图书在版编目(CIP)数据

轻松解奥数.六年级/赵云主编.—南京:南京大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-305-05039-8

Ⅰ.轻…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.数学课—小学—教学参考资料
Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第052206号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　　　邮　编　210093
网　　址　http://press.nju.edu.cn
出 版 人　左　健

书　　名　轻松解奥数·小学六年级
主　　编　赵　云
责任编辑　孟庆生　　　编辑热线　025-83597482

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　徐州新华印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 8　字数 185 千
版　　次　2007年5月第1版　2007年5月第1次印刷
ISBN 978-7-305-05039-8
定　　价　10.00元

发行热线　025-83592169　025-83592317
电子邮箱　sales@press.nju.edu.cn(销售部)
　　　　　nupress1@public1.ptt.js.cn

目　录

专题 1 加法原理和乘法原理

【教师手记】 排列与组合知识在日常生活、生产实践和科学技术研究中有广泛的应用，它们是围绕计数问题展开的一类问题。尽管计数问题形式多样，但从题目的特点来看都有一定的规律。解决此类问题，一般要用到两个基本原理，即加法原理和乘法原理。

加法原理：要完成一个任务，有 k 种彼此独立的不同方式，第一种方式有 n_1 种不同的方法可以完成任务，第二种方式有 n_2 种不同的方法可以完成任务，……第 k 种方式有 n_k 种不同的方法可以完成任务，那么完成这个任务共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种不同的方法。

乘法原理：如果完成某项任务可分为 k 个不同的步骤，完成第 1 步有 n_1 种不同的方法，完成第 2 步有 n_2 种不同的方法，……完成第 k 步有 n_k 种不同的方法，那么完成此项任务共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种不同的方法。

【技巧解析】

例 1 现有一架天平和 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克的砝码各 1 个，用这 5 个砝码在天平上共能称出多少种不同重量的物体？

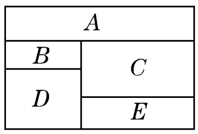
思路开启 要分析用这些砝码能称出物体重量的种数，可以按每次使用砝码的个数分成 5 类，即每次使用 1 个砝码、每次使用 2 个砝码、……每次使用 5 个砝码。在统计每一类能称物体重量的种数时，可以运用枚举法。

解答 每次使用 1 个砝码，能称出的重量有 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克，共 5 种不同的重量；每次使用 2 个砝码，能称出的重量有 3 克、5 克、6 克、9 克、10 克、12 克、17 克、18 克、20 克、24 克，共 10 种不同的重量；每次使用 3 个砝码，能称出的重量有 7 克、11 克、13 克、14 克、19 克、21 克、22 克、25 克、26 克、28 克，共 10 种不同的重量；每次使用 4 个砝码，能称出的重量有 15 克、23 克、27 克、29 克、30 克，共 5 种不同的重量；每次使用 5 个砝码，能称出的重量只有 31 克，共 1 种不同的重量。

由加法原理，用这 5 个砝码共能称出 $5+10+10+5+1=31$(种)不同的重量。

答：用这 5 个砝码共能称出 31 种不同的重量。

例 2 如图，把 A，B，C，D，E 这 5 部分用红、黄、蓝、绿 4 种颜色着色，且相邻的部分不能使用同一种颜色，不相邻的部分可以使用同一种颜色，那么这幅图一共有多少种不同的着色方法？



思路开启 给这幅图着色是一部分一部分地着色，因此必须分步进行。由于 C 部分与其余 4 部分都相邻，所以第一步先涂 C 部分，有 4 种颜色可供选择；第二步涂 A 部分，有除 C 部分颜色以外的 3 种颜色可以选择；第三步涂 B 部分，有除 A，C 部分颜色以外的 2 种颜色可以选择；同理，D，E 部分也各有 2 种颜色可以选择。最后，由乘法原理可以求出着色方法总数。

