

第一章

JIAOCAI DONGTAI QUANJIE

集合与函数概念

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

课 标内容诠释

一、集合的描述以及集合的特征

描述 1: 某些指定的对象集在一起就成为一个集合(或集).

描述 2: 具有某种属性的对象的全体组成一个集合.

特征: (1) 集合是一个“整体”.

(2) 构成集合的对象必须是“确定”的且“不同”的.

注 意

(1) 集合的概念与“全体”的区别: 集合虽然也含有全体的意思, 但与通常所理解的“全体”是有区别的, 集合中的元素必须是确定的, 必须能判断任何一个对象是不是它的元素, 而全体则不一定能成为一个集合.

(2) 构成集合的对象必须是“确定”且“不同”的, 其中: “确定”是指构成集合的对象具有非常明显的特征, 这个特征不是模棱两可的; “不同”是指构成集合的各个对象互不相同. 一般地, 判定一组对象能否构成集合, 就是要看判定对象是否具有一个确定的特征, 如果有, 则能构成集合, 如果没有, 就不能构成集合.

(3) 集合是数学中最原始的不定义的概念, 只能给出描述说明.

注意: 集合是现代数学的基本概念, 专门研究集合的理论叫做集合论, 康托是集合论的创始者.

例 1 给出下列语句, 其中能构成集合的个数为 ()

- (1) 某中学的大胖子的全体
 (2) 2008 年北京奥运会中的所有比赛项目
 (3) 所有正三角形
 (4) 1, 1, 2 三个数的全体
 (5) 与无理数 π 无限接近的数的全体
 (6) 方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 的解的全体
 (7) 小于 99, 且个位与十位上的数字之和是 9 的一些自然数
 (8) 不大于 10 的非负数

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析 (2), (3), (6), (8) 中的对象是确定的, 且互不相同, 而 (1), (5) 中的对象是不确定的, (4) 中含有相同对象 1, (7) 中的对象不是一个整体, 所以 (2), (3), (6), (8) 能确定一个集合, (1), (4), (5), (7) 不能确定一个集合, 故选 C.

警示误区

集合中不能含有相同的元素, 集合必须是一个整体.

答案 C

评 注

一些对象能否构成集合, 必须具备以下两个特点: 一是整体性, 二是确定性. 体现集合整体性的词语有“全体”、“所有”、“汇集在一起”等. 数学中的“集合”与我们平常口语中所表达的“集合”是两个不同的概念, 二者有本质的区别, 不能混淆.

二、集合的元素以及元素的特性

1. 定义: 构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).
2. 特性: ①确定性, ②互异性, ③无序性.

注 意

(1) 集合中的元素可以指任意的具体事物, 集合通常用英文大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示, 元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.

(2) 集合中元素的特性

① 确定性: 设 A 是一个给定的集合, a 是一具体对象, 则 a 要么是 A 的元素, 要么不是 A 的元素, 两种情况必有一种且只有一种成立.

② 互异性: 对于一个给定的集合, 它的任何两个元素是不同的, 设 A 是一个给定的集合, a, b 是 A 的两个元素, 则一定有 $a \neq b$.

③ 无序性: 集合中的元素不讲顺序, 任意变换集合中元素的位置, 集合不变.

例如: $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$, $\{(1, -1), (1, 1)\} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

例 2 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中, 最多含有元素的个数为 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

解析 因为 $\sqrt{x^2} = |x|$, $-\sqrt[3]{x^3} = -x$, 所以实际上是由实数 $x, -x, |x|$ 组成集合. 又因为 $x > 0$ 时, $|x| = x$; $x < 0$ 时, $|x| = -x$; $x = 0$ 时, $|x| = x = -x = 0$, 所以问题实际上是求由实数 $x, -x$ 组成的集合中, 最多含有元素的个数. 因为 $\sqrt{x^2} = |x|$, $-\sqrt[3]{x^3} = -x$, $|x| = \pm x$, 由集合中元素满足“互异性”可知, 集合中元素的个数为 2 个, 故选 A.

答案 A

例 3 (1) 若 $k^2 - k, 2k$ 只能构成一个单元素集合, 则实数 k 应满足条件_____.

(2) 若 $k^2 - k, 2k$ 能构成一个双元素集合, 则实数 k 应满足条件_____.

解析 (1) 由 $k^2 - k = 2k \Rightarrow k = 0$ 或 $k = 3$, $\therefore k = 0$ 或 $k = 3$.

(2) 由 $k^2 - k \neq 2k \Rightarrow k \neq 0$ 且 $k \neq 3$, $\therefore$ 填 $k \neq 0$ 且 $k \neq 3$.

