



宁夏六盘山高级中学课堂行动研究课题组◎编

THE GUIDANCE TO CLASS

课堂导用

适合普通高中课程标准实验教科书（人教版）

高中数学

必修 1



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

课堂导用. 数学. 1: 必修 / 宁夏六盘山高级中学课堂行动研究课题组编. —银川: 宁夏人民教育出版社, 2008.8 (2011.8 重印)

ISBN 978-7-80764-030-1

I. 课… II. 宁… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 124958 号

课堂导用 高中数学(必修 1)

宁夏六盘山高级中学课堂行动研究课题组 编

责任编辑 柳毅伟 贾珊珊

封面设计 一 丁

责任印制 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地 址 银川市北京东路 139 号

印 刷 宁夏雅昌彩色印务有限公司

开 本 787mm × 1092mm 1/16

印 张 8.75

字 数 190 千

版 次 2008 年 8 月第 1 版

印 次 2011 年 8 月第 3 次印刷

印 数 7341 ~ 11360 册

书 号 ISBN 978-7-80764-030-1/G·973

定 价 13.00 元

版权所有 翻印必究

《课堂导用》编写委员会

主 任 金存钰

副 主 任 邓树栋 曹效琴 王生银

编 委 (按姓氏笔画排序)

于绪排	马绍云	王文成	王宁忠	王俊昌
王晓东	石学军	朱振华	孙宇科	李根红
杨惠军	贾永宏	曹天祥	梅继红	路 菊
路满雄	蔺立昌	瞿 军		

策 划 邓树栋

执行编辑 贾永宏 王俊昌

本册编者	瞿 军	陈熙春	陈宗善	郭 鑫	牛永红
	谢国兴	鲍菊霞	李生坪	岳太强	左丽华
	徐 瑾	何 敬	马 琰	张艳萍	

修 订 瞿 军

编者的话

◎编写说明

随着普通高中课程标准的颁布,新课程教改实验在宁夏、山东、广东、海南等实验区逐步推开。耳目一新的教学材料、充满个性的教学活动、丰富多样的学习方式等使新课程标准下的课堂教学焕发出了生机。同时教材的多样化和教学活动的个性化也对教师的教学行为和学生的学习行为提出了更高的要求。

如何实现教学活动的规范化、有序化和有效化,是课堂教学改革的关键,是课改以来我们一直重点关注的问题。为此,我们成立了“六盘山高级中学课堂行动研究课题组”,致力于研究解决新课程标准下课堂教学实践中出现的新问题,寻找理论与实践的结合点,推进课堂教学改革。在总结实践经验的基础上,我们编写了对教师教学行为和学生行为具有引领、指导和规范作用的教学操作方案——《课堂导用》系列丛书。

在《课堂导用》系列丛书的编写过程中,我们力求运用新课程的基本理念,全面贯彻和落实课程标准的精神,注重改变学生的学习方式,整体考虑知识与能力、过程与方法、情感态度与价值观的和谐发展,从实际出发,落实基础,强调能力,突出创新。该系列丛书的出版,对于实现新课程标准下教学活动的规范化、有序化,促进学生学习方式的转变,提高教学质量具有重要意义。

◎丛书体例

本套丛书通过建构系统化的知识结构、提供多样化的学习材料、精心设计研讨式的探究问题,帮助学生理解课程内容,培养学生的探究意识、创新精神和实践能力,提升学生的综合素质。数学分册设置以下八个板块:

目标导航 概括单元内容,明确学习基本要求,提示学习重点和学习难点。旨在帮助学生建构单元知识框架,把握核心内容。

学习导读 提供学习准备知识,点拨学习思路、方法和技巧,阐释学习重点和学习难点。引导学生获取知识,夯实基础,形成能力。

经典例题 主要选取符合学习目标,针对学习重点和难点,命制科学、规范的试题进行剖析,点拨解题思路,提供探究所需的方法和技巧。

实践探究 选择每节课的重点和难点问题探究,引导学生运用所学知识解决问题,加深对主干知识的理解和认识。

达标测评 是基本知识和基本能力的体现,针对教学目标设置新情景和新问题,检测和巩固学习结果。

拓展延伸 着眼于课堂知识的拓展、延伸和深化。选取典型案例引导学生实现新旧知识的整合与迁移以及认识的提升与发散。

收获感悟 培养学生的反思习惯。以问题的方式引导学生对本课学习内容进行总结、思考和质疑,形成学习收获、感悟及体会。

趣味阅读 选择与本课内容相关的学科信息与资料链接,扩大学生视野,激发学习兴趣。

另外,每单元后附有单元能力检测试题,供学生自我检测之用。

◎ 使用建议

自主学习 新课程倡导积极主动的学习态度,倡导自主、合作、探究的学习方式。本套丛书各板块的设置特别关注调动学生学习的积极性、发挥学生的主体作用、培养学生的学习兴趣、挖掘学生的学习潜能。希望同学们借助这些板块,在学习中主动观察、思考、表达、探究,逐步形成积极主动的学习习惯。

循序渐进 丛书力求遵照同步学习的客观规律,在板块设置、内容安排、方法应用、能力考查等方面都充分考虑了梯度性和渐进性,逐步从基本要求向较高要求递进。学习中要充分关注这一特点,以学习板块为顺序,由浅入深,循序渐进。这样,才能保证理想的学习效果。

学以致用 各板块的设置和习题的选取,充分考虑了其实用性、新颖性和探究性,选用了大量与实际生产、社会生活、中外时事和科技发展相关的问题。学习过程中要以此为契机,关注社会,关注生活,实现书本、课堂向社会、生活延伸,使对学生的创新意识和实践能力的培养落到实处。

但愿本套丛书成为你学习的好帮手。

受水平所限,本丛书的疏漏和错误在所难免,恳请各位读者提出宝贵意见,以使《课堂导用》系列丛书的质量不断提高,日臻完善。

《课堂导用》编委会

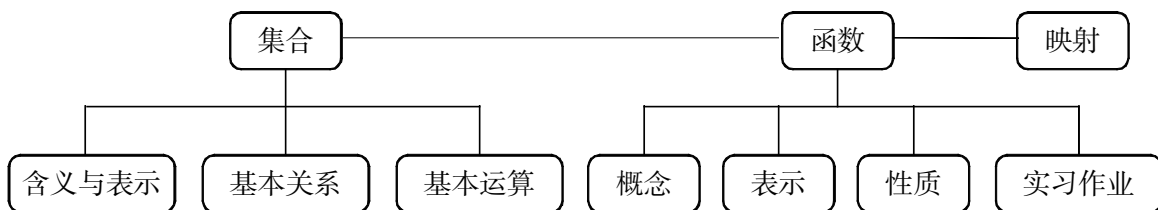
第一章 集合与函数概念	1
1.1 集合	1
1.1.1 集合的含义与表示	1
1.1.2 集合间的基本关系	4
1.1.3 集合间的基本运算——交集、并集	7
1.1.4 集合间的基本运算——补集	9
1.2 函数及其表示	15
1.2.1 函数的概念	15
1.2.2 函数的表示方法	18
1.3 函数的基本性质	22
1.3.1 函数的单调性	22
1.3.2 函数的最值	25
1.3.3 函数的奇偶性	28
1.3.4 二次函数	31
本章总结	35
本章检测题	38
第二章 基本初等函数	40
2.1 指数函数	40
2.1.1 根式	40
2.1.2 分数指数幂	43
2.1.3 指数函数及其性质(1)	47
2.1.4 指数函数及其性质(2)	50
2.1.5 指数函数及其性质(3)	54
2.2 对数函数	57
2.2.1 对数与对数运算(1)	57
2.2.2 对数与对数运算(2)	60
2.2.3 对数与对数运算(3)	63