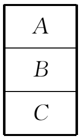
解答 C 部分有红、黄、蓝、绿 4 种不同的涂法；A 部分有除涂 C 部分外的 3 种不同的涂法；B 部分有除涂 A，C 两部分外的 2 种不同的涂法；D 部分有除涂 B，C 两部分外的 2 种不同的涂法；E 部分有除涂 C，D 两部分外的 2 种不同的涂法。最后由乘法原理，共

有 $4\times3\times2\times2\times2=96$(种)不同的涂法。

答:满足题意的涂法共有 96 种。

例 3 某信号兵用红、黄、蓝 3 面旗从上到下挂在旗杆上的 3 个位置表示信号。每次可挂 1 面、2 面或 3 面,并且不同的顺序、不同的位置表示不同的信号。一共可以表示出多少种不同的信号?

思路开启 为了方便我们给旗杆从上到下的 3 个位置编上字母(如图)。按每次悬挂旗的面数分类,即每次悬挂 1 面旗、每次悬挂 2 面旗、每次悬挂 3 面旗。然后分别统计出每一类的种数,再由加法原理,即可知表示信号的总数。



解答 每次悬挂一面旗有红、黄、蓝 3 种情况。每一种情况又分别有 A,B,C 3 个位置可以选择,可以表示 3 种不同的信号。因此每次悬挂一面旗共可以表示 $3\times3=9$(种)不同的信号。

每次悬挂两面旗有悬挂红旗与黄旗、红旗与蓝旗、黄旗与蓝旗 3 种情况。如果同时悬挂红旗与黄旗,可以分两步进行。第一步挂红旗,有 A,B,C 3 个位置可以选择;第二步挂黄旗,有除挂红旗以外的两个位置可以选择。由乘法原理,同时悬挂红旗与黄旗共可以表示出 $3\times2=6$(种)不同的信号。同理同时悬挂红旗与蓝旗、同时悬挂黄旗与蓝旗也各可以表示 6 种不同的信号。所以,每次悬挂两面旗共可以表示 $6\times3=18$(种)不同的信号。

每次悬挂 3 面旗,可以分 3 步进行。第一步挂红旗,有 A,B,C 3 个位置可以选择;第二步挂黄旗,有除挂红旗外的两个位置可以选择;第三步挂蓝旗,只有 1 个位置可选择。由乘法原理,同时悬挂 3 面旗共能表示 $3\times2\times1=6$(种)不同的信号。

最后,由加法原理,共可以表示 $9+18+6=33$(种)不同的信号。

答:一共可以表示 33 种不同的信号。

【专题要点】

加法原理和乘法原理都是用来计算完成某一任务共有多少种不同的做法的。想分清应选择哪种原理解题,只需弄清楚:如果题目仅涉及“分类”,那么应用“加法原理”;如果题目中涉及“分步骤”,那么就要用“乘法原理”。有时需综合运用两种原理。

【我来试试】

1. 从 2,3,4,5,6,10,11,12 这 8 个数中,取出 2 个数,组成一个最简真分数,一共有多少种取法?

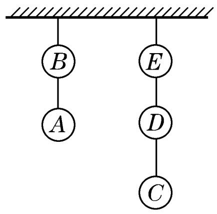
2. 中国足球彩票(胜负彩)每一注号码的填写方法是在每个方框中填写 1~3 中的任意号码:□□□□□□□□□□□□□,这样所有不同的填法共有多少种?

3. 小强买了 6 张邮票(如图),他想撕下相连的 4 张,共有多少种不同的撕法?

4. 晚会上,每一位男宾除自己的妻子以外与其他各人都握了手,而所有的女宾都不互相握手。如果 8 对夫妇参加这次晚会,问他们之间握手的总次数是多少?

5. 2006 年世界杯足球赛有 32 支球队参赛,被分成 8 个小组。按照规则,小组赛时每个小组 4 个队进行单循环比赛。小组出线后,以淘汰赛的形式分别进行 $\frac{1}{8}$ 决赛、$\frac{1}{4}$ 决赛、半决赛、三四名决赛、总决赛。那么,此届世界杯足球赛共进行了多少场比赛?

