



目 录

基础篇	(1)
第一讲 复数的概念	(2)
1.1 数的概念的发展和复数的概念	(2)
1.2 复平面和共轭复数	(18)
1.3 复数的向量表示	(31)
高考热点题型评析与探索	(51)
本讲测试题	(55)
第二讲 复数的运算与复数集内的方程	(65)
2.1 复数的四则运算及性质	(65)
2.2 复数集内的方程	(83)
高考热点题型评析与探索	(101)
本讲测试题	(105)
第三讲 复数与三角函数的联系	(118)
3.1 复数的三角形式	(118)
3.2 复数的三角形式的运算	(142)
高考热点题型评析与探索	(165)
本讲测试题	(170)
第四讲 复数与平面向量的联系	(183)
4.1 复数加减法的几何意义	(183)
4.2 复数的乘法、除法、乘方、开方的几何意义	(204)
高考热点题型评析与探索	(221)
本讲测试题	(225)
综合应用篇	(231)
一、复数的模的应用	(231)
二、复数的辐角主值的应用	(242)
综合应用测试题	(260)

基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简称研究“数”和“形”的学科.代数是数学中侧重研究运算方法的一个分支,复数是代数的一个节点.

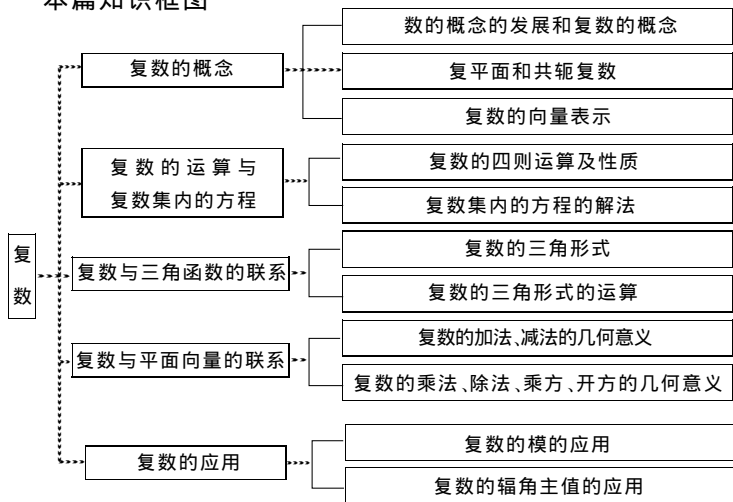
复变量 $z=a+bi$ 区别于实变量的显著标志是它由两个实变量 a 与 b 有序构成. z 的变化受 a, b 的共同制约,而不是只受 a, b 之一的制约.

复数的本质是以 $a+bi$ 为整体,研究整体形式下的变量的运算规律,其表现形式是代数运算、三角运算、几何运算.

复数 $z=a+bi$ 当 $b=0$ 时为实数,此时复数论与实数论完全等同.所以 $b=0$ 与 $b \neq 0$ 是复数集 C 与实数集 R 的分界线,后续理论都在 $b \neq 0$ 上.

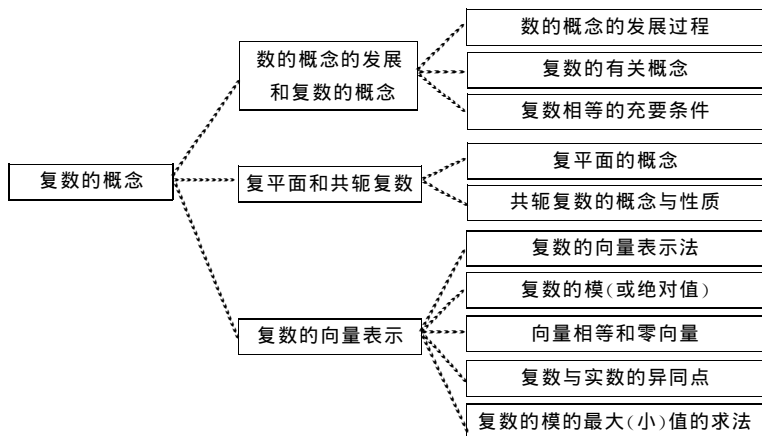
解决复数问题的思维模式是“化虚为实”、“整体运用”.

本篇知识框图



第一讲 复数的概念

本讲知识框图



学习指导

[考纲要求]

了解复数的有关概念,了解复数的代数表示和几何意义.
了解从自然数系到复数系的关系及扩充的基本思想.