答案 (1) $k = 0$ 或 $k = 3$ (2) $k \neq 0$ 且 $k \neq 3$

例 4 已知 $k^2 \in \{1, 0, k\}$, 求实数 k 的值.

解析 由元素的确定性可知 $k^2 = 0, 1$ 或 k , 由元素的互异性可知 $k \neq 1, 0$.

答案 ① 若 $k^2 = 0$, 则 $k = 0$, 此时集合为 $\{1, 0, 0\}$, 不符合集合中元素的互异性, 舍去.

② 若 $k^2 = 1$, 则 $k = \pm 1$.

a. 当 $k^2 = 1$ 时, 集合为 $\{1, 0, 1\}$, 舍去.

b. 当 $k = -1$ 时, 集合为 $\{1, 0, -1\}$, 符合题意.

③ 若 $k^2 = k$, 则 $k = 0$ 或 $k = 1$, 由此可知, $k = 0$ 和 $k = 1$ 都舍去.

综上所述 $k = -1$.

方法技巧

本题解答运用筛选法, 将由 5 个实数组成集合的问题转化为由 2 个实数组成集合的问题, 体现了数学中化归思想.

本题易混淆 $|x|$ 与 x 及 $-x$, 实际上 $|x|$ 只能为 x 与 $-x$ 其中之一.

特别提示

要注意关联词“或”与“且”的用法, 防止把(1)中答案错写为“ $k = 0$ 且 $k = 3$ ”, 防止把(2)中答案错写为“ $k \neq 0$ 或 $k \neq 3$ ”.

评 注

既要应用元素的确定性、互异性和无序性解题, 又要利用它们检验解正确与否, 即元素的三个特性在解题过程中具有双重作用.

三、元素与集合的关系

1. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$, 读作 a 属于 A .

2. 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$ 读作 a 不属于 A .

注意

(1)“元素”与“集合”的关系好比“个体”与“整体”的关系.当这个个体是这个整体中的一员时,我们就说这个个体属于这个整体;当这个个体不是这个整体中的一员时,我们就说这个个体不属于这个整体.由于“个体”与“整体”之间只有这两种关系,所以元素与集合的关系只有“属于”与“不属于”这两种关系.

(2)任意给定一个元素 a 和一个集合 A ,要么 $a \in A$,要么 $a \notin A$,不存在第三种情况.

(3)符号“ $\in, \notin$ ”只能用在元素与集合之间,表示元素与集合的从属关系,除此以外,“ $\in, \notin$ ”没有其他用途.

例 5 某校高一年级有 4 个班,其中学生甲、学生乙、学生丙、学生丁分别在高一(1)班、高一(2)班、高一(3)班、高一(4)班. 设集合 $A = \{\text{高一(1)班学生}\}$, 集合 $B = \{\text{高一(2)班学生}\}$, 集合 $C = \{\text{高一(3)班学生}\}$, $D = \{\text{高一(4)班学生}\}$, 集合 $E = \{\text{高一年级学生}\}$, 集合 $F = \{A, B, C, D, E\}$.

试根据上述条件建立元素与集合的关系.

解析 根据“元素”与“集合”之间的关系为“属于”与“不属于”的关系,甲、乙、丙、丁与 A, B, C, D, E, F 之间是元素与集合之间的关系,由于集合 F 中的元素是集合 A, B, C, D, E ,所以 A, B, C, D, E 与 F 之间也是元素与集合的关系.

答案 如下表所示:

关系 元素 \ 集合	A	B	C	D	E	F
甲	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
乙	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
丙	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
丁	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

特别提示

由于集合中的元素可以为一切具体事物,所以集合的元素也可以为集合.

关系 元素 \ 集合	F
A	$\in$
B	$\in$
C	$\in$
D	$\in$
E	$\in$

易错点提醒

① 将“ $a \in A$ ”错写成“ $a \ni A$ ”,或错写成“ $A \in a$ ”.

② 将“集合 $\{(1, -1)\}$ ”错写成“集合 $\{1, -1\}$ ”,要注意 $\{(1, -1)\}$ 与 $\{1, -1\}$ 是两个不同性质的集合.

四、常用数集及其记法

1. 非负整数全体构成的集合,叫做自然数集,记作 $\mathbf{N}$;
2. 在自然数集内排除 0 的集合叫做正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;
3. 整数全体构成的集合,叫做整数集,记作 $\mathbf{Z}$;
4. 有理数全体构成的集合,叫做有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;
5. 实数全体构成的集合,叫做实数集,记作 $\mathbf{R}$.

注 意

自然数集与非负整数集是相同的,也就是说,自然数集包括数 0.

