差仍然是整数。

人们在测量、分配中遇到“将某些量进行等分”的问题,为此又引进了分数,于是数的概念从“整数”扩大到了“有理数”。有理数可以统一看成“无限循环小数”(整数可以看成小数部分为0的小数,把有限小数看成后面有无限个“0”循环)。有理数对加、减、乘、除四则运算(除法的除数不为0)都是“封闭的”。

后来人们发现,有些量与量之间的比值,例如,正方形对角线和边长的比,不能表示成两个整数之比,即不能用有理数表示,为此人们又引进了“无理数”。无理数就是无限不循环小数,有理数和无理数的全体组成实数。实数概念的产生经过相当长的时间,据说无理数的发现还伴随着一个悲剧性故事。

前面所讲述的数都是由实际应用产生的,而有一类称为“虚数”的数是由数学问题引入的,且经过了500余年漫长岁月才慢慢形成。印度数学家婆什迦罗(Bhaskara II, 1114~约1185)是第一个遇到“虚数”的人,即方程 $x^2=-1$ 的解是什么?此后的几百年中,数学家们一直为 $x^2=-1$ 的根争论不休,没有统一的认识。后来,数学家们规定用符号“i”表示“-1”的平方根,即 $i^2=-1$,”i”成了虚数的单位。将实数和虚数结合起来,写成 $a+bi$ 的形式(a, b 均为实数),这就是复数。在很长一段时间里,人们在实际生活中找不到用虚数和复数表示的量,所以虚数总让人感到虚无缥缈。挪威出生的测量员韦塞尔(Wessel, 1745~1818)和瑞士人阿尔岗(Argand, 1768~1822)分别给出了复数和复数的代数式运算的几何解释。随着科学的发展,虚数现在在水力学、地图学和航空学上已经有了广泛的应用。

复数在数的发展过程中是一次飞跃,它将一元数系发展到了二元数系,即可用二元有序数对 (a, b) 表示复数。复数的有关内容,我们将在高中学习。

1843年10月16日,英国数学家哈密尔顿(Hamilton, 1805~1865)又提出了“四元数”的概念。所谓四元数,就是一种形如 $q=a+xi+yj+zk$ 的数,它是由一个标量 a (实数)和一个向量 $xi+yj+zk$ (其中 x, y, z 为实数)组成的。四元数在数论、群论、量子理论以及相对论等方面有广泛的应用。



第2章 式

2.1 常用乘法公式补充

1

我们已学习过多项式与多项式相乘的法则. 根据法则, 让我们来计算下面的算式:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3,$$

$$\text{即 } (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

一般地, 我们有以下立方和公式:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

即两数和乘以这两数的平方和与这两数的积的差, 等于这两个数的立方和.

如果把 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 写成 $[a+(-b)][a^2-a(-b)+(-b)^2]$, 就可以由立方和公式得出立方差公式:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

即两数差乘以这两数的平方和与这两数的积的和, 等于这两个数的立方差.

例 1 用立方和公式与立方差公式计算:

$$(1) (7-x)(49+7x+x^2);$$

$$(2) \left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right);$$

$$(3) (9x^{2m}-3x^{m+2}+x^4)(x^2+3x^m).$$

$$\text{解 } (1) (7-x)(49+7x+x^2)=(7-x)(7^2+7x+x^2)=7^3-x^3=343-x^3.$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right) \\ &= \left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left[(3x)^2-(3x)\left(\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right] \\ &= (3x)^3+\left(\frac{1}{2}y\right)^3 \\ &= 27x^3+\frac{1}{8}y^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & (9x^{2m}-3x^{m+2}+x^4)(x^2+3x^m) \\ &= (3x^m+x^2)[(3x^m)^2-(3x^m)(x^2)+(x^2)^2] \\ &= (3x^m)^3+(x^2)^3 \\ &= 27x^{3m}+x^6. \end{aligned}$$



例2 计算:

$$(1) (1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1);$$

$$(2) (a+b)[(a-b)^2+ab]-(a-b)[(a+b)^2-ab].$$

解 (1) $(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
 $=[(1-a)(1+a+a^2)][(1+a)(1-a+a^2)]$
 $=(1-a^3)(1+a^3)$
 $=1-(a^3)^2$
 $=1-a^6.$

(2) $(a+b)[(a-b)^2+ab]-(a-b)[(a+b)^2-ab]$
 $=(a+b)(a^2-2ab+b^2+ab)-(a-b)(a^2+2ab+b^2-ab)$
 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a-b)(a^2+ab+b^2)$
 $=(a^3+b^3)-(a^3-b^3)$
 $=2b^3.$

想一想,对例2第(1)题,如果先分别计算 $(1-a)(1+a)$, $(a^2+1+a)(a^2+1-a)$,那么可以怎样算?试一试,哪种方法更简便?

