

黄冈专题兵法

高中数学

直线 平面 简单几何体

主 编	高华文		
编 者	高华文	程建华	钟开基
	姚水泉	范爱华	吴 浩
	袁新宏	钟 山	李 刚
	阮班忠	廖金木	张 华

陕西师范大学出版社

直线平面简单几何体

绪论

第一讲

基础导学

1.1	平面	3
1.2	空间直线	15
1.3	直线与平面平行的判定与性质	31
1.4	直线与平面垂直的判定与性质	45
1.5	两个平面平行的判定与性质	66
1.6	两个平面垂直的判定与性质	79
1.7	棱柱	95
1.8	棱锥	108
1.9	研究性课题:多面体欧拉公式的发现	122
1.10	球	131

第二讲

聚合思维能力培养

一、综合知识归纳	143
二、综合例题解析	147
三、综合能力测试	155



第三讲

研究性学习与发散思维能力的培养

- 一、研究性课题与案例分析 166
- 二、探究与应用 167

第四讲

高考链接

- 一、命题规律 177
- 二、变化趋势 178
- 三、考场思维诊断 179
- 四、高考试题测试 186
- 五、高考新题预测 192

绪 论

知 识 背 景

几何学是研究空间(或平面)图形的形状、大小和位置关系的一门科学,简称为几何。“几何”这一名词最早出现于希腊,由希腊文“土地”和“测量”合成,意思是“测地术”。实际上,希腊人所称的“几何”是指数学,对测量土地的科学,希腊人用了“测地术”的名称。

几何学的发展大体上可分为四个时期,独立的几何学的形成时期是第二个时期,公元前3世纪古希腊数学家欧几里得根据前人长期积累的几何知识加以系统整理,在公理法的基础上,创造性地编著了一部系统的几何与数论的书《几何原本》,共十五卷,其中第十一到第十五卷对立体几何进行了论述。

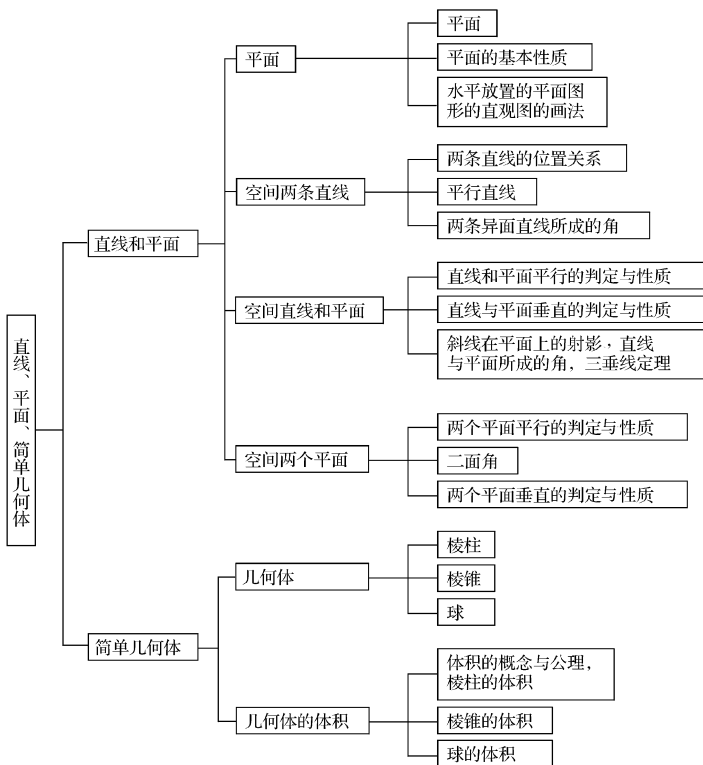
由于时代的局限性,《几何原本》也存在基础部分尚欠严密,个别证明存在疏误,有以偏概全、罗列堆砌的缺点;全书也没有一个直接联系实际的问题,但《几何原本》仍不失为一本伟大的科学经典著作。随着人类认识空间的扩大,其缺陷逐渐被19世纪许多数学家修改和补充,直到1899年,德国数学家希尔伯特出版了一本《几何学基础》,才确立了几何学的更科学的形式演绎系统,摆脱了从直观和经验出发的传统模式,并建立了公理化的形式几何系统,平面的基础性质的三个公理及三个推论就记录在其中。

