

义务教育课程标准实验教材教辅用书

教学目标与检测

数学

九年级下册

内蒙古教育出版社

编写说明

根据国家教育部制订的《义务教育课程标准》而编写的《义务教育课程标准实验教科书》，已于 2001 年在全国各实验区使用。为了帮助我区初中师生更好地理解、掌握初中各科《义务教育课程标准》和《义务教育课程标准实验教科书》的内容，加快实施素质教育的步伐，提高教学质量，我们从教学实际出发，组织我区的特级教师、学科带头人、教学能手、教研员在对《义务教育课程标准》认真学习、深刻领会的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书》进行了深入的研究，精心编写了这套《教学目标与检测》丛书。

本丛书包括初中思想政治、语文、英语、数学、物理、化学、生物、历史、地理 9 个学科。

本丛书的编写以国家教育部制订的《义务教育课程标准》和《义务教育课程标准实验教科书》为依据，以提高学生综合素质尤其是对思维能力的培养和训练为主线，以不加重学生课业负担为前提，体现中考的方向与趋势、课程改革、新的课程标准、素质教育等理念，做到内容丰富、形式活泼、难易程度适中，习题均为确实能帮助学生巩固课堂知识、拓宽思路的优秀习题，以达到扩大学生的知识面，调动学生学习的积极性和主动性，巩固、消化课堂知识，提高学习质量的目的。使用本丛书的教师，可以结合自己的教学实际或教学进度有针对性地安排学生使用。

本册书由贾克勤主编、统稿，由曾广南、赵智慧、徐志斌、贾克勤编写。

由于作者水平有限、编写时间仓促等原因，不妥之处在所难免，恳请广大师生在使用本丛书的过程中，将你们发现的疏漏之处及时地反馈给我们，以便再版时修订、完善。

编 者

2006 年 12 月

目 录

第二十六章 二次函数	(1)
26.1 二次函数	(1)
26.2 用函数观点看一元二次方程	(7)
26.3 实际问题与二次函数	(15)
第二十六章检测题	(20)
第二十七章 相似	(25)
27.1 图形的相似	(25)
27.2 相似三角形	(30)
27.3 位似	(38)
第二十七章检测题	(42)
第二十八章 锐角三角函数	(49)
28.1 锐角三角函数	(49)
28.2 解直角三角形	(53)
第二十八章检测题	(58)
第二十九章 投影与视图	(61)
29.1 投影	(61)
29.2 三视图	(66)
29.3 课题学习 制作立体模型	(73)
第二十九章检测题	(74)
中考强化训练	(79)
检测题答案	(95)

第二十六章 二次函数

学习目标与素质要求

1. 经历生产实践和日常生活中的具体事例的探究过程,体会二次函数是两个变量的关系和变化规律的一个重要的数学模型.领会二次函数作为一种数学模型的意义.
2. 掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的一般形式.能用待定系数法求形如 $y=ax^2+bx+c$; $y=a(x-h)^2+k$; $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 的二次函数的解析式.
3. 能求二次函数的开口方向、对称轴、顶点坐标以及 $y_{\text{最大}}$ 或 $y_{\text{最小}}$.
4. 会画二次函数的图象,掌握该图象与 $y=ax^2$ 的图象间的关系以及二次函数的性质.
5. 理解二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系.体会二次方程的解的个数和二次函数的图象与 x 轴相互位置关系的关系.
6. 能利用二次函数解决一些生活中、生产实践中的实际问题.提高我们分析问题、解决问题的能力 and 创新意识.体会并掌握数形结合的数学思想.

26.1 二次函数

学习目标与素质要求

1. 理解二次函数是客观反映现实世界中两变量间关系的重要的数学模型.
2. 理解二次函数的定义,会识别一个函数是否为二次函数.深刻理解二次函数的一般形式: $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.
3. 能用待定系数法求形如: $y=ax^2+bx+c$; $y=a(x-h)^2+k$; $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 二次函数的解析式.