1.1 数的概念的发展和复数的概念

重点难点归纳

- 重点** ①了解数的概念的发展过程,理解数集扩充到复数集的必然性.②掌握复数的有关概念,并能熟练地运用复数的这些概念解题.③熟记复数相等的充要条件,并能熟练地运用这些条件解决有关问题.
- 难点** ①准确区分复数集与实数集,复数集与虚数集,虚数集与纯虚数集之间的包含关系.②复数有关概念的应用.
- 本节需掌握的知识点** ①复数的有关概念.②复数相等的充要条件.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 数的概念的发展过程

数的概念是从实践中产生和发展起来的. 早在人类社会初期, 由于计数的需要, 人们就建立了正整数的概念. 正整数的全体构成正整数集 \mathbf{N}^* (或 \mathbf{N}_+).

随着生产和科学的发展, 数的概念也得到发展.

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求, 人们引进了零及负整数, 把自然数看作正整数和零, 把自然数、负整数合并在一起, 构成整数集 \mathbf{Z} .

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题, 人们又引进了分数, 分数集实际上就是有理数集 \mathbf{Q} .

为了解决有些量与量之间的比值(例如, 用正方形的边长去度量它的对角线所得结果)不能用有理数表示的矛盾, 人们又引进了无理数. 有理数集与无理数集合并在一起, 构成实数集 \mathbf{R} .

数的范围扩充到实数集 \mathbf{R} 以后, 像 $x^2 = -1$ 这样的方程还是无解, 因为没有 一个实数的平方等于 -1 . 在十六世纪, 由于解方程的需要, 人们开始引进一个新数 i , 叫做虚数单位, 并规定:

(1) 它的平方等于 -1 , 即 $i^2 = -1$.

(2) 实数可以与它进行四则运算, 进行四则运算时, 原有的加、乘运算律仍然成立.

在这种规定下, i 可以与实数 b 相乘, 再同实数 a 相加, 由于满足乘法交换律及加法交换律, 从而可以把结果写成 $a+bi$. 这样, 数的范围又扩充了, 出现了形如 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的数, 人们把它们叫做复数. 全体复数构成的集合, 一般用字母 \mathbf{C} 来表示.

2. 复数的有关概念

(1) 实数 a, b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部和虚部;

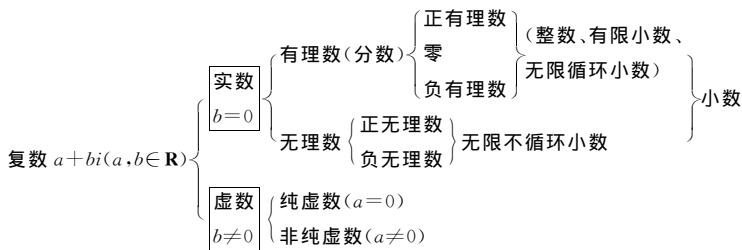
(2) 复数 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当 $b=0$ 时, 就是实数;

(3) 复数 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当 $b \neq 0$ 时, 叫做虚数;

(4) 复数 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 叫做纯虚数.

(5) 复数的分类:

(2)、(3)、(4) 是
解题依据, 必须
背下来



(6) 两个复数, 如果不全是实数, 就不能比较大小.

3. 复数相等的充要条件

对于复数 $a+bi$ 和 $c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$, 它们相等的充分必要条件是

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d;$$

特别地, $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$.

“化虚为实”就是从这儿开始的

复数相等的充要条件, 开辟了把复数问题转化为实数问题的新途径.

解题方法指导

1. 复数相等的充要条件

[例 1] 已知 $(2x+1)+i=y+(3-y)i$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$. 求 x 与 y .

[分析] 由复数相等的充要条件知, 当且仅当实部相等且虚部相等, 列出关于 x 与 y 的二元一次方程组, 求解后可得 x 与 y .

[解] 根据复数相等的充要条件, 得方程组

$$\begin{cases} 2x+1=y, \\ 1=3-y, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$$

[点评] 复数是二元形式的, 通过实部、虚部分别相等, 得两个等式, 可求 x 和 y 的值.

[例 2] 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} (2x-1)+i=y-(3-y)i, & \text{①} \\ (2x+ay)-(4x-y+b)i=9-8i & \text{②} \end{cases}$

有实数解, 求实数 a 与 b 的值.