2.2.4 对数函数及其性质(1)	66
2.2.5 对数函数及其性质(2)	69
2.2.6 对数函数及其性质(3)	72
2.3 幂函数	74
本章总结	79
本章检测题	81
 第三章 函数的应用	 83
3.1 函数与方程	83
3.1.1 方程的根与函数的零点	83
3.1.2 用二分法求方程的近似解	86
3.2 函数模型及其应用	89
3.2.1 几类不同增长的函数模型(1)	89
3.2.2 几类不同增长的函数模型(2)	93
3.2.3 函数模型的应用举例(1)	97
3.2.4 函数模型的应用举例(2)	100
本章总结	105
本章检测题	107
 模块测试题	 109
参考答案	112

第一章 集合与函数概念

目标导航

1. 知识结构



2. 学习目标

(1)学会使用最基本的集合语言表示有关数学对象,体会用其表达数学内容的简洁性、准确性,并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换,发展运用集合语言进行交流的能力.

(2)学会把函数看成变量之间的依赖关系,同时还会用集合与对应的语言刻画函数,感受用函数概念建立模型的过程与方法.

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

学习导读

1. 课前导读

- (1)集合中元素的三个特性:确定性、互异性、无序性.
- (2)元素与集合的关系有属于或不属于两种,分别用 $\in$ 或 $\notin$ 表示.
- (3)常用数集及其记号:

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.



(4)把集合中的元素一一列举出来,并用大括号“{}”括起来表示集合的方法叫做列举法.

(5)把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法叫做描述法.具体方法是:①在大括号{}内先写上这个集合的代表元素及取值(或变化)范围;②在代表元素后画一条竖线;③在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

2. 学法指导

在选择适当的方法表示集合时,一般遵循如下原则:

(1)对于有限集,若集合的元素较少,宜采用列举法表示,这样使集合中的元素一目了然;若集合的元素较多,且构成集合的元素有明显规律,也可用列举法,这样显得方便快捷.

(2)对于无限集或者根本就不能一一列举的有限集一般采用描述法表示,这样使集合中的元素显得简洁明了.

3. 重难点剖析

(1)集合中元素的特性的理解:①确定性:确定的对象能构成集合,不确定的对象不能构成集合.例如“高一(8)班身高在1.70m以上的同学”能构成一个集合,“高一(8)班的大个子同学”不能构成集合,因为前者组成它的对象是确定的,后者组成它的对象是不确定的.②互异性:集合中的任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入同一集合时只能算作集合的一个元素.③无序性:构成集合的元素没有顺序.例如集合{1,2,3}、{1,3,2}、{3,2,1}等表示同一集合.

(2)在用描述法表示集合时,要注意以下几点:①一般格式: $\{x \in I \mid p(x)\}$.其中 x 为该集合中的代表元素,它表明了该集合中的元素是“什么”,具有明确的数学意义; I 是 x 的取值范围(特定条件); $p(x)$ 为该集合中元素 x 所具有的公共属性(共同特征).②用于描述的语句力求准确、简洁.③所有描述的内容都要写在花括号内.④多层描述时,应当准确使用逻辑联接词“或”、“且”等.

经典例题

例1:若 $x \in \{0, 1, x^3\}$,求实数 x .

解:由集合中元素的互异性可知, $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$,由
$$\begin{cases} x = x^3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$
 得 $x = -1$.

例2:集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{a, a^2, ab\}$ 是同一集合,求实数 a, b .

解:由题意, $\begin{cases} 1=a^2 \\ b=ab \end{cases}$, 或 $\begin{cases} 1=ab \\ b=a \end{cases}$, 又由集合中元素的互异性, $a \neq 1$,且 $a \neq b$,解得 $a = -1, b = 0$.

例3:说明集合 $A = \{x \mid y = x^2 + 1\}$, $B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, $C = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 的区别.

解析:关键是搞清集合中元素的属性和本质.