立体几何是几何学的一个分支,其本质是研究空间形体的位置关系和数量关系,并且侧重位置关系的讨论。立体几何研究的主要对象是空间的点、直线、平面、多面体和旋转体。





知识体系



第一讲

基础导学

1.1 平面

一、重难点突破

突破点

对于平面的概念可利用现实中的例子结合平面的描述性概念帮助理解. 平面是一个只描述而不定义的最基本的概念. 我们在日常生活中常见的地面、黑板面、平静的水面等都给我们以平面的形象, 但它们都有大小, 我们只能把它们看成平面的一部分. 事实上, 立体几何中的平面已不再具有其形象物体的一切具体属性, 是一种理想化的绝对的平面且可以无限延展的空间图形.

平面是无限延展的, 因此, 平面没有边界, 不计大小, 不计厚薄, 也无所谓面积. 此特征可联系直线的无限延伸性帮助理解. 一个平面把空间分成两部分.

当从适当的角度和距离观察桌面时, 感到它们都很像平行四边形. 因此, 通常画平行四边形来表示平面. 有时根据需要也可用其他平面图形(如矩形、菱形、三角形等)表示平面. 当平面是水平放置时, 通常把平行四边形的锐角画成 45° , 横边画成邻边的两倍长. 画直立平面时, 要有一组对边为铅垂线.

当一个平面的一部分被另一个平面遮住时, 应把被遮部分的线段画成虚线或不画, 但是这与平面几何中添加的辅助线应画成虚线不同.

平面通常用一个希腊字母 α 、 β 、 γ 等来表示, 如平面 α , 平面 β , 平面 γ 等; 也可用表示平行四边形的两个相对的顶点的字母来表示, 如平面 AC .

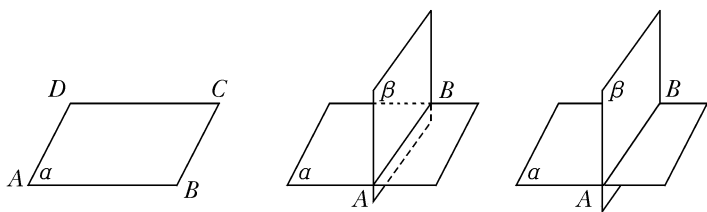
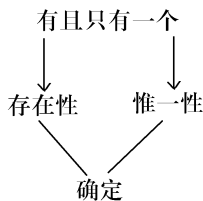


图 1-1-1

突破点二

公理和推论中的“有且只有一个”，容易与“只有一个”混淆，学习时应注意现实生活中的“只有一个”与数学中的“只有一个”的区别与联系。公理和推论中的“有”说明图形是存在的，“只有一个”说明图形是惟一的。数学中的“只有一个”并不保证符合条件的图形一定存在，所以不能用“只有一个”来代替“有且只有一个”。符合某一条件的图形既然存在，而且只能有一个，就说明这个图形完全是确定的，因此“有且只有一个”和“确定”是同义词。例如，在数学中，如果仅说“有一个平面”只说明存在一个平面，而不能说只有一个平面；如果说“只有一个平面”是说有的话顶多只有一个，但并不保证平面存在。



突破点三

对公理三的推论 3 的理解和证明，可借助于实际例子及平行线的定义帮助分析。如一扇门，将相对的两条边固定后，门就被固定了，这是一个人们不可否认的事实。下面我们用数学语言进行严格的推论和证明。

因为当两条直线在同一平面内，且不相交时叫做平行线，所以两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内。就是说，过两条平行直线有一个平面。

如果过 a 和 b 还有一个平面 β , 那么在 a 上的任意一点 A 一定在 β 内, 这样过点 A 和直线 b 有两个平面分别为 α 和 β , 这和推论 1 矛盾, 所以过平行直线 a 和 b 的平面只有一个.