[解] 由方程①, 得

$$\begin{cases} 2x-1=y, \\ 1=-(3-y), \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=\frac{5}{2}, \\ y=4. \end{cases}$ 关键在求出 x, y

把 x 与 y 的值代入方程②, 得

$$(5+4a)-(6+b)i=9-8i.$$

$$\therefore a, b \in \mathbf{R},$$

$$\therefore \begin{cases} 5+4a=9, \\ 6+b=8, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$

[点评] 求 a 与 b 的值, 需要先求 x, y , 这是通过对②的观察得到的. 解本题, 先后顺序直接关系到解题的成败.

[例 3] 设方程 $(1+i)x^2 + (1+5i)x - (2-6i) = 0$ 有实根, 求这个实数根.

[分析] 将方程的实根 x_0 代入方程, 由复数相等的充要条件可得方程组, 求解即可.

[解] 方程整理为 $(x^2+x-2)+i(x^2+5x+6)=0$.

设方程的实根为 x_0 , 则 化虚为实, 即把复数问题转化为实数问题解决

$$\begin{cases} x_0^2+x_0-2=0, & \text{①} \\ x_0^2+5x_0+6=0. & \text{②} \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x_0=1 \text{ 或 } -2, \\ x_0=-3 \text{ 或 } -2. \end{cases}$$

同时满足①、②的值为 $x_0=-2$.

保证①、②两个条件都成立

\therefore 所求的根为 $x_0=-2$.

[例 4] 如果方程 $(1+i)x^2 - 2(a+i)x + 5 - 3i = 0 (a \in \mathbf{R})$ 有实数解, 那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

[分析] 方程的实数解必然适合方程. 设 $x=x_0$ 为方程的实数解, 代入方程, 方程具有 $c+di=0$ 的形式 ($c, d \in \mathbf{R}$). 由复数相等的充要条件, 可得关于 x_0 与 a 的方程组, 解方程组便可求得 x_0 与 a .

[解] 原方程整理为

$$(x^2-2ax+5)+(x^2-2x-3)i=0.$$

设方程的实根为 x_0 , 代入方程得

$$(x_0^2 - 2ax_0 + 5) + (x_0^2 - 2x_0 - 3)i = 0.$$

由复数相等的充要条件, 得

$$\begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 + 5 = 0, & \text{①} \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $x_0 = 3$ 或 $x_0 = -1$; 代入①得 $a = \frac{7}{3}$ 或 $a = -3$.

$$\therefore a = \frac{7}{3} \text{ 或 } a = -3.$$

[点评] 一般地, 根据复数相等的充要条件, 可以由两个复数相等的式子, 得到两个实数方程所组成的方程组, 从而可以用来确定两个独立参数(参数必须为实数或纯虚数).

2. 复数的有关概念

[例5] m 为何实数时, $z = (2m^2 - 5m + 2) + (3m^2 - 4m - 4)i$; (1) 是实数; (2) 是纯虚数; (3) 对应点在第四象限.

[分析] 复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$: z 为实数 $\Leftrightarrow b = 0$; z 为纯虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b \neq 0; \end{cases}$ z 的

对应点在第四象限 $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b < 0. \end{cases}$

[解] (1) 由 $3m^2 - 4m - 4 = 0$, 得 $m = -\frac{2}{3}$ 或 $m = 2$,

\therefore 当 $m = -\frac{2}{3}$ 或 $m = 2$ 时, 复数 z 为实数.

(2) 复数 z 为纯虚数的充要条件是 $\begin{cases} 2m^2 - 5m + 2 = 0, \\ 3m^2 - 4m - 4 \neq 0, \end{cases}$

解得 $m = \frac{1}{2}$.

\therefore 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 复数 z 为纯虚数.

(3) 由 $\begin{cases} 2m^2 - 5m + 2 > 0, \\ 3m^2 - 4m - 4 < 0, \end{cases}$ 得 $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{2}$,

\therefore 当 $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{2}$ 时, 复数 z 的对应点在第四象限.

【例6】 m 取何实数时,复数 $z = \frac{m^2 - m - 6}{m + 3} + (m^2 - 2m - 15)i$ 是实数? 是虚数? 是纯虚数?

【分析】 本题是判断复数在什么情况下为实数、虚数、纯虚数. 只要我们紧紧抓住“设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 若 $b = 0$, 则 $z \in \mathbf{R}$; 若 $b \neq 0$, 则 z 是虚数; 若 $a = 0, b \neq 0$, 则 z 是纯虚数”这样三条主线, 此题就极易解决.