国家标准定义自然数集 $\mathbf{N}$ 含元素 0,从数学本身的角度看,有其积极意义:一方面, $0 \in \mathbf{N}$ 后,可以建立集合的元素个数组成的集合与自然数 $\mathbf{N}$ 的一一对应关系. 过去,由于 0 不属于自然数集,空集的元素个数为 0,集合的元素个数组成的集合与原自然数集之间无法建立自然的一一对应的关系. 另一方面,0 是十进位数 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 中最小的数,有了 0,减法运算 $a - a$ 仍属于 $\mathbf{N}$,其中 $a \in \mathbf{N}$.

例 6 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空.

- 1 _____ $\mathbf{N}$, 0 _____ $\mathbf{N}$, -3 _____ $\mathbf{N}$, 0.5 _____ $\mathbf{N}$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{N}$;
 1 _____ $\mathbf{Z}$, 0 _____ $\mathbf{Z}$, -3 _____ $\mathbf{Z}$, 0.5 _____ $\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Z}$;
 1 _____ $\mathbf{Q}$, 0 _____ $\mathbf{Q}$, -3 _____ $\mathbf{Q}$, 0.5 _____ $\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Q}$;
 1 _____ $\mathbf{R}$, 0 _____ $\mathbf{R}$, -3 _____ $\mathbf{R}$, 0.5 _____ $\mathbf{R}$, $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{R}$.

解析 若 a 在集合内时,用符号“ $\in$ ”,而 a 不在集合内时,用符号“ $\notin$ ”.

答案 $1 \in \mathbf{N}$, $0 \in \mathbf{N}$, $-3 \notin \mathbf{N}$, $0.5 \notin \mathbf{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$

$1 \in \mathbf{Z}$, $0 \in \mathbf{Z}$, $-3 \in \mathbf{Z}$, $0.5 \notin \mathbf{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$

$1 \in \mathbf{Q}$, $0 \in \mathbf{Q}$, $-3 \in \mathbf{Q}$, $0.5 \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

$1 \in \mathbf{R}$, $0 \in \mathbf{R}$, $-3 \in \mathbf{R}$, $0.5 \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$

评 注

要注意符号的规范书写.

五、集合的分类

1. 按集合元素的个数可分为有限集、无限集和空集.
2. 按集合元素的属性可分为点集、数集、序对集等.

注意

(1) 含有有限个元素的集合叫做有限集, 含有无限个元素的集合叫做无限集, 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$.

(2) 空集归入有限集, 要注意 $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 的不同含义.

例 7 下列命题中, 真命题的个数是 ()

① $0 \in \emptyset$ ② $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ③ $0 \in \{0\}$ ④ $\emptyset \notin \{a\}$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析 要判断一个元素是否在某个集合中, 关键在于弄清这个集合是由哪些元素所组成的. $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, 故①错. 而 $\{\emptyset\}$ 是由空集作为元素组成的一个集合, 故②正确. 同理, ③也正确. ④不正确, 因为 $\notin$ 是表示元素与集合之间的关系, 故选 B.

答案 B

注意

空集就像一个无处不在的幽灵, 必须时刻提高警惕, 才不至于掉进空集这一陷阱之中.

例 8 设集合 $A = \{x | 6 + \sqrt{3} < x \leq 10\}$.

(1) A 是有限集还是无限集?

(2) $3 + \sqrt{17}$ 是不是集合 A 中的元素? $5\sqrt{3}$ 呢?

解析 (1) 因为大于 $6 + \sqrt{3}$ 且小于等于 10 的实数有无穷多, 也就是 A 中有无穷多个元素, 所以集合 $A = \{x | 6 + \sqrt{3} < x \leq 10\}$ 是无限集.

(2) $\because (\sqrt{17})^2 - (3 + \sqrt{3})^2 = 17 - (12 + 6\sqrt{3}) = 5 - 6\sqrt{3} < 0$

$\therefore \sqrt{17} < 3 + \sqrt{3}, \therefore 3 + \sqrt{17} < 6 + \sqrt{3}$

$\therefore 3 + \sqrt{17} \notin A$

又 $\because (6 + \sqrt{3})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 39 + 12\sqrt{3} - 75 = 12\sqrt{3} - 36 < 0$

$\therefore 6 + \sqrt{3} < 5\sqrt{3}$

又 $5\sqrt{3} < 10 \therefore 6 + \sqrt{3} < 5\sqrt{3} < 10$

$\therefore 5\sqrt{3} \in A$.

答案 (1) 无限集. (2) $3 + \sqrt{17}$ 不是, $5\sqrt{3}$ 是.

方法技巧

在比较数的大小时用到了平方法.

评 注

由于集合多种多样,因此判断方法也多种多样,应因题而异.

六、列举法

定义:将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法叫做列举法.