作业题

A 组

1. 运用立方和公式与立方差公式计算:

$$(1) (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2);$$

$$(2) (x^2+2)(4-2x^2+x^4);$$

$$(3) (\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab)(\frac{1}{2}a-2b);$$

$$(4) (a^m-b^n)(a^{2m}+a^mb^n+b^{2n}).$$

2. 填空:

$$(1) \text{ 设 } (a+b)(a^2+kab+b^2)=p,$$

则当 $k=$ _____ 时, $p=a^3+b^3$; 当 $k=$ _____ 时, $p=(a+b)^3$;

$$(2) \text{ 已知 } (2x-3y)(4x^2-kxy+9y^2)=8x^3-27y^2, \text{ 那么 } k= \text{_____}.$$

3. 计算:

$$(1) (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1);$$

$$(2) (a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2.$$

B 组

4. 化简: $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;

5. 已知 $a+b=1$, 求 a^3+b^3+3ab 的值.



C 组

6. 已知 $x+y=3$, $xy=2$. 求下列各式的值:

(1) x^2+y^2 ;

(2) x^3+y^3 ;

(3) x^4+y^4 .

2

过去我们学习了两数和的完全平方公式:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 现在我们增加“数的个数”, 来计算三个数的和的平方:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2.\end{aligned}$$

由此得到:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

这个结论在计算时可以直接使用.

另一方面, 我们增大“次数”来计算两数和的立方:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\end{aligned}$$

由此得到两数和的立方公式:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

想一想, 这个公式右边各项中的系数和次数各有什么特点?

如果把 $(a-b)^3$ 写成 $[a+(-b)]^3$, 就可以由两数和的立方公式写出两数差的立方公式:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

例 3 用两数和的立方公式与两数差的立方公式计算:

(1) $(2x+1)^3$;

(2) $(-2+a)^3$.

解 (1) $(2x+1)^3$

$$\begin{aligned}&= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 1 + 3 \times (2x) \times 1^2 + 1^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.\end{aligned}$$

(2) $(-2+a)^3$

$$\begin{aligned}&= (a-2)^3 \\ &= a^3 - 3a^2 \times 2 + 3a \times 2^2 - 2^3 \\ &= a^3 - 6a^2 + 12a - 8.\end{aligned}$$

例 4 已知 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=2$, 求 $ab+bc+ca$ 的值.

解 由 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$,

得 $1^2 = 2 + 2(ab+bc+ca)$, $\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$.



作 业 题

A 组

1. 计算:

$$(1) (x-2y+3)^2; \quad (2) \left(m-\frac{1}{2}\right)^3; \quad (3) (-x-2y)^3.$$

2. 化简: $(a-b)(a+b)^3 - 2ab(a^2 - b^2)$.

B 组

3. 已知 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$, 问“ $a = b = c$ ”一定成立吗? 为什么?4. 化简: $(a-b+4)(a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b + 16)$.5. 已知 $a = 2006x + 2007$, $b = 2006x + 2008$, $c = 2006x + 2009$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值.

2.2 因式分解方法的拓展



观察下面这些“荒谬”而又正确的式子:

$$\frac{5^3 + 2^3}{5^3 + 3^3} = \frac{5+2}{5+3} = \frac{7}{8};$$

$$\frac{25^3 + 16^3}{25^3 + 9^3} = \frac{25+16}{25+9} = \frac{41}{34};$$

.....

你一定感到很奇怪, 这些看似“荒谬”的式子怎么会正确呢? 其实, 这些似非而是的等式只不过是等式 $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}$ 的特例而已!

1

如何把 $a^3 + b^3$ 和 $a^3 - b^3$ 分解因式? 通过上一节的学习, 我们很快可以找到答案.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

运用这两个公式可以把立方和(或差)的多项式分解因式.

想一想, 怎样把 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 和 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 分解因式?**例 1** 把下列各式分解因式:

$$(1) 125 + a^3; \quad (2) 1 - \frac{a^3 b^3}{8}; \quad (3) x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

解 (1) $125 + a^3 = 5^3 + a^3 = (5+a)(25 - 5a + a^2)$.

$$(2) 1 - \frac{a^3 b^3}{8} = 1^3 - \left(\frac{ab}{2}\right)^3 = \left(1 - \frac{ab}{2}\right) \left[1^2 + 1 \times \frac{ab}{2} + \left(\frac{ab}{2}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{ab}{2}\right) \left(1 + \frac{ab}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}\right).$$