【解】 (1) 当 $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 = 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$ 时, 分母不为 0 不能忽视

即 $\begin{cases} m = 5 \text{ 或 } m = -3, \\ m \neq -3 \end{cases}$ 时, 亦即 $m = 5$ 时, $z \in \mathbf{R}$.

(2) 当 $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$ 时, 即 $m \neq -3$ 且 $m \neq 5$ 时, z 是虚数.

(3) 当 $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m^2 - m - 6 = 0, \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$ 时, 即 $\begin{cases} m \neq -3 \text{ 且 } m \neq 5, \\ m = 3 \text{ 或 } m = -2, \\ m \neq -3 \end{cases}$ 时, 亦即 $m = 3$ 或

$m = -2$ 时, z 是纯虚数.

【例7】 实数 m 分别取什么数值时, 复数 $z = (m^2 + 5m + 6) + (m^2 - 2m - 15)i$:

- (1) 是实数;
- (2) 是虚数;
- (3) 是纯虚数;
- (4) 对应点在 x 轴的上方;
- (5) 对应点在直线 $x + y + 5 = 0$ 上.

【分析】 运用 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 是实数、虚数、纯虚数的条件和 $z = a + bi$ 与点 $Z(a, b)$ 的对应关系进行求解.

【解】 (1) 由 $m^2 - 2m - 15 = 0$ 可知, $m = 5$ 或 $m = -3$ 时, z 为实数;

(2) 由 $m^2 - 2m - 15 \neq 0$ 可知, $m \neq 5$ 且 $m \neq -3$ 时, z 为虚数;

(3) 由 $\begin{cases} m^2 - 2m - 15 \neq 0, \\ m^2 + 5m + 6 = 0 \end{cases}$ 可知, $m = -2$ 时, z 为纯虚数;

(4) 由 $m^2 - 2m - 15 > 0$ 可知, $m < -3$ 或 $m > 5$ 时, z 的对应点在 x 轴的上方;

按实部、虚部的符号区分

(5) 由 $(m^2 + 5m + 6) + (m^2 - 2m - 15) + 5 = 0$ 可知, $m = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$ 或 $m = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ 时, z 的对应点在直线 $x + y + 5 = 0$ 上.

点的坐标适合直线方程

【点评】类似本例的问题,一般都是运用复数的相关概念将问题转化为关于 m 的方程或不等式来解.

【例 8】已知复数 $z = m^2(1+i) - (m+i)$ ($m \in \mathbf{R}$), 当 m 为何值时, 复数 z :

- (1) 是实数;
- (2) 是虚数;
- (3) 是纯虚数.

【分析】由于所给复数 z 为非标准形式, 需将 z 整理为标准形式后, 再按题目要求, 对实部和虚部分别进行处理.

【解】 $z = (m^2 - m) + (m^2 - 1)i$.

(1) 由 $m^2 - 1 = 0$, 得 $m = \pm 1$;

(2) 由 $m^2 - 1 \neq 0$, 得 $m \neq \pm 1$;

(3) 由 $\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0, \\ m^2 - m = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} m \neq \pm 1, \\ m = 0 \text{ 或 } 1, \end{cases}$ 即 $m = 0$.

【例 9】求 θ , 使复数 $z = (2\sin^2\theta - \sin\theta) + (3\tan^2\theta - 1)i$ 是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数;
- (3) 零.

【分析】复数 z 的实部、虚部是用三角函数的形式给出的, 按照题目要求得到三角等式(方程)或三角不等式即可.

【解】(1) 由 $3\tan^2\theta - 1 = 0$, 得 $\tan\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, z 是实数.

θ 为满足条件的所有实数

(2) 由 $\begin{cases} 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0, \\ 3\tan^2\theta - 1 \neq 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0, \\ \tan\theta \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$

$\therefore \theta = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, z 是纯虚数.

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0, \\ 3\tan^2\theta - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得}$$

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}), z = 0.$$

【例 10】 设复数 $(-3+k^2) - (k^2-2)i$ 所对应的点在第三象限内, 求 k 的取值范围.

【分析】 由复数 $z = a + bi$ 和点 $Z(a, b)$ 的对应关系, 实部小于 0, 虚部小于 0, 得不等式组, 求解即可.