6. 甲、乙、丙、丁、戊 5 位同学参加一次节日活动,很幸运的是,他们都得到了一份精美的礼物。事情是这样的:墙上挂着两串礼物(如图),每次只能从其中一串的最下端取一件,直到礼物取完为止。甲第一个取得礼物,然后乙、丙、丁、戊依次取礼物,当然取法各种各样,那么共有多少种不同的取法?



专题 2　抽屉原理

【教师手记】《晏子春秋》里有一个“二桃杀三士”的故事，大意是：齐景公手下有 3 名勇士，为齐景公立过不少功劳。但他们居功自傲，目中无人，得罪了齐相晏婴（即晏子）。晏子便劝齐景公杀掉他们，并献上一计：以齐景公的名义赏赐 3 名勇士两个桃子，让他们按功劳的大小吃桃。3 名勇士都认为自己的功劳很大，应该单独吃一个桃子。结果两名功劳较小的勇士争吃了两桃，致使功劳最大的勇士因无桃可食羞愤自杀，两位吃桃的勇士也因羞愧难当相继自刎。

在这个故事中，我们除了欣赏到晏子高超的权谋之外，还应当注意到这里包含一个重要的数学原理——抽屉原理。抽屉原理是由 19 世纪德国数学家狄里希莱最先提出的，所以又称狄里希莱原理。简单地说，它包含以下两个基本原理：

原理 1：将 $n+1$ 个苹果放入 n 个抽屉中，则必有 1 个抽屉中至少放有 2 个苹果；

原理 2：将 $mn+1$ 个苹果放入 n 个抽屉中，则必有 1 个抽屉中至少放有 $m+1$ 个苹果。

在“二桃杀三士”的故事中，把两个桃子看做两个抽屉，将 3 名勇士放进去，至少有两名勇士在同一个抽屉里，即有两人必须合吃一个桃子。如果勇士们宁死也不肯忍受同吃一个桃子的羞耻，那么悲剧的结局就无法避免。

【技巧解析】

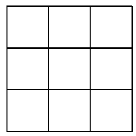
例 1　从 1，2，3，…，15 这 15 个数中，任取 9 个数，其中一定有两个数的和是 17，试说明之。

思路开启　把给定的 15 个数按和为 17 每两个数分为一组，剩下的一个数 1 单独成组，这样我们就确定了抽屉数，故本命题可以得到说明。

解答　把给定的 15 个数，按和为 17 每两个分为一组，计有（2，15），（3，14），…，（8，9）共 7 对，剩下的一个数 1。这样抽屉数为 $7+1=8$（个），苹果数为 9。依据原理 1 有 $9=8+1$，说明至少有一个抽屉被取了两个数。那么这两数之和恰好为 17，所以命题成立。

例 2　在边长为 3 米的正方形内，任意放入 28 个点。求证：必有 4 个点，以它们为顶点的四边形的面积不超过 1 平方米。

思路开启　将边长为 3 米的正方形等分为 9 个边长为 1 米的小正方形，并把这 9 个小正方形看作 9 个抽屉，28 个点看做 28 个苹果。本命题即可得到证明。



解答　把大正方形分割成 9 个边长为 1 米的小正方形（如图），每个小正方形的面积为 1 平方米。因为 $28=3\times9+1$，根据抽屉原理 2，至少有 $3+1=4$（个）点落在同一个小正方形内（或边上），这 4 个点所构成的四边形的面积必定小于或等于小正方形的面积，即以这 4 个点为顶点的四边形的面积不超过 1 平方米。

例 3　某校五年级学生身高的厘米数都是整数，并且在 140 厘米至 150 厘米之间（包括 140 厘米和 150 厘米），那么至少从多少学生中保证能找到 4 人的身高相同？

思路开启　从 140 到 150 之间共有 11 个整数，可以看做有 11 个抽屉。要保证有 4 人的身高相同，则每个抽屉里至少应放 3 人，

再根据抽屉原理 2 可以反求出人数。

解答　140 厘米到 150 厘米之间共有 11 个整数厘米，确定抽屉数为 11 个。每个抽屉至少应放 3 人则需要 $3\times 11=33$（人），再增加 1 人就能保证有 4 人身高相同。