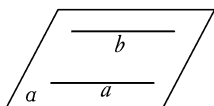


图 1-1-2

公理 3 及其三个推理是确定平面的依据, 也是空间问题转化为平面问题的依据.

二、开放课堂



生问

如图 1-1-3 所示的纸片表面是平面的一部分吗?

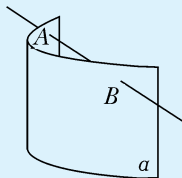


图 1-1-3



师答

如图 1-1-3 所示的纸片表面不是平面的一部分. 因为假设如图所示的纸片表面是平面的一部分, 由于直线 AB 上有两点 A 、 B 在平面 α 上, 根据公理 1: 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内. 可知 AB 直线在平面 α 内, 事实上直线 AB 上只有两点在纸片表面上, 所以假设不成立, 故如图所示的纸片表面不是平面的一部分.



师问

王老先生过生日的那一天,他的大公子携太太和小公子、二公子携太太和小公主都来为他祝寿.王老先生的夫人拿出生日蛋糕问孙子和孙女,咱们家三代共8口人,蛋糕只允许切三刀,每人一块,你俩说应该如何切啊?结果,小公子的方案可把蛋糕切成6块,小公主的方案可把蛋糕切成7块,奶奶说他们俩的方案都不对,奶奶三刀就把蛋糕切成了8块!你知道小公子、小公主的方案吗?王老先生的夫人是如何用三刀把蛋糕切成8块的?还有一个方案,你知道吗?



甲生答

小公子的方案是:先平行下两

刀,再相交下一刀,即可把蛋糕切成6块;小公主的方案我还没想出来,但王老先生的夫人是交叉下两刀,然后横向一刀,利用这三刀把蛋糕切成8块的.



乙生答

小公子的方案是:交叉切下三

刀,使这三刀切于蛋糕表面上的三线交于一点;小公主的方案是:交叉切三刀,使切于蛋糕表面上的三线两两相交且不共点.王老先生的夫人的下刀方法同甲生.



师评

两同学回答都有其正确的一面,但又有一定的片面性.其实我们把蛋糕比做空间,“三刀”比做三个平面,则问题等价于三个平面如何能把空间分成6部分、7部分、8部分.

设三个平面分别为 P 、 Q 、 R ,先考虑两个平面 P 、 Q 的位置:

(1)平面 P 和平面 Q 相交,此时 P 、 Q 两个平面分空间成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个部分.然后考虑第三个平面 R 与 P 、 Q 的位置.

①当平面 R 与平面 P 、 Q 都相交时,此时,平面 R 将平面 P 、 Q 所分的四个部分各分为两部分,因而,三平面分空间成八部分(图1-1-4(1)).

②当平面 R 与平面 P 、 Q 的交线平行时:

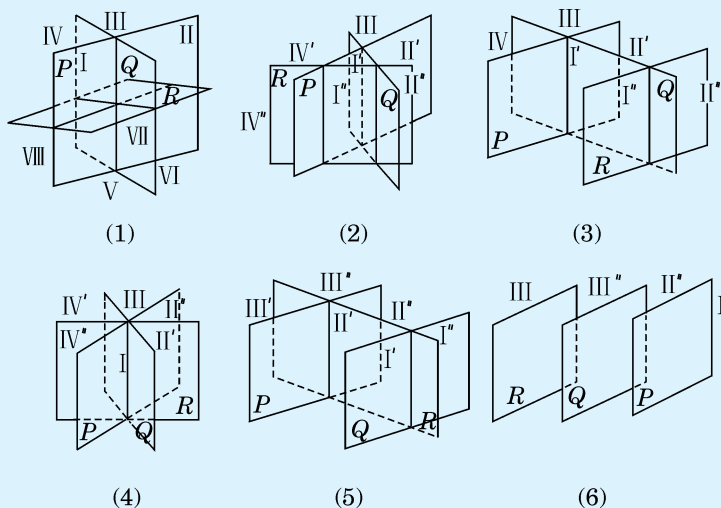


图 1-1-4

(i) R 与平面 P 、 Q 相交时,此时, R 将空间 I、II、IV 三部分各一分为二,设为 I' 、 I'' 、 II' 、 II'' 、 IV' 、 IV'' ,而不能分空间 III,因而,三平面分空间成七部分(图 1-1-4(2)).