【解】 由已知, 表示复数的点在第三象限,

$$\therefore \begin{cases} -3+k^2 < 0, \\ -(k^2-2) < 0, \end{cases}$$

点 $(-3+k^2, -k^2+2)$ 的横、纵坐标都小于零

解这个不等式组, 得

$$-\sqrt{3} < k < -\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2} < k < \sqrt{3}.$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

基础达标演练

一、选择题

- “复数 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 为纯虚数”是“ $a = 0$ ”的 ()
 - 充分但不必要条件
 - 必要但不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分又不必要条件
- $m \in \mathbf{R}$, 复数 $(2m^2 - 3m - 2) + (m^2 - 3m + 2)i$ 表示纯虚数的条件是 ()
 - $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 2$
 - $m = 2$
 - $m = -\frac{1}{2}$
 - $m = 2$ 或 $m = 1$
- 设 $C = \{\text{复数}\}$, $A = \{\text{实数}\}$, $B = \{\text{纯虚数}\}$, 全集 $I = C$, 则下列结论中正确的是 ()
 - $A \cup B = C$
 - $\complement_I A = B$
 - $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
 - $B \cup (\complement_I B) = C$
- 若 $z_1 = \sin 2\theta + i \cos \theta$, $z_2 = \cos \theta + i \sqrt{3} \sin \theta$, $z_1 = z_2$, 则 θ 等于 ()
 - $k\pi (k \in \mathbf{Z})$
 - $2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$
 - $2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$
 - $2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$

二、填空题

5. 方程 $(2+i)x^2 - (5+i)x + (2-2i) = 0$ 的实数解 $x =$ _____.

6. 复数 $z = x^2 - 2x - 3 + [(\log\frac{1}{2}x)^2 - \log\frac{1}{2}x - 2]i$ 是虚部为正实数的非纯虚数, 则实数 x 的取值范围是 _____.

7. 已知 $M = \{1, 2, (a^2 - 3a - 1) + (a^2 - 5a - 6)i\}$, $N = \{-1, 3\}$, $M \cap N = \{3\}$, 则实数 a _____.

8. 复数 $z = (a^2 - 2a + 3) - (a^2 - a + \frac{1}{2})i$ ($a \in \mathbf{R}$) 在复平面内的对应点位于 _____ 象限.

三、解答题

9. 使复数 $z = a^2 - a - 6 + \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 4}i$ 为纯虚数的实数 a 是否存在? 存在, 求出 a 的值; 不存在, 说明理由.

10. 关于 x 的方程 $a(1+i)x^2 + (1+a^2i)x + a^2 + i = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 有实根, 求 a 及方程的根.

答案与提示

一、选择题

1. A (若 $a+bi$ 为纯虚数, 则 $a=0$ 且 $b \neq 0$; 而 $a=0$ 时, bi 可能是纯虚数, 也可能是 0.)

2. C ($a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 表示纯虚数的条件是 $\begin{cases} a=0, \\ b \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}, \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$ 解

方程 $\textcircled{1}$ 得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 2$, 代入 $\textcircled{2}$ 知 $m = 2$ 时, $m^2 - 3m + 2 = 0$, 使原复数为 0, 舍去.)

3. D (根据复数集分类直接判断选 D.)

4. D ($\because z_1 = z_2, \therefore \begin{cases} \sin 2\theta = \cos \theta \cdots \textcircled{1}, \\ \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$ 由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 可知 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$).)

二、填空题

5. 设实数解为 x_1 , 则 $(2x_1^2 - 5x_1 + 2) + (x_1^2 - x_1 - 2)i = 0$. $\because x_1 \in \mathbf{R}$,

$\therefore \begin{cases} 2x_1^2 - 5x_1 + 2 = 0, \\ x_1^2 - x_1 - 2 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x_1 = 2, \\ x_1 = -1 \text{ 或 } x_1 = 2, \end{cases} \therefore x_1 = 2, \text{ 即原方程的实数}$

解为 $x = 2$.

6. 由题意, 有 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 > 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \neq -1, x \neq 3, \\ x > 2 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{4}. \end{cases}$ $\therefore x \in (0,$

$\frac{1}{4}) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$, $\therefore x$ 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

7. 按题意 $(a^2 - 3a - 1) + (a^2 - 5a - 6)i = 3$, $\therefore \begin{cases} a^2 - 5a - 6 = 0, \\ a^2 - 3a - 1 = 3, \end{cases}$ 解得 $a = -1$.

8. 实部 $a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 > 0$, 虚部 $-(a^2 - a + \frac{1}{2}) = -(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0$, 实部大于 0, 虚部小于 0, 点 Z 在第四象限.