答案: $A = \mathbf{R}$, $B = \{y \mid y \geq 1\}$ 都是数集, C 为抛物线上的点集.

实践探究

- 下列各组对象中,能组成集合的是().
A. 高一(1)班个子较高的学生 B. 某大学比较著名的教授
C. 所有数学难题 D. 所有无理数
- 给出下面四个关系:① $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$; ② $0.7 \notin \mathbf{Q}$; ③ $0 \in \{0\}$; ④ $0 \in \mathbf{N}$. 其中正确的个数是().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ 的解构成的集合是().
A. $\{(1,1)\}$ B. $\{1,1\}$ C. $(1,1)$ D. $\{1\}$
- 下列各组集合中,表示同一集合的是().
A. $M = \{(3,2)\}, N = \{(2,3)\}$ B. $M = \{3,2\}, N = \{2,3\}$
C. $M = \{(x,y) \mid x+y=1\}, N = \{y \mid x+y=1\}$ D. $M = \{1,2\}, N = \{(1,2)\}$
- 用描述法表示平面直角坐标系内所有第二象限的点组成的集合为_____.

达标测评

- 用列举法表示集合 $\{x \mid (x-2)^2 = 0\}$ 为().
A. $\{0\}$ B. $\{2,2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{4\}$
- 设 a, b, c 为非零实数,则 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为().
A. $\{4\}$ B. $\{-4\}$ C. $\{0\}$ D. $\{0,4,-4\}$
- 对于集合 $A = \{2,4,6\}$,若 $a \in A$,则 $6-a \in A$,那么 a 的值是_____.
- 已知集合 $M = \{-2, 3x^2 + 3x - 4, x^2 + x - 4\}$,若 $2 \in M$,求满足条件的实数 x 组成的集合.
- 用适当的方法表示下图(图1.1.2-1)中的阴影部分的点(含边界上的点)组成的集合 M .

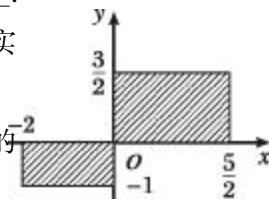


图1.1.2-1

拓展延伸

设含有三个元素的集合既可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$,也可以表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$,求 $a^{2008} + b^{2008}$ 的值.

收获感悟

集合语言是现代数学的基本语言,是启开高中数学大门的金钥匙,学会用数学语言进行交流



和思考问题,是当代中学生必备的一种数学素养,请同学们在后续的学习过程中重视这方面的能力培养,并思考下列两个问题:

(1)用自然语言、列举法和描述法表示集合时,你认为它们各有什么样的特点和使用对象?

1.1.2 集合间的基本关系

学习导读

1. 课前导读

(1)用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种用图形表示集合的方法叫做图示法,或称韦恩(Venn)图法.

(2)子集:对于两个集合 A 、 B ,如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素,我们就说这两个集合有包含关系,称集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

(3)相等集合:如果集合 A 是集合 B 的子集且集合 B 是集合 A 的子集,此时集合 A 和集合 B 中的元素是一样的,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

(4)真子集:如果集合 A 是集合 B 的子集,但存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$,我们称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

(5)空集:我们把不含有任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$,并规定空集是任何集合的子集.

(6)子集的性质:

- ①任何一个集合 A 是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;
- ②对于集合 A 、 B 、 C ,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,那么 $A \subseteq C$.

2. 学法指导

(1)判断两个集合的关系时,其关键是判断一个集合中的任意元素是否是另一个集合的元素;

(2)“包含”或“不包含”关系发生在两个集合之间,用符号“ $\subseteq$ ”“ $\subsetneq$ ”“ $=$ ”等表示;“属于”或“不属于”关系发生在元素与集合之间,用符号“ $\in$ ”“ $\notin$ ”等表示.在具体问题的解答中,要注意它们的区别.

(3)在求一个非空集合的子集及真子集时,不要忘了空集.