$3\times 11+1=34$（人）。

答：至少需要 34 人。

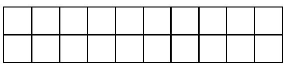
【专题要点】

运用抽屉原理的关键是“制造抽屉”。在有些问题中，“抽屉”不是很明显的，需要同学们抓住题目中主要的基本关系进行分类，设计抽屉的性质和个数。另外，需要多做一些题目以积累经验。

【我来试试】

1. 从 1～12 这 12 个自然数中，任取 7 个数，其中一定有两个数的差等于 6。试说明之。

2. 如图，两行 10 列共 20 个小方格，将每个小方格涂上红色、黄色、蓝色中的一种颜色。证明：不论怎样涂色，其中至少有两列，它们的染色方式相同。



3. 一个袋中放有 100 个小球，其中 28 个红球，20 个绿球，12 个黄球，20 个蓝球，10 个白球，10 个黑球。问应从袋中至少摸出多少个球，才能保证有 15 个球的颜色相同？

4. 5 个同学在一起练习投篮，共投进了 41 个球，那么至少有一个人投进了几个球？

5. 某班同学的数学考试成绩都是整数，其中最高分 100 分，最低分为 85 分。已知全班至少有 4 人的成绩相同，这个班至少有多少名学生？

6. 在一个半径为 10 米的圆形游泳池中有 7 个人在游泳，那么至少有 2 个人之间的距离不大于 10 米，为什么？

专题 3　分数的大小比较

【教师手记】 在现行的小学数学教材中，进行分数大小比较时，主要涉及到的方法是化成同分母分数比较。但如果仅仅运用这种方法，在实际的操作练习时，往往是事倍功半，特别是数字比较大的时候，更显得麻烦。结合平时的教学实践，下面给同学们介绍几种分数大小比较的方法和技巧。

【技巧解析】

例 1　将下列分数从小到大排列起来：$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{10}{23}$，$\frac{12}{29}$，$\frac{15}{37}$。

思路开启　比较分数大小，课本上介绍的方法主要是：先通分，再比较。但对本题而言，这种方法显然太麻烦了。我们可以根据“同分子的分数，分母大的分数反而小”这一性质，把这几个分数先化成同分子分数，再进行比较就容易了。

解答　2，3，10，12，15 的最小公倍数是 60，根据分数的基本性质，可以把它们分别化为：$\frac{60}{150}$，$\frac{60}{140}$，$\frac{60}{138}$，$\frac{60}{145}$，$\frac{60}{148}$。

因为$\frac{60}{150}<\frac{60}{148}<\frac{60}{145}<\frac{60}{140}<\frac{60}{138}$，所以$\frac{2}{5}<\frac{15}{37}<\frac{12}{29}<\frac{3}{7}<\frac{10}{23}$。

例 2　已知 $A=\frac{43}{45}$，$B=\frac{57}{59}$，试比较 A 与 B 的大小。

思路开启　（1）这两个分数的分子与分母的数值都比较大，无论是化成同分母分数比较，还是化成同分子分数比较，都不容易。但仔细观察，我们不难发现：两个分数的分子和分母都相差 2。由于这一特点，我们可以比较这两个分数与 1 的差，再根据“减法中，被减数相同，减数越大，差反而越小”的性质，确定两个分数的大小。

（2）这题我们也可以求出两个分数的倒数，根据“倒数越小，原分数越大”这一性质，确定两个分数的大小。

解答　（1）$1-\frac{43}{45}=\frac{2}{45}$，$1-\frac{57}{59}=\frac{2}{59}$，因为$\frac{2}{45}>\frac{2}{59}$，由“减法中，被减数相同，减数越大，差反而越小”可得到$\frac{43}{45}<\frac{57}{59}$，即 $A<B$。

（2）$\frac{43}{45}$的倒数是 $1\frac{2}{43}$，$\frac{57}{59}$的倒数是 $1\frac{2}{57}$。因为 $1\frac{2}{43}>1\frac{2}{57}$，由“倒数越小，原分数越大”可得到$\frac{43}{45}<\frac{57}{59}$，即 $A<B$。