4. 会画二次函数的图象. 正确求出二次函数图象的对称轴、顶点坐标与坐标轴的交点.

重点、难点与例题分析

1. **重点:**理解二次函数的概念, 准确求出抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标; 理解 a, h, k 对二次函数图象的影响.

2. **难点:**用待定系数法求二次函数 $y=ax^2+bx+c$; $y=a(x-h)^2+k$; $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 的解析式.

3. 例题分析:

【例 1】 若函数 $y=(m-2) \cdot x^{m^2+m-4}$ 是二次函数, 求 m 的值.

分析:这个函数是不是二次函数, 应由二次函数的定义来确定. $y=ax^2+bx+c$, 此时, $a=m-2 \neq 0, m^2+m-4=2, b=0, c=0$.

故 m 应满足:

$$\begin{cases} m-2 \neq 0, \\ m^2+m-4=2. \end{cases}$$

解: $\because y=(m-2) \cdot x^{m^2+m-4}$ 是二次函数.

$$\therefore m^2+m-4=2, \text{ 即 } m^2+m-6=0$$

解这个关于 m 的一元二次方程, 得 $m=2$ 或 $m=-3$.

当 $m=2$ 时, $m-2=0$, 不合题意. 当 $m=-3$ 时, $m-2 \neq 0$, 符合题意.

\therefore 常数 m 的值为 -3 .

说明:此题的易错点是没有检验而得出 $m=2$ 或 $m=-3$.

【例 2】 已知一个二次函数, 当 $x=4$ 时有最小值 -3 , 且它的图象与 x 轴交点的横坐标为 1 , 求此二次函数的解析式.

分析:因为此二次函数当 $x=4$ 时最小值为 -3 , 所以顶点坐标是 $(4, -3)$, 对称轴是 $x=4$, 抛物线开口向上. 图象与 x 轴交点的横坐标为 1 , 即抛物线过点 $(1, 0)$, 再根据对称性, 图象与 x 轴另一交点为 $(7, 0)$, 有下列草图(图 26-1-1).

解法一: 设二次函数解析式为: $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$

\because 抛物线经过顶点 $(4, -3)$ 和与横轴的交点 $(1, 0)$ 和 $(7, 0)$.

\therefore 把以上三点代入所设, 即得方程组:

$$\begin{cases} -3=16a+4b+c, \\ 0=a+b+c, \\ 0=49a+7b+c, \end{cases} \quad \text{解方程组, 得} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{3}, \\ b=-\frac{8}{3}, \\ c=\frac{7}{3}. \end{cases}$$

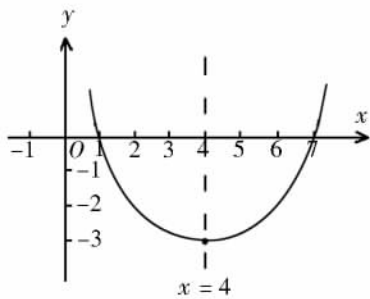


图 26-1-1

∴ 这个二次函数的解析式是 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.

解法二: 设二次函数解析式为: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

∴ 当 $x = 4$ 时, 有最小值 -3 , 又图象过点 $(1, 0)$.

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 4, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = -3, \\ a + b + c = 0, \end{cases} \text{ 解这个方程组, 得 } \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{8}{3}, \\ c = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

即, 所求二次函数为 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.

解法三: 由于抛物线顶点坐标为 $(4, -3)$, 所以可设二次函数为: $y = a(x-h)^2 + k$, 其中 $h = 4, k = -3$, 即有 $y = a(x-4)^2 - 3$, 式中只有一个待定系数 a , 再利用图象过点 $(1, 0)$ 或 $(7, 0)$ 求出 a 来. $y = a(x-h)^2 + k$ 设二次函数的顶点式.

设: 所求解析式为: $y = a(x-4)^2 - 3$, 把 $(1, 0)$ 的坐标

代入: $a(1-4)^2 - 3 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{3}$.

所以: $y = \frac{1}{3}(x-4)^2 - 3$, 即 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$ 为所求.