说明:用列举法表示集合时,要注意如下几点:

- (1)要把集合中的元素都列举出来,写在大括号“ $\{ \}$ ”内;
- (2)元素间分隔用逗号“ $,$ ”;
- (3)元素不重复;
- (4)元素无顺序.

特别提醒

由一个元素构成的集合,例如 $\{a\}$,要与它的元素 a 加以区别, a 与 $\{a\}$ 是完全不同的, a 是集合 $\{a\}$ 的一个元素,而 $\{a\}$ 表示一个集合,所以 $a \in \{a\}$.

1. 用列举法表示数集

- (1)一般形式: $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$,其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是实数.
- (2)说明:数集是高中数学中常见的集合,如具体数集,一元方程和不等式的解集,函数的定义域和值域构成的数集等.

例 9 用列举法表示下列集合.

- (1)小于 10 的所有自然数组成的集合.
- (2)方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合.
- (3)由 1~20 中的所有质数组成的集合.

解析 用列举法表示集合时,应明确集合的元素所满足的特征,然后把集合中的元素一一列举出来,写在 $\{ \}$ 内即表示这个集合.

答案 (1)设小于 10 的所有自然数组成的集合为 A ,那么 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(2)设方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合为 B ,那么 $B = \{0, 1\}$.

(3)设由 1~20 中的所有质数组成的集合为 C ,那么 $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

评 注

由于元素完全相同的两个集合相等,而与所列举的顺序无关,因此集合 A, B, C 可以有不同列举法.例如: $A = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$, $B = \{1, 0\}$, $C = \{19, 17, 13, 11, 7, 3, 2, 5\}$ 等.

2. 用列举法表示点集

(1)一般形式:①平面内的点集: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$. ②空间中的点集: $\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$.

(2)说明:点集是高中数学中常见的一种集合,常见的点集有函数图像上的点构成的集合,曲线上的点构成的集合,平面区域上的点构成的集合等.

例 10 用列举法表示下列集合:

(1) 直角坐标平面内的点 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ 组成的集合.

(2) 空间直角坐标系中的点 $(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$ 组成的集合.

(3) 一次函数 $y = x + 1$ 与二次函数 $y = x^2$ 的交点组成的集合.

解析 (1) 集合中有 4 个元素, 这 4 个元素分别表示直角坐标平面内 4 个不同位置的点.

(2) 集合中有 3 个元素, 它们分别表示空间直角坐标系内 3 个不同位置的点.

(3) 由 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$ 交点分别为 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$.

答案 (1) 设点 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ 组成的集合为 M , 那么

$$M = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}.$$

(2) 设点 $(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$ 组成的集合为 N , 那么

$$N = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}.$$

(3) 设函数 $y = x + 1$ 与函数 $y = x^2$ 的交点组成的集合为 P , 那么 $P = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})\}$.

特别提示

二维空间与三维空间中的点写法不同. n 维空间中的点写为 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

易错点提醒

① 错将点集 $\{(1, -1)\}$ 写成 $\{1, -1\}$, 前者是点集, 后者是数集, 是两个不同性质的集合.

② 错将点集 $\{(1, -1)\}$ 写成 $\{(-1, 1)\}$, $(1, -1)$ 与 $(-1, 1)$ 在同一直角坐标平面内代表不同的点, 不能随便交换 1 与 -1 的次序.

3. 含有较多元素的集合的列举法表示

有些集合的元素较多, 元素又呈现一定的规律, 在不至于发生误解的情况下, 可列出几个元素作为代表, 其他元素用省略号表示. 例如, 不大于 100 的自然数的全体构成的集合, 可表示为 $\{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$.

无限集有时也可用列举法表示, 例如自然数集 $\mathbf{N}$ 可表示为 $\{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

例 11 用列举法表示下列集合.

(1) 大于 -100 小于 100 的所有整数组成的集合.

(2) 能被 2 整除的全体自然数组成的集合.

(3) 能被 2 整除且能被 3 整除的全体自然数组成的集合.

(4) 能被 5 整除且不大于 100 的自然数组成的集合.

答案 (1)大于-100 小于 100 的所有整数组成的集合 $M=\{-99,-98,-97,\dots,98,99\}$

(2)能被 2 整除的全体自然数组成的集合 $N=\{0,2,4,6,\dots\}$.

(3)能被 2 整除且能被 3 整除的全体自然数组成的集合 $P=\{0,6,12,18,\dots\}$.

(4)能被 5 整除且不大于 100 的自然数组成的集合 $Q=\{0,5,10,15,\dots,100\}$.

解题技巧

探索集合中元素的构成规律并揭示出来是解决问题的关键.