例 3　比较$\frac{4}{9}$与$\frac{9}{19}$的大小。

思路开启　在小数除法中，我们知道，只要商大于 1，则被除数一定大于除数；反之，如果商小于 1，则被除数一定小于除数。这一规律同样适用于分数除法。因此在比较两个数的大小时，我们可以用第一个分数除以第二个分数，根据商是否大于 1 来进行判断。

解答　因为$\frac{4}{9}\div\frac{9}{19}=\frac{4}{9}\times\frac{19}{9}=\frac{76}{81}$，而$\frac{76}{81}$小于 1，根据“商小于 1，被除数一定小于除数”可以得出：$\frac{4}{9}<\frac{9}{19}$。

【专题要点】

上述列举的这些比较大小的问题，解法上都或多或少地带有技巧性，除了课本上所介绍的同分母或同分子比较外，常用的比较大小的技巧还有：

1．化成小数进行比较。

2. 差数比较法。当每个分数分子与分母的差一定时，可先比较它们与1（或其他某个数）的差，再比较大小。

3. 倒数比较法。先比较倒数，倒数小的分数反而大。

4. 商数比较法。用第一个分数除以第二个分数。如果商大于1，则第一个分数大于第二个分数；反之则相反。

5. 参照数比较法。根据数值的特点，确定某个参照数$\left(例如\frac{1}{2}\right)$，先分别比较每个分数与参照数的大小，再确定每个分数的大小。

6. 乘积比较法。把一个分数的分子和另一个分数的分母交叉相乘，靠近较大积的分数比较大。如$\frac{4}{9}$和$\frac{9}{19}$，即$\frac{4\times9}{9\times9}$，$\frac{9\times4}{19\times4}$，因为$81>76$，所以$\frac{4}{9}<\frac{9}{19}$。

【我来试试】

1. 将下列几个分数从小到大排列起来：

(1) $\frac{5}{17}$，$\frac{6}{19}$，$\frac{15}{46}$，$\frac{10}{33}$；

(2) $\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$，$\frac{12}{19}$。

2. 试比较$\frac{111}{1111}$与$\frac{1111}{11111}$的大小。

3. 把下列分数用“>”连接起来。

$\frac{5}{9}$，$\frac{9}{13}$，$\frac{21}{25}$，$\frac{99}{103}$，$\frac{15}{19}$，$\frac{67}{71}$。

4. 在下面4个算式中，哪一个算式结果最小？

(1) $15\times1\frac{1}{99}$；　　(2) $15\div\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$；

(3) $15.2\div\frac{4}{5}$；　　(4) $14.8\times\frac{73}{74}$。

5. 已知$A=\frac{451+567\times450}{451\times567-116}$，$B=\frac{450}{451}$，试比较$A$与$B$的大小。

6. 当$\frac{3}{10}<\frac{(\quad)}{12}<\frac{17}{20}$时，(　　)里可以填哪些整数？

专题4　运用定律、性质简算

【教师手记】　学习数学离不开数的计算，而学习数学的最终目的在于运用所学的数学知识、技能来解决实际问题。因此，要学好数学，就必须做到计算准确而迅速。

在分数、小数的四则运算中，我们可以根据数据的特点，通过对数据合理的分解、合并，改变原来的运算顺序而达到简便计算的目的；有时也运用四则运算的定律、性质，或利用和、差、积、商的变化规律，使计算简便。计算是数学的基本功，简便计算不仅可以使计算过程简捷，提高计算的正确率，而且可以使我们的思维能力得到提高。