解法四: 由图象过 $(1, 0)$ 点, 对称轴 $x = 4$. 可求得关于 $x = 4$ 的对称点为 $(7, 0)$ 点.

可设二次函数的解析式为:

$$y = a(x-1)(x-7)$$

又知 $(4, -3)$ 在抛物线上, 把 $(4, -3)$ 代入可解得 $a = \frac{1}{3}$.

∴ $y = \frac{1}{3}(x-1)(x-7)$, 即 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$ 为所求.

说明: 在阅读题目时, 不仅要注意题目中给出的“显”条件, 更要善于发现“隐”条件. 如“最小值”, 不仅告诉了抛物线的顶点, 而且也告诉我们对称轴, 还可知 $(7, 0)$ 也在抛物线上. 习惯称 $y = ax^2 + bx + c$; $y = a(x-h)^2 + k$; $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ 为二次函数的一般式; 顶点式; 标根式.

【例 3】 已知二次函数 $y_1 = x^2 - 2x - 3$.

(1) 画函数 y_1 的图象, 确定当 x 取什么值时, $y_1 > 0, y_1 = 0, y_1 < 0$;

(2) 根据(1)的结论, 确定函数 $y_2 = \frac{1}{2}(|y_1| - y_1)$ 关于 x 的解析式, 并画出函数 y_2 的图象.

分析: 画二次函数的图象, 一般地要求出函数图象所经过的特殊点: 顶点及抛物线与坐标轴的交点以及它的对称轴.

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 由 } y_1 &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-1)^2 - 4 \end{aligned}$$

可知, 函数 y_1 图象的顶点是 $(1, -4)$. 对称轴为 $x = 1$. 又令 $y_1 = 0$, 即 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解这个方程, 得 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

∴函数图象与 x 轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$, 与 y 轴的交点为 $(0,-3)$.

∴ y_1 的图象如下(图 26-1-2).

由图 26-1-2 可知:

当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时, $y_1 > 0$;

当 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时, $y_1 = 0$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $y_1 < 0$.

(2) 当 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$ 时, $|y_1| = y_1$,

$$\text{即 } y_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_1) = 0.$$

当 $-1 < x < 3$ 时, $|y_1| = -y_1$,

$$\text{即 } y_2 = \frac{1}{2}(-y_1 - y_1) = -y_1.$$

所以 $y_2 = \begin{cases} 0(x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3), \\ -x^2 + 2x + 3(-1 < x < 3). \end{cases}$

其图象如图 26-1-3.

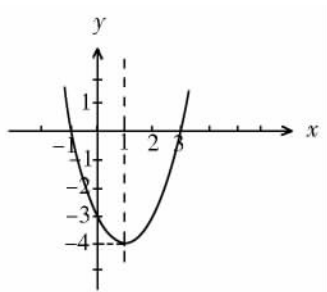


图 26-1-2

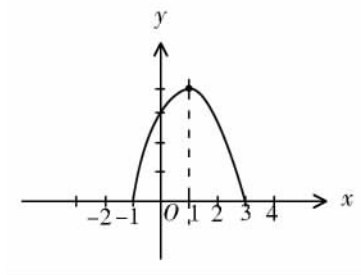


图 26-1-3

检测题

1. 填空题:

(1) 已知函数 $y = (m+2)x^{m^2+m}$ 是二次函数, 则 $m =$ _____.

(2) 若将二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 配方为 $y = (x-h)^2 + k$ 的形式, 则 $y =$ _____.

(3) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$, 且经过点 $(1, 4)$ 和点 $(5, 0)$, 则该抛物线的解析式为 _____.

(4) 函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 的图象开口方向 _____, 对称轴方程是 _____, 顶点坐标为 _____.

(5) 函数 $y = x^2 + 4x + 3$, 当 x _____ 时, y 的值随着 x 的增大而增大; 当 x _____ 时, y 的值随着 x 的增大而减小.

(6) 抛物线 $y = x^2 + x - 12$ 与 x 轴的交点坐标是 _____, 与 y 轴的交点坐标是 _____.