评注

构成集合的元素是什么,是通过规律体现的,要用集合中已经写出来的几个元素及其次序来揭示规律,且必须是明显的.例如集合 $\{1,2,\dots\}$ 中的元素构成规律不明显,无法确定其中元素.

七、特征性质描述法

定义:把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法叫做特征性质描述法.

特征性质描述法的语言形式有三种:①文字语言,②符号语言,③图形语言.

注意

(1)如果在集合 I 中,属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$,而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$,则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个特征性质.

(2)用特征性质描述法表示集合有三种方法:

方法 1:文字语言形式;

方法 2:符号语言形式;

方法 3:图形语言形式.

(3)上述三种方法各有优点,应根据具体问题确定采用哪种表示方法.

1. 文字语言形式描述

把集合元素的共同属性用语言叙述并写在大括号内的形式.例如: $\{\text{奇数}\}$, $\{\text{锐角三角形}\}$ 等.

(1)要说明该集合中元素的性质.

(2)所有描述的内容都要写在集合符号内.

(3)用于描述的语句力求简明、准确.

例 12 用描述法表示下列集合:

(1)1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 的全体组成的集合.

(2)0,1,4,9,16 的全体组成的集合.

(3)全体整数组成的集合.

(4)所有实数组成的集合.

特别提示

多层描述时,应当准确使用“且”、“或”.

(5)梯形的全体组成的集合.

(6)珠穆朗玛峰组成的集合.

答案 (1){大于 0 小于 11 的自然数}

(2){自然数中五个最小的完全平方数}

(3){整数}

(4){实数}

(5){梯形}

(6){世界上最高的山峰}

2. 符号语言形式描述

把集合 A 用特征性质 $p(x)$ 描述为 $A = \{x \in I | p(x)\}$, 它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的集合, 其中 x 是集合 A 的代表元素, I 是 x 的范围, $p(x)$ 是 x 满足的特征性质.

特别提示

① 严禁将整数集写成 {全体整数}. 因为符号“{ }”已包括“所有”、“全体”的意义.

② 严禁将实数集写成 {实数集} 或写成 {R}. 因为 {R} 表示以实数集为元素的集合, $R \in \{R\}$.

注意

(1)要写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号),并写在竖线前面.

(2)要写清楚元素所具有的公共属性,并写在竖线后面. 例如:不等式 $3x+2 < 1$ 的解集可表示为 $\{x | 3x+2 < 1\}$, 抛物线 $y = x^2 + 1$ 上的点集,可表示为 $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$.

例 13 用适当的方法表示下列各集合:

(1)由所有非负偶数组成的集合.

(2)由所有小于 20 的既是奇数又是质数的正数组成的集合.

(3) $x^2 - 9$ 的一次因式组成的集合.

(4)方程 $(x-1)(x-2)(x^2-5)=0$ 的解组成的集合.

(5)直角坐标系内第三象限的点组成的集合.

(6)以 A 为圆心, m 为半径的圆上所有点组成的集合.

答案 (1) $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$ 或 $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

(2) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(3) $\{x-3, x+3\}$

(4) $\{1, 2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

(5) $\{(x, y) | x < 0, y < 0\}$

(6) $\{P | |PA| = m\}$

解题规律

列举法与描述法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种方法表示.

评 注

在这里要指出的是,如果从上下文的关系来看, $x \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{Z}$ 是明确的,那么 $x \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{Z}$ 可以省略.例如,集合 $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 10\}$ 也可表示为 $D = \{x \mid x < 10\}$, $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 也可表示为 $E = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$.

3. 图形语言形式描述

在坐标系中,把集合的特征性质用图形表示出来,这种方法适用于点集.

例 14 用图形表示下列各点集:

(1) $A = \{(x, y) \mid |x| = 2, y = |x|\}$.

(2) $B = \{(x, y) \mid y = x^2, y = 2x + 3\}$.

(3) $C = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq x, y = x^2\}$.

(4) $D = \{(x, y) \mid 1 < x < 3, 1 < y < 2\}$.

(5) $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$.

解析 (1) $\because |x| = 2, \therefore x = \pm 2, \therefore y = 2, \therefore A = \{(2, 2), (-2, 2)\}$,如图 1-1-1 中(1).

(2) B 中的元素是函数 $y = x^2$ 与函数 $y = 2x + 3$ 图像的交点. $B = \{(-1, 1), (3, 9)\}$,如图 1-1-1 中(2).

(3) C 中的元素是抛物线 $y = x^2$ 上的部分点,如图 1-1-2 中(3).

(4) D 中的元素是一个矩形面内的点,如图 1-1-1 中(4).

(5) E 中的元素是一个三角形面内的点,如图 1-1-1 中(5).