三、解答题

9. 假设 z 为纯虚数, 则 $\begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \cdots \textcircled{1}, \\ \frac{a^2 + 2a - 15}{a^2 - 4} \neq 0 \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$ 由 $\textcircled{1}$ 得 $a = -2$, 或 $a = 3$. 当 $a =$

-2 时, $\textcircled{2}$ 式左端无意义; 当 $a = 3$ 时, $\textcircled{2}$ 式不成立. \therefore 不存在实数 a , 使 z 为纯虚数.

10. \therefore 方程有实根, $\therefore x \in \mathbf{R}$. 又 $a \in \mathbf{R}$, $\therefore \begin{cases} ax^2 + a^2x + 1 = 0, \\ ax^2 + x + a^2 = 0, \end{cases}$ 相减得 $(a^2 - 1)x =$

$a^2 - 1$. (1) 当 $a^2 - 1 \neq 0$ 时, $x = 1$, 代回原方程, 此时 $a^2 + a + 1 = 0$ 无实解. (2) 当 $a^2 -$

$1 = 0$ 时, $\textcircled{1} a = 1$ 时, $x^2 + x + 1 = 0$ 无实根; $\textcircled{2} a = -1$ 时, $x^2 - x - 1 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 综

上所述, $a = -1$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 符合题意.

视野拓展

释疑解难

解决复数问题的两条主线——化虚为实, 整体运用

虚数单位 i 的加盟, 使得数的理论体系中出现了形如 $a + bi$ 的数, 其中 a, b 都是实数. a 与 b 都不能独立地确定 $z = a + bi$, 要确定 $z = a + bi$, 必须由 a 与 b 联手完成. 在中国语言中, 两个或两个以上才有“复”的内涵, 这样我们才有理由称 $z = a + bi$ 为复数. 全体复数构成复数集 \mathbf{C} , \mathbf{C} 的理论体系与 \mathbf{R} 的理论体系之间存在怎样的联系和差异呢?

1. 化虚为实

对于复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 如果 $b = 0$, 那是我们过去熟知的实数理论. 因此, 学习复数, 后续理论的焦点是“ $b \neq 0$ ”.

用已有的知识解决未知的问题, 符合常人的思维习惯, 这是无可厚非的. 所以, 我们这里讲的“化虚为实”, 其本质就是把“ $z = a + bi$ ”中的“ a ”与“ b ”分离出来, 通过对“ a ”与“ b ”的研究, 实施对“ $z = a + bi$ ”的讨论.

如 $z_1 = a - 1 + (b + 2008)i = 2009 + 2010i = z_2$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 问 $a = ?$, $b = ?$ 这个问题, 我们用 z_1 与 z_2 的直接关系是不好解决的, 但是根据

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R})$$

可得

$$\begin{cases} a - 1 = 2009, \\ b + 2008 = 2010, \end{cases} \quad \leftarrow \text{实数问题}$$

这不就是“化虚为实”吗?!

又如, 设 $m \in \mathbf{R}$, 问 m 为何值时, 以 $m - 1 + (m - 2)i$ 的实部、虚部为坐标的点 $(m - 1, m - 2)$ 位于第四象限? 本来虚数是不可以比较大小的, 而第四象限的点的横坐标大于零、纵坐标小于零, 这里的“ $>$ ”、“ $<$ ”是无法用“ $m - 1 + (m - 2)i$ ”进行表述的. 化虚为实:

$$\begin{cases} m - 1 > 0, \\ m - 2 < 0. \end{cases} \quad \leftarrow \text{实数问题}$$

再如, 研究 bi , 只要研究 b 不就可以了吗?

随着我们学习的步步深入, 类似于上述的问题何止成千上万? 本书于此寄希望于读者们同化、顺应“化虚为实”的观点.

2. 整体运用

分离 $z = a + bi$ 中的 a 与 b 是“化虚为实”观点之精髓; 开辟 a 与 b “连体”的全新理论, 则是“整体运用”与“纯实”和“纯虚”的不同之处.

如, 设 $z = a + bi$ 与点 $Z(a, b)$ 对应, 那么, 讨论 z 不就可以借鉴解析几何的理论进行吗? 点 $Z(a, b)$ 的轨迹上的点的性质就可以完完全全地映射到 $z = a + bi$ 上.

又如, 建立复数 $z = a + bi$ 与向量 $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$ 的对应关系, 这时, 向量的理论不就有了新的“用武之地”了吗?

“整体运用”是一种观念, 有待于我们一点儿一点儿地去形成.