(7) 抛物线顶点坐标为 $(-2, 1)$, 且这条抛物线经过点 $(1, -2)$, 则该抛物线解析式为 _____.

(8) 已知函数① $y = x^2 + 1$, ② $y = -2x^2 + x$, 其中函数 _____ (填序号) 有最小值, 当 $x =$ _____ 时, 该函数的最小值是 _____.

(9) 二次函数 $y = mx^2 - 6x + 3m + m^2$ 的图象经过原点, 利用图象可知, 满足函数值小于 0 的自变量 x 的取值范围是_____.

(10) 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的正半轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴的交点是 C , 且线段 AB 的长为 1, $\triangle ABC$ 的面积为 1, 则 b 的值为_____.

2. 选择题:

(1) 下列各函数中, 是二次函数的是 ()

- A. $y = 8x^2 + 1$ B. $y = 8x - 3$ C. $y = \frac{8}{x}$ D. $y = \frac{8}{x^2} + 1$

(2) 下列抛物线中, 对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$ 的是 ()

- A. $y = \frac{1}{2}x^2$ B. $y = x^2 + 1$ C. $y = (x + \frac{1}{2})^2$ D. $y = (x - \frac{1}{2})^2 - 2$

(3) 下列各点在函数 $y = x^2 - 3$ 的图象上的点是 ()

- A. $(-1, -2)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, -1)$

(4) 小莉在二次函数 $y = 2x^2 + 4x + 5$ 的图象上, 依横坐标找到三个点 $(-1, y_1)$ 、 $(\frac{1}{2}, y_2)$ 、

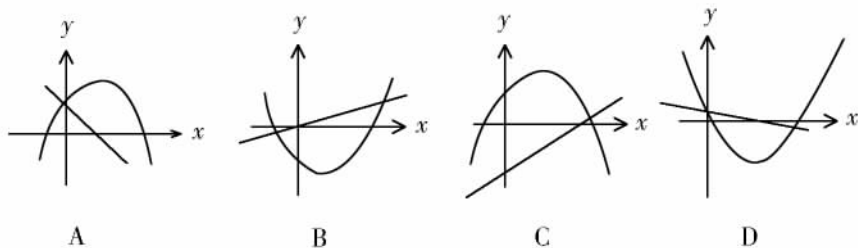
$(-3\frac{1}{2}, y_3)$, 则你认为 y_1, y_2, y_3 的大小关系应为 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_3 > y_1$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_3 > y_2 > y_1$

(5) 函数 $y = a(x-1)^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过原点的条件是 ()

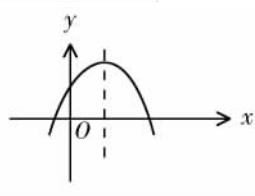
- A. $b = 0$ B. $c = 0$ C. $a + c = 0$ D. $a + b + c = 0$

(6) 一次函数 $y = ax + c$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一平面直角坐标系内的大致图象是 ()



(7) 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 则结论正确的是 ()

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$ B. $a < 0, b > 0, c < 0$
 C. $a < 0, b > 0, c > 0$ D. $a < 0, b < 0, c > 0$



第(7)题

(8) (2006 年湖州市) 已知二次函数 $y = x^2 - bx + 1 (-1 \leq b \leq 1)$, 当

b 从 -1 逐渐变化到 1 的过程中, 它所对应的抛物线位置也随之变动, 下列关于抛物线的移动方向的描述中, 正确的是 ()

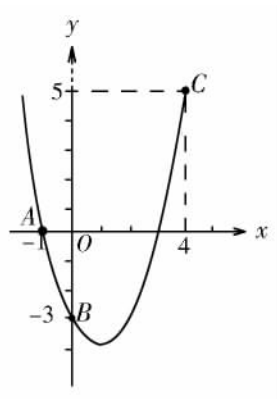
- A. 先往左上方移动, 再往左下方移动 B. 先往左下方移动, 再往左上方移动
 C. 先往右上方移动, 再往右下方移动 D. 先往右下方移动, 再往右上方移动

3. 解答题:

(1) (2004 年沈阳市) 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 A 、 B 、 C 三点.