【技巧解析】

例1　**计算**：(1) $3.6\times31\frac{2}{5}+3.14\times64$；

(2) $3\frac{3}{5}\times15\frac{2}{5}+27.9\times6\frac{2}{5}$。

思路开启　(1) 观察题中的两组乘法算式可以发现 3.14×64，根据积的变化规律就是 31.4×6.4，这样就可以运用乘法分配律进行简算；(2) 我们注意观察 $3\frac{3}{5}$ 和 $6\frac{2}{5}$，因为它们的和为 10。但是，只有当分别与它们相乘的另一个因数相同时，我们才能运用乘法分配律简算。因此，我们不难想到把 27.9 分拆成 15.4 与 12.5 两部分。当出现 12.5 与6.4相乘时，我们又可以将 6.4 看成 8×0.8，这样计算就简便多了。

解答　(1) 原式$=3.6\times31.4+31.4\times6.4=(3.6+6.4)\times31.4=10\times31.4=314$；

(2) 原式$=3\frac{3}{5}\times15\frac{2}{5}+(15.4+12.5)\times6.4=(3.6+6.4)\times15.4+12.5\times8\times0.8=154+80=234$。

例2　**计算下面各题。**

(1) $64\frac{1}{17}\div9$；　(2) $2003\div2003\frac{2003}{2004}$。

思路开启　同学们都会计算带分数除法，但相信同学们看了这两题后，都会感到把带分数化成假分数来计算太麻烦了。如果我们开动脑筋想一想，就会发现：可以把题(1)中的 $64\frac{1}{17}$ 分成一个 9 的倍数与另一个较小的数，再利用除法的性质就可以简算；把题(2)中的被除数和除数利用商不变的性质，同时除以 2003 后，计算就很简便了。

解答　(1) $64\frac{1}{17}\div9=\left(63+1\frac{1}{17}\right)\div9=63\div9+\frac{18}{17}\times\frac{1}{9}=7\frac{2}{17}$；

(2) $2003\div2003\frac{2003}{2004}=(2003\div2003)\div\left(2003\frac{2003}{2004}\div2003\right)=1\div(2003\div2003+\frac{2003}{2004}\div2003)=1\div1\frac{1}{2004}=\frac{2004}{2005}$。

例3　**计算**：$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$。

思路开启　这道题虽然算式很长，但仔细分析其中的数据，可以发现组成这个算式的数并不多。我们可以把重复出现的数用字母来表示，这样可以简化题意，方便我们进行简算。

解答　设$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=A$，$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=B$，原来的算式可以转化成：$(1+A)\times$

$B-B\times A=B+AB-AB=B$。

所以本题的结果为：$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=1\frac{9}{20}$。

【专题要点】

要想能够灵活地进行计算，提高计算能力，首先需要掌握好各种运算的定律、法则和性质；其次是掌握一些简算的技巧：

1. **灵活运用乘法分配律。当我们观察到乘法算式中有一个因数可以凑整时，一定要仔细分析另一个因数的特点，尽量进行变换拆分，从而使用乘法分配律进行简算。**

2. **合理地进行数的分解。当我们观察到一个因数（或被除数）接近另一个因数的分母（或除数），或接近它们的整数倍时，应当合理地把这个因数（或被除数）进行分解，以达到简算的目的。**

3. **适当运用字母代替。当我们发现组成某个算式的数有重复出现的现象时，可以用字母表示重复出现的数，从而简化题意，方便简算。**

【我来试试】

1. **计算**：(1) $55\times\frac{55}{56}$；

(2) $167\div167\frac{167}{168}$。

2. **计算**：$\left(1+\frac{3}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{9}\right)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{9}\right)-\left(1+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{9}\right)\times\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{9}\right)$。

3. **计算**：$1\frac{1}{4}\times17.6+36\div\frac{4}{5}+2.64\times12.5$。

4. **计算**：$51\frac{2}{3}\div\frac{5}{3}+71\frac{3}{4}\div\frac{7}{4}+91\frac{4}{5}\div\frac{9}{5}$。

5. **计算**：$76\times\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{53}\right)+23\times\left(\frac{1}{53}+\frac{1}{76}\right)-53\times\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{76}\right)$。

6. **计算**：$3\times\frac{2}{13}+4\times\frac{3}{7}+5\times\frac{4}{13}+6\times\frac{5}{7}$。