典型例题导析

[例 11] $a=0$ 是复数 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 为纯虚数的 ()

- A. 必要条件 B. 充分条件
C. 充要条件 D. 非必要不充分条件

[分析] 由复数的有关概念, 复数为纯虚数的条件为实部为零而虚部不为 0, 所以若 $a=0, b \in \mathbf{R}$, 则 b 的值不能确定, 当 $b=0$ 时, $a+bi$ 不是纯虚数, 所以 $a=0$ 不是充分条件, 排除 B, 同时也排除 C. 反过来, $a+bi$ 若是纯虚数必有 $b \neq 0, b \in \mathbf{R}$, 且 $a=0$, 所以, $a=0$ 是复数 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 为纯虚数的必要条件.

[解] 选 A.

[例 12] 设 $z = \log_2(1+m) + i \log_{\frac{1}{2}}(3-m) (m \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 z 是虚数, 求 m 的取值范围;
(2) 若 z 在复平面内的对应点在第三象限, 求 m 的取值范围.

[解] (1) 因为 z 是虚数,

所以 $\log_{\frac{1}{2}}(3-m) \neq 0$, 且 $1+m > 0$, 即

$$\begin{cases} 3-m > 0, \\ 3-m \neq 1, \\ 1+m > 0, \end{cases}$$

解得 $m \in (-1, 2) \cup (2, 3)$.

(2) 由题设知 $\begin{cases} \log_2(1+m) < 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(3-m) < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1+m > 0, \\ 1+m < 1, \\ 3-m > 0, \\ 3-m > 1, \end{cases}$

解得 $m \in (-1, 0)$.

[例 13] 设 $\sqrt{2x-1} + (y-1)i = y - \sqrt{x-1}i (x \geq 1, y \in \mathbf{R})$, 求 $x+y$.

[分析] 由复数相等的充要条件可得关于 x 与 y 的方程组, 解方程组后, 再求 $x+y$.

[解] 由复数相等的条件,得 $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=y, \\ y-1=-\sqrt{x-1}, \end{cases}$ 解无理方程要验根

解这个方程组得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

$\therefore x+y=2.$

[例 14] 设复数 $z = \log_2(x^2 - 3x - 3) + i\log_2(x - 3)$, 当 x 为何实数时:

- (1) 复数 z 为纯虚数;
- (2) 在复平面上表示 z 的点位于第三象限;
- (3) 表示 z 的点在直线 $x - 2y + 1 = 0$ 上.

[解] (1) 当 $\begin{cases} \log_2(x^2 - 3x - 3) = 0, \\ \log_2(x - 3) \neq 0 \end{cases}$ 时, z 为纯虚数.

由 $\begin{cases} x^2 - 3x - 3 = 1, \\ x - 3 > 0, \\ x - 3 \neq 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 4 \text{ 或 } x = -1, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$

当 $x = -1$ 时, $x - 3 = -4 < 0$ 不合题意.

当 $x = 4$ 时, $\log_2(x - 3) = 0$ 不合题意.

\therefore 复数 z 不可能是纯虚数.

(2) 由题意,得 $\begin{cases} \log_2(x^2 - 3x - 3) < 0, \\ \log_2(x - 3) < 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{3 + \sqrt{21}}{2} < x < 4$

\therefore 当 $\frac{3 + \sqrt{21}}{2} < x < 4$ 时, 复数 z 在复平面上的对应点位于第三象限.

(3) 当复数 z 的实部、虚部满足直线的方程时, 表示 z 的点在直线上.

$\therefore \log_2(x^2 - 3x - 3) - 2\log_2(x - 3) + 1 = 0,$

即 $\log_2 2(x^2 - 3x - 3) = \log_2(x - 3)^2, x > 3,$

即 $\begin{cases} x^2 - 3x - 3 > 0, & \text{①} \\ x - 3 > 0, & \text{②} \\ 2(x^2 - 3x - 3) = (x - 3)^2. & \text{③} \end{cases}$

由③, 得 $x = \sqrt{15}$ 或 $x = -\sqrt{15}$.

依 $x > 3$ 将 $x = -\sqrt{15}$ (舍去).

$\therefore x = \sqrt{15}$ 满足①、②,

\therefore 当 $x = \sqrt{15}$ 时, 复数 z 在复平面上的对应点在直线 $x - 2y + 1 = 0$ 上.