①观察图象,写出 A 、 B 、 C 三点的坐标,并求出此二次函数的表达式;

②求出此函数的顶点坐标和对称轴.



[第(1)题]

(2)已知抛物线 $y = x^2 + (m-4)x - m$ 与 x 轴的两个交点 A 、 B 关于 y 轴对称,求:(i)这条抛物线的解析式;(ii) A 、 B 两点间的距离.

(3)已知一个二次函数的图象经过 $A(1, -4)$ 、 $B(0, -3)$ 、 $C(-2, 5)$ 三点.

①求此二次函数的解析式;

②把函数解析式化为 $y = (x-h)^2 + k$ 的形式,指出抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标;

③画出这个函数的图象;

④根据图象回答: x 取何值时,函数值大于零、等于零、小于零.

(4)“已知:二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(0,a)$ 、 $B(1,-2)$ 、 \square , 求证:这个二次函数的对称轴是直线 $x=2$.”

题目中的矩形框部分是一段被墨水染污无法辨认的文字.

①根据现有信息,你能否求出题目中二次函数的解析式?若能,写出求解过程;若不能,说明理由.

②请你根据已有信息,在原题的矩形框内,添加一个适当的条件,把原题补充完善.

26.2 用函数观点看一元二次方程

学习目标与素质要求

1. 理解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 间的区别与联系. 体会二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 当 $y=0$ 时的特殊情景.

2. 掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标,就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的几何意义. 即当 $b^2-4ac>0$ 时,抛物线与 x 轴有两个交点;当 $b^2-4ac=0$ 时,抛物线与 x 轴有一个交点;当 $b^2-4ac<0$ 时,抛物线与 x 轴无交点. 学习并掌握数形结合的思想.

3. 会用抛物线的交点求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的近似值,进一步发展估算的能力.

4. 能正确用配方法把 $y=ax^2+bx+c$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.

重点、难点与例题分析

1. 重点:(1)理解并掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象及抛物线与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根之间的关系; $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有两个交点 \Leftrightarrow 一元二次方程有两个不相等的实根

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴只有一个交点 \Leftrightarrow 一元二次方程有两个相等的实根

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴没有交点 \Leftrightarrow 一元二次方程无实数根

(2) 能利用二次函数的图象求一元二次方程的根的近似值.

2. 难点: 理解一元二次方程的根与二次函数的图象抛物线与 x 轴交点的横坐标之间的关系. 用数形结合的思想方法解决相交问题.

3. 例题分析:

【例 1】 (2004 年天津市) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 且 $a < 0, a - b + c > 0$, 则一定有 ()

A. $b^2 - 4ac > 0$ B. $b^2 - 4ac = 0$ C. $b^2 - 4ac < 0$ D. $b^2 - 4ac \geq 0$

分析: $b^2 - 4ac > 0, b^2 - 4ac = 0, b^2 - 4ac < 0$ 是刻画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象抛物线与 x 轴相交有两个交点; 相切有一个交点; 相离无交点的重要参数. 此题能否由 $a < 0; a - b + c > 0$ 来确定 $y = ax^2 + bx + c$ 在直角坐标系中的开口及顶点、对称轴的大体位置, 进而确定抛物线与 x 轴的位置关系呢? 即由 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的位置, 确定与 x 轴交点的个数决定 $b^2 - 4ac$ 的符号; 由 $a < 0$, 知道抛物线开口向下; 由 $a - b + c > 0$, 可判定此抛物线经过点 $(-1, a - b + c)$, 故可画出抛物线草图.

解法一: 图象开口向下, 且过点 $(-1, a - b + c)$, 故可画大致图象如图 26-2-1.