(4)判断两个集合相等有两种方法:

- ①若两个集合 A 、 B 的元素是一样的,则 $A = B$;
- ②若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则 $A = B$.

3. 重难点剖析

(1)若集合 A 为集合 B 的子集,则集合 A 与集合 B 相等或者集合 A 是集合 B 的真子集.即

$A \subseteq B \Leftrightarrow A=B$ 或 $A \subsetneq B$. 由此可知, 真子集与相等集合是子集的特殊情况(如图 1.1.3-1 与图 1.1.3-2 所示).

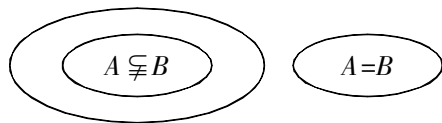


图 1.1.3-1 与图 1.1.3-2

(2)关于空集的理解

- ①它不含任何一个元素;
- ②对于任何一个集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$; 当然 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 也成立.
- ③对于任何一个非空集合 A , 有 $\emptyset \subsetneq A$; 反之, 若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

经典例题

例 1: 求满足条件 $\{x \mid x^2+1=0\} \subset M \subseteq \{x \mid x^2-1=0\}$ 的集合的个数.

解析: 因为 $\{x \mid x^2+1=0\} = \emptyset$, $\{x \mid x^2-1=0\} = \{1, -1\}$, 所以 M 为 $\{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$, 共 3 个.

例 2: 已知集合 $M = \{x \mid x^2=1\}$, 集合 $N = \{x \mid ax=1\}$, 若 $N \subseteq M$, 求实数 a 的值.

解析: 由已知, 则 $N=\emptyset$ 或者 $N \neq \emptyset$

当 $N=\emptyset$ 时, 方程 $ax=1$ 无解, 即此时 $a=0$

当 $N \neq \emptyset$, 此时 $a \neq 0$, 则有 $x = \frac{1}{a}$, 即 $N = \left\{ \frac{1}{a} \right\}$, 若 $\frac{1}{a}=1$, 则 $a=1$; 若 $\frac{1}{a}=-1$, 则 $a=-1$;

综上 a 的值为 0, 1 或 -1.

例 3: 设集合 $A = \{x \mid x^2+4x=0\}$, $B = \{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

解析: $\because A = \{-4, 0\}, B \subseteq A$,

$\therefore$ (1) $B = \emptyset$ 时, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2-1) < 0$, 解得 $a < -1$;

(2) $B = \{0\}$ 或 $B = \{-4\}$ 时, 由 $\Delta = 0$ 得, 所以 $a = -1$;

(3) $B = \{0, 4\}$ 时, $\begin{cases} -2(a+1) = -4 \\ a^2-1 = 0 \end{cases}$, 解得 $a = 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $a \leq -1$ 或 $a = 1$.

实践探究

1. 设 $P = \{x \mid x \leq 8\}$, $a = \sqrt{61}$, 则下列关系式中正确的是().

- A. $a \subseteq P$ B. $a \notin P$ C. $\{a\} \in P$ D. $\{a\} \subseteq P$

2. 下列命题: ①任何一个集合必有两个或两个以上的子集; ②空集是任何集合的子集;

③ $\emptyset = \{0\}$; ④若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \neq A$. 其中正确命题的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集共有().

- A. 7 个 B. 8 个 C. 6 个 D. 5 个

4. 已知集合 $P = \{x \mid x^2=4\}$, 集合 $Q = \{x \mid ax=1\}$, 若 $Q \subseteq P$, 那么 a 的值是_____.

5. 已知 $M = \{x \mid x = a^2+1, a \in \mathbf{N}\}$, $N = \{y \mid y = b^2-6b+10, b \in \mathbf{N}\}$, 则集合 M 和 N 的关系为_____.