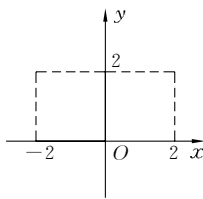
答案 如下图 1-1-1 所示.

特别提示

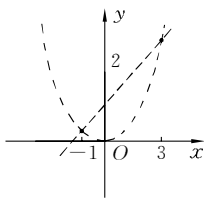
由平面(或空间)的点组成的集合,通常叫做点集.

特别提示

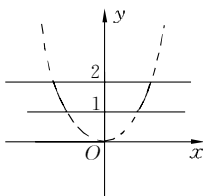
要注意符号语言与图形语言的转化.



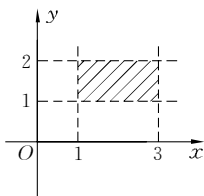
(1)



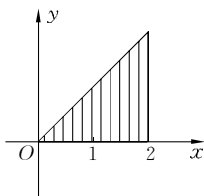
(2)



(2)



(4)



(5)

图 1-1-1

注意

(4)图不包括矩形边界,就画虚线.(5)图包括三角形边界,应画实线.

八、维恩(Venn)图法

定义:为了形象地表示集合,我们常画一条封闭的曲线,用它的内部表示集合,这种表示集合的方法叫做维恩图法.这个区域通常叫做维恩图.

注意

(1)维恩图法的最大特点是形象、直观.

(2)维恩图法通常只是作为一种解题的辅助工具,一般集合的表示方法的最终结果不用图示法.

例 15 用维恩图法表示集合 $\{a, b, c, d\}$.

答案 如图 1-1-2 所示

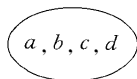


图 1-1-2

评注

在数学解题中,如果数学问题的叙述以抽象的字母和符号语言出现,解题能力强的人在审题时往往会先画出草图,便于计算和进行推理.

九、解集及其表示方法

定义:满足方程(或不等式)的所有元素组成的集合叫做这个方程(或不等式)的解集.

表示方法:通常用列举法表示方程的解集,用描述法表示不等式的解集.

注意

常见的解集有方程(或方程组)的解集、不等式(或不等式组)的解集.

例 16 求下列方程(方程组)、不等式(不等式组)的解集.

$$(1) x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (2) x^2 - 9x + 14 < 0$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

解析 分别求出方程(方程组)或不等式(不等式组)的解,则解集中就有几个元素.

答案 (1) $\because x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为 $x_1 = 1, x_2 = 2$,

$\therefore$ 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集为 $\{1, 2\}$.

(2) $\because x^2 - 9x + 14 < 0$ 的解为 $2 < x < 7$,

$\therefore x^2 - 9x + 14 < 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 7\}$.

(3) $\because$ 方程组 $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集为 $\{(1, 0)\}$.

(4) $\because$ 不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 的解为 $-2 < x < 3$, 不等式 $x^2 - x - 2 \geq 0$ 的解为 $x \leq -1$

或 $x \geq 2$, $\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$ 的解为 $-2 < x \leq -1$ 或 $2 \leq x < 3$, $\therefore$ 不等式组

$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$ 的解集为 $\{x | -2 < x \leq -1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.

警示误区

将方程组 $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集 $\{(1, 0)\}$ 误写为 $\{1, 0\}$.

评注

解与解集是两个不同的概念,一定要区别.若问题中只要求求出解,则不写成集合的形式,如方程 $x+1=0$ 的解为 $x=-1$;若问题中要求求解集,则一定要写出解集,如方程 $x+1=0$ 的解集为 $\{-1\}$ 或写成 $\{x | x=-1\}$.

潜能开发广角

概念辨析

集合是中学数学中一个重要的基本概念,要真正掌握集合的概念并能正确地运用它.

例 17 设 P, Q 是两个非空集合,定义:

$$P \times Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$$

若 $P = \{3, 4, 5\}, Q = \{4, 5, 6, 7\}$, 则 $P \times Q$ 中元素的个数是_____.

解析 根据定义, $P \times Q$ 是一个由有序数对组成的集合,其中第1个数 a 从集合 $P = \{3, 4, 5\}$ 中选取,有3种选法,第2个数 b 从集合 $Q = \{4, 5, 6, 7\}$ 中选取,有4种选法.

故集合 $P \times Q$ 中元素的个数是 $3 \times 4 = 12$.

答案 12

评注

本题为在现有运算法则和运算律的基础上,定义一种新的运算.由于“新定义”题编制角度新颖,突出能力立意,突出对学生数学素质的考查,特别能够考查学生“现场做题”的能力.因此,在近年各地高考模拟试题和高考试题中多次出现.

思维诊断

在求解有关集合中的元素问题时,由于思维过程不周密,不严谨,从而导致误解.元素的互异性至关重要,要特别重视.