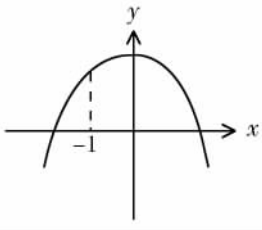


图 26-2-1

由图象知, 函数图象顶点在 x 轴上方, 故顶点坐标 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 中, $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$.

又 $\because a < 0, \therefore 4ac - b^2 < 0$.

即 $b^2 - 4ac > 0$, 故选 A.

解法二: 由解法一知, 函数大致图象如图 26-2-1. 由图象知, 抛物线与 x 轴有两个交点, 也就是, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根. 由求根公式得: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 虽然被开方数 $b^2 - 4ac > 0$, 故选 A.

【例 2】 已知抛物线 $y = x^2 - (2m + 4)x + m^2 - 10$ 与 x 轴交于 A、B 两点, 点 C 是抛物线顶点.

(1) 用配方法求顶点 C 的坐标(用含 m 的代数式表示);

(2) 若 AB 的长为 $2\sqrt{2}$, 求抛物线的解析式;

(3) 若将 AB 的长 $2\sqrt{2}$ 设为等边三角形 ABC 的边长, 那么求抛物线的解析式.

解: (1) $y = x^2 - (2m + 4)x + m^2 - 10$
 $= x^2 - (2m + 4)x + [-(m + 2)]^2 - [-(m + 2)]^2 + m^2 - 10$
 $= [x - (m + 2)]^2 - (4m + 14)$

故点 C 的坐标为 $(m + 2, -4m - 14)$.

(2) 令 $y = 0$, 即 $x^2 - (2m + 4)x + m^2 - 10 = 0$,

$\therefore \Delta = 16m + 56, \therefore x = m + 2 \pm \sqrt{4m + 14}$.

根据“ AB 的长为 $2\sqrt{2}$ ”，得 $|AB| = 2\sqrt{4m+14} = 2\sqrt{2}$ ，所以 $4m+14=2$ ， $m=-3$ 。所求抛物线解析式为 $y=x^2+2x-1$ 。

(3) 如图，设 $\triangle ABC$ 的边长为 t ，则 $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ ， $AD = \frac{1}{2}t$ ，根据题意有：

$$\begin{cases} m+2 = m+2 + \sqrt{4m+14} - \frac{1}{2}t, \\ -(4m+14) = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases} \quad \begin{cases} 4m+14 = \frac{1}{4}t^2, \\ (4m+14)^2 = \frac{3}{4}t^2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{4m+14} = \frac{1}{3}, m = -\frac{11}{4}.$$

$$\therefore y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{39}{16}.$$

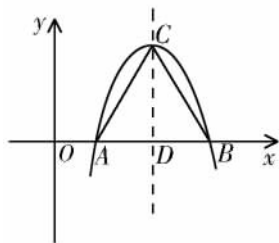


图 26-2-2

说明：第(2)题中，点 A 、 B 是抛物线与 x 轴的交点，也就是点 A 、 B 的横坐标是抛物线对应的一元二次方程的根。

第(3)题中，画出草图是关键，由图很明显地可知：抛物线的对称轴方程是 $x = -\frac{b}{2a} = OD = OA + AD$ 或 $(OB - DB)$ 。

【例 3】 二次函数 $y = x^2 + (m-3)x + m$ 的图象与 x 轴交点至少有一个在原点的右侧，试求 m 的取值范围。

分析：“二次函数 $y = x^2 + (m-3)x + m$ 的图象与 x 轴交点至少有一个在原点的右侧”，就是说，在原点右侧的交点可能是一个，也可能是两个，即抛物线与 x 轴右侧的交点个数不确定，这种情况，通常从意义相反的方面来考虑。

解：与“二次函数图象与二次函数至少有一个点在原点右侧”的意义相反的是“两个交点都不在原点右侧”。

而要使二次函数图象与 x 轴两个交点都不在原点的右侧，则设 x_1, x_2 分别是图象在 x 轴上交点的横坐标，那么，

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (m-3)^2 - 4m \geq 0, \\ -(m-3) < 0, \\ m \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 9, \\ m > 3, \\ m \geq 0, \end{cases} \quad \therefore m \geq 9.$$