达标测评

- 数集 $M = \{x \mid x = (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ 与数集 $N = \{x \mid x = (4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是().
A. $M \subsetneq N$ B. $M = N$ C. $N \subsetneq M$ D. $N \subseteq M$
- 六个关系式: ① $\{a, b\} = \{b, a\}$; ② $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ③ $\emptyset = \{\emptyset\}$; ④ $\{0\} = \emptyset$; ⑤ $\emptyset \subseteq \{0\}$; ⑥ $0 \in \{0\}$.
其中正确的个数为().
A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
- 集合 $M \subseteq \{4, 7, 8\}$, 且 M 中至多有一个偶数, 则这样的集合共有_____个.
- 已知集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 已知集合 $M = \{a, a+d, a+2d\}$, $P = \{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a \neq 0, a, d, q \in \mathbf{R}$, 且 $M = P$, 求 q 的值.

拓展延伸

若集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 试讨论集合 M, N 的关系.

收获感悟

- 当集合 $A = \{1, 2\}$, 写出它的子集、真子集、非空子集、非空真子集.
- 当集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 写出它的子集、真子集、非空子集、非空真子集.
- 由(1)、(2)的结论, 思考当集合 A 中含有 n 个不同的元素, 它的子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数分别是多少?

1.1.3 集合间的基本运算——交集、并集

学习导读

1. 课前导读

(1)一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

(2)一般地,由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集.记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

2. 学法指导

(1)并集的有关性质: $(A \cup B) \supseteq A$; $(A \cup B) \supseteq B$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cup B = B \cup A$;

(2)交集的有关性质: $(A \cap B) \subseteq A$; $(A \cap B) \subseteq B$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$; $A \cap B = B \cap A$;

(3)并集、交集与子集的关系: $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

3. 重难点剖析

(1)并集、交集的共同点:这两种集合都是由两个集合确定一个新的集合.

(2)并集、交集的不同点: $A \cup B$ 这个集合是由集合 A 与集合 B 的所有元素(相同的元素不重复取)组成的一个集合; $A \cup B$ 中的“或”的意义与日常用语中“或”的意义不尽相同,用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的,“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”包括三种情况(如图 1.1.4-1 所示).



图 1.1.4-1

(3) $A \cap B$ 这个集合是由集合 A 与集合 B 的相同元素组成的一个集合(如下图所示);当集合 A 与集合 B 没有公共元素时,不能说集合 A 与集合 B 没有交集,而是集合 A 与集合 B 的交集是空集.



经典例题

例 1: 设 $A = \{x \mid -3 < x < 4\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 7\}$, 求 $A \cap B$; $A \cup B$.



解: 由上图可知, $A \cap B = \{x \mid 0 < x < 4\}$, $A \cup B = \{x \mid -3 < x < 7\}$.



例 2: 设 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$. 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的值.

解: 由 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 其解法类同 1.1.3 的例 2. 所以 a 的值为 $0, \frac{1}{3}, -1$.

例 3: 已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + b = 0\}$, 若 $B \neq \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a, b 的值.

解: 由 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 由 $B \neq \emptyset$ 时, 得 $B = \{1\}$ 或 $\{-1\}$ 或 $\{1, -1\}$.

当 $B = \{1\}$ 时, 方程 $x^2 - 2ax + b = 0$ 有两个等根 1, 由韦达定理解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

当 $B = \{-1\}$ 时, 方程 $x^2 - 2ax + b = 0$ 有两个等根 -1, 由韦达定理解得 $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$.

当 $B = \{1, -1\}$ 时, 方程 $x^2 - 2ax + b = 0$ 有两个根 -1, 1, 由韦达定理解得 $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$.

实践探究

1. 已知 $M = \{x^2, 2x-1, -x-1\}$, $N = \{x^2+1, -3, x+1\}$, 且 $M \cap N = \{0, -3\}$, 则 x 的值为().

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

2. 设集合 $A = \{(x, y) \mid 4x + y = 6\}$, $B = \{(x, y) \mid 3x + 2y = 7\}$, 则满足 $C \subseteq (A \cap B)$ 的集合 C 的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 已知集合 $M = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$, $N = \{x \mid x - a \leq 0\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是().