例 18 已知集合 $A = \{1, 3, a^2 + a, a + 1\}$, 若 $a \in A$, 求实数 a 的值.

错解 ① 若 $a^2 + a = a$, 则 $a = 0$.

② 若 $a + 1 = a$, 则 $a \in \emptyset$

$\therefore$ 实数 a 的值为 $a = 0, 1, 3$.

正解 ① $a = 1$ 时, $A = \{1, 3, 2, 2\}$, 不满足互异性, 舍去.

② $a = 3$ 时, $A = \{1, 3, 12, 4\}$, 满足题意.

③ $a = a^2 + a$ 时, 则 $a = 0$, $A = \{1, 3, 0, 1\}$, 不满足互异性, 舍去.

④ $a = a + 1$ 时, $a \in \emptyset$.

$\therefore$ 符合条件的 a 值为 $a = 3$.

特别提醒

当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, A 中元素不满足互异性.

综合延伸

含参数的集合问题是本节的重点和难点,在解这类问题时,要注意分类讨论思想及等价转换思想的运用.

例 19 求方程 $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y - 5 = 0$ 的实数解集.

错解 原方程可化为 $4x^2 - 4x + 1 + 9y^2 + 12y + 4 = 0$

即 $(2x - 1)^2 + (3y + 2)^2 = 0$

则 $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3y + 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

答案 故原方程的实数解集为: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

正解 $\dots\dots$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

故原方程的实数解集为 $\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$.

特别提示

① 集合的符号是用 $\{ \}$ 表示.
② 原方程中的解集中的素应是 (a, b) 的形式.

例 20 下面几种表示法,能正确表示方程组 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

① $\{x = -1, y = 2\}$, ② $\{(x, y) \mid \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}\}$, ③ $\{-1, 2\}$, ④ $\{-1, 2\}$, ⑤ $\{(-1, 2)\}$,

⑥ $\{x, y \mid x = -1, \text{或 } y = 2\}$

A. ①②③④⑤⑥

B. ②③④⑤

C. ②⑤

D. ②⑤⑥

解析 由于方程组的解是 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, 因而写成集合时, 元素应为一对有序实数 $(-1, 2)$.

$$\therefore \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \right\} = \{(-1, 2)\},$$

$\therefore$ 选 C.

答案 C

解题规律

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (A \neq 0)$ 的解集中代表元素为实数 x , 二元方程组的解集中代表元素为有序实数对 (x, y) , 二元方程的解集中代表元素也为有序实数对 (x, y) .

例 21 数集 A 满足: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

求证: (1) 若 $2 \in A$, 则在 A 中还有另外两个数, 求出这两个数.

(2) 集合 A 不可能是单元素实数集.

(3) 集合 A 中至少有三个不同的元素.

解析 (1) 可仿例 20 的解法求得. (2) 可采用反证法, 假设集合 A 是单元素实数集, 则一定有 $a = \frac{1}{1-a} \Rightarrow$ 方程 $a^2 - a + 1 = 0$ 无解. (3) 用递推方法可证.

证明 (1) $\because 2 \in A, 2 \neq 1, \therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A$

$$\because -1 \in A, -1 \neq 1 \therefore \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$$

$$\because \frac{1}{2} \in A, \frac{1}{2} \neq 1, \therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$$

$$\therefore -1, \frac{1}{2} \in A, \text{即集合 } A \text{ 中另外两个数为 } -1 \text{ 和 } \frac{1}{2}.$$

(2) 假设 A 是单元素实数集, 则 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$

又 $\because$ 方程 $a^2 - a + 1 = 0$ 无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$,

$\therefore$ 集合 A 不可能是单元素的集合.

(3) $\because a \in A, a \neq 1$ 时, 有 $\frac{1}{1-a} \in A$, 且 $\frac{1}{1-a} \neq 1$

$$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \neq 1$$

进一步, 有 $\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}} = a \in A$.

$$\therefore \text{若 } a \in A, \text{ 则 } \frac{a-1}{a} \in A, \frac{1}{1-a} \in A$$

方法规律

① 证明(2)中根据“正难则反”的原则, 运用反证法构造出一个无实数解的一元二次方程, 从而使问题得证.

② 证明(3)中运用了递推思想和分类讨论思想.

① 由(2)知, $a \neq \frac{1}{1-a}$, $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{a-1}{a}$.

② 若 $a = \frac{a-1}{a}$, 则 $a^2 - a + 1 = 0$, 无解, $\therefore a \neq \frac{a-1}{a}$,

$\therefore a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{a}$ 是三个不同元素, 故集合 A 中至少有三个不同元素.