即当判别式大于或等于零时，若 $m \geq 9$ 时，两个交点都不在原点的右侧；若 $m \leq 1$ 时，则至少有一个交点在原点的右侧。

【例 4】 已知二次函数 $y = x^2 - 2ax + (b+c)^2$ ，其中 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长。求证：这个函数的图象与 x 轴不相交。

$$\begin{aligned} \text{解：} \Delta &= (-2a)^2 - 4(b+c)^2 \\ &= 4(a+b+c)(a-b-c). \end{aligned}$$

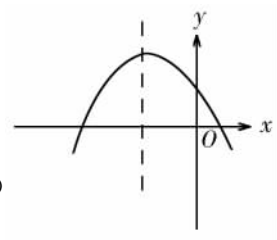
$\because a, b, c$ 为 $\triangle ABC$ 的边长， $\therefore a+b+c > 0, a-b-c < 0$ ，

即 $\Delta < 0$ ， \therefore 这个函数的图象与 x 轴不相交。

检测题

1. 选择题:

- (1) 抛物线 $y=x^2-bx+8$ 的顶点在 x 轴上, 则 b 的值一定为 ()
 A. $4\sqrt{2}$ B. $-4\sqrt{2}$ C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. $\pm 4\sqrt{2}$
- (2) $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的顶点在 x 轴上方的条件是 ()
 A. $b^2-4ac<0$ B. $b^2-4ac>0$ C. $b^2-4ac\geq 0$ D. $c<0$
- (3) 抛物线 $y=-2x^2-x+1$ 的顶点在 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (4) 设 $ab<0$, 且 $\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$, 则函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点一定位于 ()
 A. 第一象限 B. 第四象限 C. 第一或第四象限 D. 无法确定
- (5) 抛物线 $y=x^2-2mx+(m+2)$ 的顶点在第三象限, 则 m 的取值范围为 ()
 A. $m<-1$ 或 $m>2$ B. $m<0$ 或 $m>-1$ C. $-1<m<0$ D. $m<-1$
- (6) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()
 A. 点 $(ac, b+c)$ 在第一象限
 B. 点 $(a+b, ab)$ 在第一象限
 C. 点 $(a+b, ac)$ 在第一象限
 D. 点 $(ab, -b+c)$ 在第一象限
- (7) 当 $m<-1$ 时, 二次函数 $y=mx^2+2x-1$ 的图象 ()
 A. 与 x 轴有两个交点 B. 在 x 轴上方
 C. 与 x 轴有一个交点 D. 在 x 轴下方
- (8) 直线 $y=3x-3$ 与抛物线 $y=x^2-x-1$ 的交点个数为 ()
 A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无法确定



第(6)题

2. 解答题:

- (1) 判别下列二次函数的图象与 x 轴是否有交点, 如果有, 求出交点的坐标; 如果没有, 请说明理由.

① $y=\frac{1}{3}x^2+x+2$; ② $y=4x^2+4x+1$; ③ $y=x^2-4x+2$.

- (2) 解一元二次方程 $x^2-2x-3=0$.

① 作二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象, 并由图象写出它与 x 轴交点的坐标;

② 在同一坐标系内, 作出函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象与函数 $y=1$ 的图象, 根据图象

写出它们的两交点坐标；

③在同一坐标系中,作出函数 $y=x^2-3$ 与 $y=2x$ 的图象,根据图象写出它们两交点的坐标；

④在同一坐标系中,作出函数 $y=x^2$ 与 $y=2x+3$ 的图象,根据图象写出它们两交点的坐标；

⑤总结以上解题过程,你发现了什么?

(3)(2003年天津市)已知抛物线 $y=x^2-2x-8$.