专题 5　分数数列的计算

【教师手记】 高斯是19世纪德国的著名数学家。他从小喜爱数学，善于思考，聪明过人。他最出名的故事是在他10岁时，小学老师出了一道算术题：计算$1+2+3+\cdots+100=$？小高斯看了看题目，想了一下，很快写出了正确的答案，他的同学和老师无不为之惊奇。同学们，你们知道他是怎么算出来的吗？原来小高斯在认真审题的基础上，根据算术级数的对称性，发现了其中的规律：$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，…，$50+51=101$，一共有50对和为101的数，所以答案是$101\times50=5050$。由此，可以归纳出一个公式，即等差数列的求和公式：和=(首项+末项)×项数÷2，用字母公式表示是：$S=(a_1+a_n)\times n\div2$，这就是世界闻名的高斯算法。有了它，很多数学问题解答起来就很容易了。

【技巧解析】

例 1　计算：$1\frac{1}{19}+2\frac{2}{19}+3\frac{3}{19}+\cdots+18\frac{18}{19}$。

思路开启　可以运用分类计算的策略，即整数部分归为一类，分数部分归为一类，分别运用等差数列求和公式求和，最后相加即可。

解答　原式$=(1+2+3+\cdots+18)+\left(\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\cdots+\frac{18}{19}\right)=(1+18)\times18\div2+\left(\frac{1}{19}+\frac{18}{19}\right)\times18\div2=171+9=180$。

例 2　计算：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{99}{100}+\frac{100}{100}$。

思路开启　解决本题的基本思路是：把分母相同的归为一类，分别求和。不过，有同学会认为：这题可分为100类，分别求100类分数的和也很麻烦。不用担心这个问题，我们可以先求其中几类的和，看看其中是否存在规律。$\frac{1}{1}=1$，$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=1.5$，$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=2$，$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=2.5$，$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{5}=3$，…可以发现，这些和排列起来也是一个等差数列。

解答　原式$=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{99}{100}+\frac{100}{100}\right)=1+1.5+2+\cdots+50.5=(1+50.5)\times100\div2=2575$。

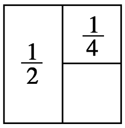
例 3　计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{1024}$。

思路开启　这道题数字大，算式又长，而且也不是等差数列，怎么办？还是先从简单的开始分析：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$。

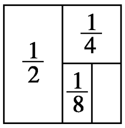
显然：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$。

结果是算出来了，这其中有什么道理呢？

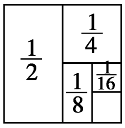
通过观察，可以发现数列中每后一个数都是前一个数的一半，看下图同学们就明白了。



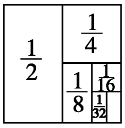
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}$



…

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=1-\frac{1}{32}$

解答 **原式**$=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$。

【专题要点】

解决有关数列问题，需要我们通过观察、比较、分析，找出数的排列规律，这是解决数列问题的关键。解决数列问题的主要方法是转化与分组。常用的分类方法有：(1) 将整数归为一类，分数归为一类；(2) 将加法计算的归为一类，减法计算的归为一类；(3) 分母相同的归为一类。著名数学家华罗庚曾说过：难处不在于有了公式去证明，而在于没有公式前，怎样去找出公式来。因此，同学们，解决数列问题绝不能生搬死套高斯求和公式，否则就可能搬起石头砸了自己的脚。

【我来试试】

1. **计算**：$\frac{1}{55}+\frac{2}{55}+\frac{3}{55}+\cdots+\frac{10}{55}-\frac{11}{155}-\frac{12}{155}-\frac{13}{155}-\cdots-\frac{20}{155}$。

2. **计算**：$\left(1+\frac{1}{49}\right)+\left(2+\frac{1}{49}\times 2\right)+\left(3+\frac{1}{49}\times 3\right)+\cdots+\left(49+\frac{1}{49}\times 49\right)$。

3. **计算**：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{99}{100}+\frac{100}{100}+\frac{99}{100}+\cdots+\frac{2}{100}+\frac{1}{100}$。

4. **计算**：$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{48}-\frac{1}{96}-\frac{1}{192}$。