- A. $a < 2$ B. $a > -1$ C. $a \geq -1$ D. $-1 \leq a \leq 1$

4. 集合 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 若 $B \subsetneq A$, 则 $a =$ _____.

5. 集合 $A = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$, $B = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$, $A \cap B =$ _____.

达标测评

1. 已知 $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y \mid y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于().

- A. $\{(0, 1), (1, 2)\}$ B. $\{(0, 1)\}$ C. $\{(1, 2)\}$ D. $[1, +\infty)$

2. 已知集合 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid a+1 \leq x \leq 4a+1\}$, 且 $A \cap B = B$, $B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $a \leq 1$ B. $-4 \leq a \leq 1$ C. $a \leq 0$ D. $-1 \leq a \leq 4$

3. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + x + m = 0\}$, 若 $A \cap \mathbf{R} = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____.

4. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, 若 $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 m 的值.

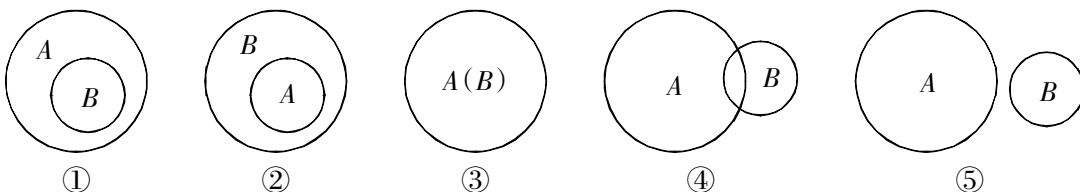
5. 已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + b = 0\}$, 若 $B \neq \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a, b 的值.

拓展延伸

某班有学生 55 人,其中音乐爱好者有 34 人,体育爱好者 43 人,还有 4 人既不好音乐又不爱好体育,该班既爱好音乐又爱好体育的有多少人?

收获感悟

用阴影部分表示下图中的 $A \cap B, A \cup B$?



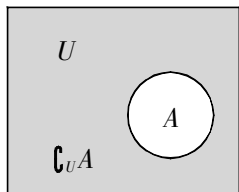
1.1.4 集合间的基本运算——补集

学习导读

1. 课前导读

(1) 如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常记作 U .

(2) 设 U 是一个集合, A 是 U 的一个子集,由集合 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A = \{x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ (右图所示的阴影部分为 $\complement_U A$).



2. 学法指导

由子集、并集、交集和补集的概念,我们可得到补集的如下性质:

(1) $\complement_U A \subseteq U; \complement_U(\complement_U A) = A; \complement_U U = \emptyset; \complement_U \emptyset = U;$ (2) $A \cup (\complement_U A) = U; A \cap (\complement_U A) = \emptyset;$

(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_U A \supseteq \complement_U B;$ (4) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U(A \cap B)$ (如图 1.1.5-2 所示);

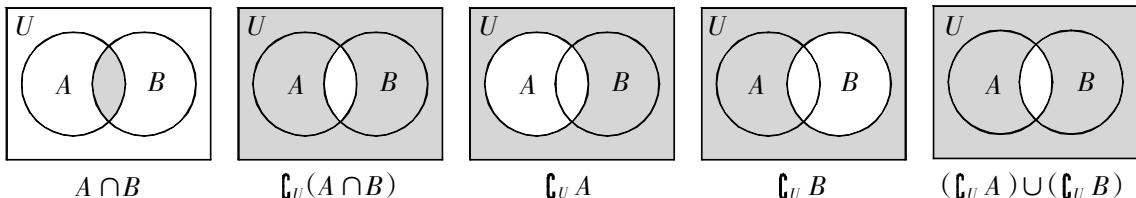


图 1.1.5-2

(5) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U(A \cup B)$ (如图 1.1.5-3 所示).