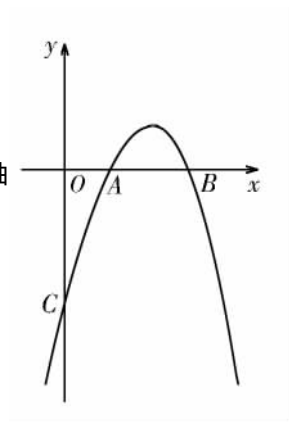
①试证明该抛物线与 x 轴一定有两个交点；

②若抛物线与 x 轴的两个交点分别为 A 、 B ,且它的顶点为 P ,求 $\triangle ABP$ 的面积.

(4)(2003年青海省)如图,已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴

的两个交点为 $A(x_1,0)$ 、 $B(x_2,0)$,且 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{3}$, $x_1+x_2=4$.

①求出此抛物线的表达式；



第(4)题

②设此抛物线与 y 轴的交点为 C , 过 B, C 作直线, 求此直线的表达式;

③求 $\triangle ABC$ 的面积.

(5) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴在 y 轴的右侧, 且抛物线与 y 轴交于 $Q(0, -3)$, 与 x 轴交点为 A, B , 顶点为 P , $\triangle PAB$ 的面积为 8.

①求函数 y 的解析式, 并写出函数图象的对称轴方程;

② x 在什么范围取值时, 使 $y > 0$, 并说明 x 在此范围内变化时, 函数值 y 的变化情况.

(6) 在平面直角坐标系中有两点 $A(-3, 4), B(3, -4)$.

①若抛物线经过 A, B 两点, 求证方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有两个不相等的实数根;

②试判断是否存在经过 A, B 两点, 且以 y 轴为对称轴的抛物线, 并证明你的结论.

(7) 已知抛物线 $y = x^2 - (k+1)x + k$.

①试求 k 为何值时, 抛物线与 x 轴只有一个公共点;

②若此抛物线与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴的负半轴交于点 C . 试问: 是否存在实数 k , 使 $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 相似. 若存在, 求出相应的 k 值; 若不

存在,说明理由.

(8)若抛物线 $y=x^2-2x+m$ 与 x 轴相交于两点 $A(x_1,0)$ 、 $B(x_2,0)$,其中 $x_1 < x_2$,且 $x_1^2+x_2^2=4$.

①求该抛物线的函数解析式;

②设点 C 为该抛物线的顶点,求证 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

(9)已知抛物线 $y=x^2-(m^2+4)x-12m^2-12$,试求 m 为何值时,抛物线与 x 轴两个交点的距离最小? 最小距离是多少?

(10)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(-5,0)$ 、 $(0,\frac{5}{2})$ 、 $(1,6)$ 三点.

①求抛物线的解析式;

②判断直线 $y=2x-3$ 与①中抛物线有没有公共点? 若有,求出交点坐标;若没有,请说明理由;

③若直线 $y=2x+m$ 与①中抛物线只有一个交点,求 m 的值及此时交点的坐标.

(11) 心理学家发现, 学生对概念的接受能力 y 与提出概念所用的时间 x (单位: 分钟) 之间满足函数关系: $y = -0.1x^2 + 2.6x + 43$ ($0 \leq x \leq 30$). y 值越大, 表示接受能力越强.

① x 在什么范围内, 学生的接受能力逐步增强? x 在什么范围内, 学生的接受能力逐步降低?

② 第 10 分钟时, 学生的接受能力是多少?

③ 第几分钟时, 学生的接受能力最强?

(12) (2005 年苏州) 已知二次函数 $y = 2x^2 - mx - m^2$.

① 求证: 对于任意实数 m , 该二次函数图象与 x 轴总有公共点;

② 若该二次函数图象与 x 轴有两个公共点 A 、 B , 且 A 点坐标为 $(1, 0)$, 求点 B 的坐标.

(13) 已知抛物线 $y = x^2 + bx - a^2$.

① 请你选定 a 、 b 适当的值, 然后写出这条抛物线与坐标轴的三个交点, 并画出过三个交点的圆;

② 试讨论此抛物线与坐标轴交点分别是 1 个、2 个、3 个时, a 、 b 的取值范围, 并且求出交点坐标.