5. **计算**：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{13}{14}+\frac{13}{15}\right)+\frac{14}{15}$。

6. **计算**：$7-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}-\frac{9}{8}-\frac{17}{16}-\frac{33}{32}-\frac{65}{64}$。

专题6　运用约分法简算

【教师手记】 小学数学教材中所说的约分，就是将分数的分子和分母同时除以它们的公约数（1除外），使分数成为一个分子和分母都比较小而大小不变的分数。这里所说的约分法与教材相比稍有变化，是指将写成分数形式的算式中分子部分与分母部分同时除以它们的公有因数或公有因式，从而简化计算过程达到简算的目的。如 $\dfrac{3\times\left(1\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{5\times\left(1\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}$ 的分子部分与分母部分都有因式 $\left(1\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)$，就可以将其“约分”，化简为 $\frac{3}{5}$。

【技巧解析】

例1　计算： $\left(13\frac{2}{11}+11\frac{2}{13}\right)\div\left(\frac{5}{11}+\frac{5}{13}\right)$。

思路开启　仔细分析算式，可以发现被除数部分与除数部分中两个分数的分母分别相同，据此可将被除数部分与除数部分分别变形。被除数 $13\frac{2}{11}+11\frac{2}{13}=\frac{145}{11}+\frac{145}{13}=145\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)$，除数 $\frac{5}{11}+\frac{5}{13}=5\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)$，可将 $\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$ 作为公有因式。

解答　原式 $=\left(\frac{145}{11}+\frac{145}{13}\right)\div\left(\frac{5}{11}+\frac{5}{13}\right)=\dfrac{145\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)}{5\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)}=29$。

例2　2006减去它的 $\frac{1}{2}$，再减余下的 $\frac{1}{3}$，再减又余下的 $\frac{1}{4}$，以后每次减余下的 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，…以此类推，一直减到最后余下的 $\frac{1}{2006}$，那么最后得多少？

思路开启　显然，本题如果一步步地解答，可能只有计算机能担此重任。可以这样思考：2006减去它的 $\frac{1}{2}$，还剩下 $2006\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$；再减余下的 $\frac{1}{3}$，还剩下余下的 $1-\frac{1}{3}$，即 $2006\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$；以此类推，最后剩下的应是 $2006\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{2006}\right)$。运用约分法可以轻松得到结果。

解答　$2006\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{2006}\right)=2006\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2005}{2006}=1$。

答：最后得1。

【专题要点】

运用约分法的关键是：根据运算定律和性质将分子与分母转化、改写、变形，找出其公有因式。一般说来，应注意以下技巧：

1. 两数相除，如果两数都是由一些数字反复组成，可先将其分解质因数，然后用约分法简算。

2. 改写成分数形式后，如果分子分母中

有小数的，一般先运用分数的基本性质使分子与分母部分扩大相同的倍数，成为整数后再约分。

3. 分数$\frac{a}{b}(b\neq0)$可以写成$\frac{1}{b}\times a$，$\frac{a}{b}\times c$可写成$a\times\frac{c}{b}$。

4. 因为$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}(a\neq0)$，所以$\frac{b\pm c}{a}=\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}$。

【我来试试】

1. 计算：(1) $\left(9\frac{1}{11}+11\frac{1}{9}\right)\div\left(\frac{4}{11}+\frac{4}{9}\right)$；

(2) $\left(9\frac{2}{7}+7\frac{2}{9}\right)\div\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{9}\right)$。

2. 计算：$\frac{1.1+2.2+3.3+4.4+5.5+6.6}{11+22+33+44+55+66}$。

3. 计算：

$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{888\times888}$。

4. 2006加上它的$\frac{1}{2}$，再加上现在和的$\frac{1}{3}$，然后再加上现在和的$\frac{1}{4}$，以此类推，一直加上现在和的$\frac{1}{2006}$，结果是多少？

5. 计算：

$\frac{1\times2+2\times4+3\times6+4\times8+\cdots+100\times200}{2\times3+4\times6+6\times9+8\times12+\cdots+200\times300}$。