易忽略点提醒

在证明(3)中易忽略讨论三数 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{a}$ 是互异的.

例 22 设 $a, b \in \mathbf{Z}$, 集合 $P = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in P$, 但点 $(1, 0) \notin P$, 点 $(3, 2) \notin P$, 求 a, b 的值.

解析 $(2, 1) \in P$, 说明 $(2, 1)$ 适合不等式 $(x-a)^2 + 3b \leq 6y$; $(1, 0) \notin P \Leftrightarrow (1, 0) \in \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b > 6y\}$, $(3, 2) \notin P \Leftrightarrow (3, 2) \in \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b > 6y\}$.

答案 $\because (2, 1) \in P, \therefore (2-a)^2 + 3b \leq 6$,

$\because (1, 0) \notin P, \therefore (1-a)^2 + 3b > 0$,

又 $\because (3, 2) \notin P, \therefore (3-a)^2 + 3b > 12$,

由①, ② $\Rightarrow 6 - (2-a)^2 > -(1-a)^2$, 展开整理,

得 $2a + 3 > 0, \therefore a > -\frac{3}{2}$

由①, ③ $\Rightarrow a < -\frac{1}{2}, \therefore -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$

又 $a, b \in \mathbf{Z}, \therefore a = -1$, 代入① $\Rightarrow -4 \leq 3b \leq -3, \therefore b = -1$.

综上所述, $a = -1, b = -1$.

①

②

③

特别提示

其中符号“ $\leq$ ”到“ $>$ ”的过渡是至关重要的一步.

评注

① 本题的解法应用了等价转换的数学思想, 将 $(1, 0) \notin P, (3, 2) \notin P$ 转化为与之等价的命题, 从而找到了解决问题的突破口, 希望同学们在以后的学习中注意归纳和使用.

② 本题的解法具有一般性: P 是点集, 对于任何点集 (x, y) 有要么 $(x, y) \in P$, 要么 $(x, y) \notin P$, 二者必具其一.

联系与拓展

列举法 $\xleftrightarrow{\text{根据对元素规律观察, 概括出公共属性}}$ **描述法**
 $\xleftrightarrow{\text{根据元素满足的条件, 求出具体元素}}$

例 23 集合 $\{n \mid \frac{n}{2} \in \mathbf{Z}\}$ 和集合 $\{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ 各表示什么?

答案 集合 $\{n \mid \frac{n}{2} \in \mathbf{Z}\}$ 中的代表元素 n 具有除以 2 为整数的性质, 所以 n 应是偶

注意

虽然本例中两个集合的描述形式不同,但实质是一样的,它们表示同一集合.

例 24 用图示法表示下列集合以及它们之间的关系.

$A = \{\text{四边形}\}, B = \{\text{平行四边形}\}, C = \{\text{梯形}\}, D = \{\text{菱形}\},$
 $E = \{\text{正方形}\}, F = \{\text{矩形}\}.$

解析 用维恩图表示如图 1-1-3.

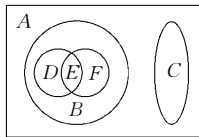


图 1-1-3

思考

图示法表示集合的优、缺点在哪里？

问题研讨

正确理解集合的内涵,有利于解决集合的有关问题.

例 25 以下用描述法给出的三个集合是表示同一集合吗？它们之间有何区别与联系？

$$A=\{x|y=\sqrt{1-x^2}\} \quad B=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\} \quad C=\{(x,y)|y=\sqrt{1-x^2}\}$$

学生甲: A, B 是数集, C 是点集.

老师:甲回答的很对.请同学们想一想: A, B 这两个数集有什么不同吗? 它们表示同一集合吗?

学生乙: A, B 中的元素代号不同, A 中的元素是 x , B 中的元素是 y , 但 A, B 两集合元素的属性相同, 即 $y = \sqrt{1-x^2}$, 所以 A, B 表示同一集合.

老师:有不同意见到吗?

学生丙: A, B 不相同, A 是函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的自变量 x 组成的集合, 而 B 是函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的函数值 y 组成的集合, 所以 A, B 不表示同一集合.

老师:丙回答的很对,事实上, $A=\{x|-1\leq x\leq 1\}$, $B=\{y|0\leq y\leq 1\}$.显然 $A\neq B$,若将两个集合改为 $A=\{x|y=x+1\}$, $B=\{y|y=x+1\}$,请同学们思考: A,B 是否表示同一集合呢?

学生丁: A, B 是表示同一集合, 因为 A, B 两集合分别表示函数 $y = x + 1$ 的定义域、值域, 而函数 $y = x + 1$ 的定义域、值域都是实数集, 所以 A, B 表示同一集合.

老师:丁回答的很对.下面请同学们试着用图形表示点集 C.