[例 15] 关于 x 的方程 $3x^2 - \frac{a}{2}x - 1 = 10i - ix - 2ix^2$ 有实数根, 求实数 a 的值.

[分析] 将实数根代入原方程, 运用复数相等的条件求解.

[解] 原方程整理, 得

$$\left(3x^2 - \frac{a}{2}x - 1\right) + (2x^2 + x - 10)i = 0.$$

设方程的实数根为 x_0 .

由复数相等的充要条件, 得

此处如果不设原方程的实根为 x_0 , 那么①、②都是复数方程

$$\begin{cases} 3x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 - 1 = 0, & \text{①} \\ 2x_0^2 + x_0 - 10 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $x_0 = 2$ 或 $x_0 = -\frac{5}{2}$, 代入式①, 得

$$a = 11 \text{ 或 } a = -14\frac{1}{5}.$$

[点评] 注意此题不能这样解:

\therefore 方程有实根,

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \left(i - \frac{a}{2}\right)^2 - 4(3+2i)[-(1+10i)] \\ &= \frac{a^2}{4} + 67 + (128-a)i \geq 0, \end{aligned}$$

\therefore 虚部为 0, $a = 128$.

原因是虚数不能比较大小, 今后凡涉及大小问题的概念、理论, 如: 与不等式、判别式等有关的问题, 都要在实数范围内进行大小的比较(实系数一元二次方程的根的判别式仍可使用).

[例 16] 已知关于 x 的二次方程 $x^2 + (2+i)x + 4ab + (2a-b)i = 0 (a, b \in \mathbf{R})$.

(1) 当方程有实根时, 求点 (a, b) 的轨迹;

(2) 求方程的实数根的取值范围.

[分析] 把方程的实根 α 代入后可得关于 a, b, α 的方程组, 再消去 α , 可得 (a, b) 的轨迹.

[解] (1) 设方程的实根为 α , 则

$$\alpha^2 + (2+i)\alpha + 4ab + (2a-b)i = 0, (\alpha^2 + 2\alpha + 4ab) + (\alpha + 2a - b)i = 0.$$

根据复数相等的充要条件,得

$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha + 4ab = 0, \\ \alpha + 2a - b = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

由②得 $b - 2a = \alpha$, 代入①得

代入法消参数

$$(b - 2a)^2 + 2(b - 2a) + 4ab = 0, (b + 1)^2 + (2a - 1)^2 = 2,$$

$$\frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(b + 1)^2}{2} = 1.$$

\therefore 所求点的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 为中心, 焦点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$ 、

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$ 的椭圆.

(2) 由②得 $b = \alpha + 2a$, 代入①得

$$\alpha^2 + 2\alpha + 4a(\alpha + 2a) = 0,$$

$$8a^2 + 4a\alpha + (\alpha^2 + 2\alpha) = 0.$$

建立关于实数 a 的二次方程,
 a 为实数, 可用 Δ , 重要!

$\therefore a \in \mathbf{R}$,

$$\Delta = 16a^2 - 32(\alpha^2 + 2\alpha) \geq 0,$$

解得 $-4 \leq \alpha \leq 0$.

\therefore 方程实数根的取值范围是 $[-4, 0]$.

思维拓展测试

1. 设 $z_1 = \cos\theta + i\sin 2\theta$, $z_2 = \sqrt{3}\sin\theta + i\cos\theta$, $z_1 = z_2$, 求 θ 的值.
2. 已知 $|z| + 2z = \frac{3-i}{1+i}$, 且 $x^2 - z = 0$, $z \in \mathbf{C}$, 求 x .
3. 已知 α, β 是锐角三角形的两个内角, 判断复数 z 所对应的点 Z 落在第几象限内, 其中 $z = (\cos\beta - \sin\alpha) + i(\sin\beta - \cos\alpha)$.
4. 非零复数 a, b, c 满足 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, 求 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值.
5. 若 $t \in \mathbf{R}$, 则复数 $z = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2}$ 所对应的点组成的图形是 ()
 - A. 单位圆
 - B. 单位圆除去 $(\pm 1, 0)$
 - C. 单位圆除去 $(1, 0)$
 - D. 单位圆除去 $(-1, 0)$
6. 设 $m, n \in \mathbf{Z}$, 判断复数 $\frac{n-5}{m^2-3m+2} + (n^2-8n+15)i$ 能否为纯虚数.
7. 设关于 x 的方程 $x^2 + (t^2 + 3t + tx)i = 0$ 有纯虚数根, 求实数 t 的值.