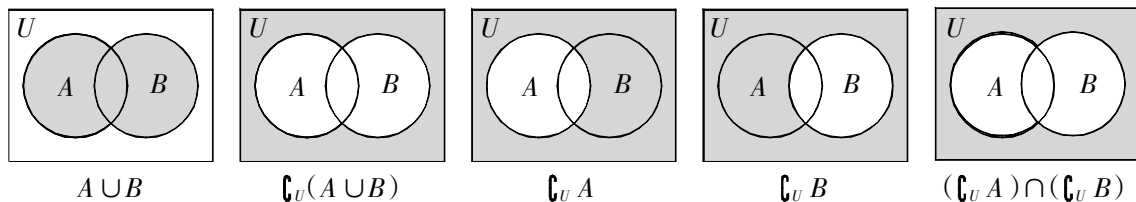


图 1.1.5-3

3. 重难点剖析

(1) 全集是相对于所研究问题而言的一个概念, 因此全集因研究问题而异. 例如在研究数集时, 常常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集, 而在平面几何中, 整个平面可以看作一个全集.

(2) 补集是相对的, 即全集中某子集的补集就是在全集中将该子集去掉所剩余的部分.

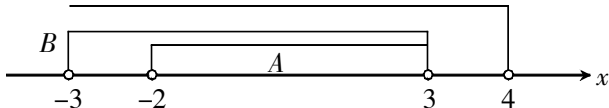
(3) 在解决具体问题时, 要注意自然语言、符号语言、图形语言的相互转化, 通过图形语言的直观表示, 体会直观示意图对理解抽象概念的作用.

经典例题

例 1: 已知全集 $U = \{x \mid x \leq 4\}$, 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 3\}$, $B = \{x \mid -3 < x \leq 3\}$, 求 $\complement_U A$, $A \cap B$, $\complement_U(A \cap B)$, $(\complement_U A) \cap B$.

分析: 利用数轴解题(如下图), 把全集 U 和集合 A 、 B 分别在数轴上表示出来.

解:



由图可知, $\complement_U A = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}$, $A \cap B = \{x \mid -2 < x < 3\}$,

$$\complement_U(A \cap B) = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}, (\complement_U A) \cap B = \{x \mid -3 < x \leq -2 \text{ 或 } x = 3\}$$

例 2: 设全集 U 为 $\mathbf{R}$, $A = \{x \mid x^2 + px + 12 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + q = 0\}$,

若 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{4\}$, 求 $A \cup B$

解: $\because (\complement_U A) \cap B = \{2\}$, $\therefore 2 \in B$, 但 $2 \notin A$;

$$\because A \cap (\complement_U B) = \{4\}, \therefore 4 \in A, \text{ 但 } 4 \notin B. \quad \therefore \begin{cases} 4^2 + 4p + 12 = 0 \\ 2^2 - 10 + q = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = -7 \\ q = 6 \end{cases}$$

$$\therefore A = \{3, 4\}, B = \{2, 3\}$$

$$\therefore A \cup B = \{2, 3, 4\}$$

例 3: 设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|2a - 1|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

分析: $\complement_U A = \{5\}$ 包含了两层意义: 即 $5 \in U$, $5 \notin A$

解: $\because \complement_U A = \{5\}$, $\therefore 5 \in U$, $5 \notin A$ $\therefore a^2 + 2a - 3 = 5$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -4$.

当 $a = 2$ 时, $|2a - 1| = 3 \neq 5$ 这时 $A = \{3, 2\}$, $U = \{2, 3, 5\}$

满足 $\complement_U A = \{5\}$, 适合题意, $\therefore a = 2$.

当 $a = -4$ 时, $|2a - 1| = 9$, 这时 $A = \{9, 2\}$, $U = \{2, 3, 5\}$

$A \not\subseteq U$, $\therefore a = -4$ 不合题意, 舍去. 综上所述: $a = 2$.