(ii) R 与平面 P 与 Q 之一平行时,此时, R 仅将空间中某相邻两个空间各一分为二,如将空间 I、II 分成 I' 、 I'' 、 II' 、 II'' 四部分,而不能分空间 III、IV,因而三平面分空间成六部分(图 1-1-4(3)).

(iii) 若平面 R 过平面 P 、 Q 的交线时,必将两个相对的空间一分为二,例如将空间 II、IV 两部分分为 II' 、 II'' 、 IV' 、 IV'' ,而不能分空间 I、III,因而,三平面将空间分成六部分(图 1-1-4(4)).

(2) 若平面 P 和平面 Q 平行时,此时 P 、 Q 两平面分空间成三部分.

①当平面 R 与平面 P 、 Q 都相交时,平面 R 各将三个空间一分为二,因而三平面将空间分成六部分(图 1-1-4(5)).

②若平面 R 平行于 P 、 Q 之一时,此时, R 将三个空间中的一个一分为二,因而三平面将空间分成四部分(图 1-1-4(6)).

综上所述,三个平面将空间分成几部分的情况为:

- (1)三个平面相互平行时,将空间分成四个部分.
- (2)三个平面中有且只有两个平面平行时,将空间分成六个部分.
- (3)三个平面两两相交的情况:
 - ①三条交线重合时,将空间分成六个部分;
 - ②三条交线互相平行时,将空间分成七部分;
 - ③三条交线两两相交时,将空间分成八部分.

三、灵活应用

典例分析

【例 1】用集合符号表示下列图中点、直线、平面之间的关系.

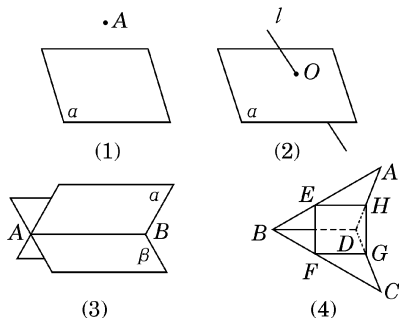


图 1-1-5

名师点评

因为线是点的集合,面是点或线的集合,因此点、线、面之间的位置关系,通常使用“ $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ ”等符号来表示,它们是借用的集合符号,读法上仍用几何语言,注意个别记法有所不同,如 $l \cap \alpha = O$,对点 O 不使用 $\{O\}$ 的记法.

【解题技巧】 点与直线、点与平面是元素与集合的关系；直线与平面、平面与平面、直线与直线是集合与集合的关系。

【答案】 (1) $A \notin \alpha$; (2) $l \cap \alpha = O$; (3) $\alpha \cap \beta = AB$;
(4) 面 $ABD \cap$ 面 $CBD = BD$, 面 $CBD \cap$ 面 $EFGH = FG$, $EF \cap$ 面 $ABD = E$, $EF \cap$ 面 $CBD = F$, $HG \cap$ 面 $ABD = H$, $HG \cap$ 面 $CBD = G$.

【例 2】 已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外, 它的三边所在的直线分别交 α 于 P, Q, R .

求证: P, Q, R 三点共线.

【解题技巧】 利用公理 2, 只需证明 P, Q, R 为平面 ABC 与平面 α 的公共点即可.

【证明】 因为 $P \in \alpha, P \in$ 平面 ABC , 所以 P 必在 α 与平面 ABC 的交线上, 同理可证 Q, R 也在 α 与平面 ABC 的交线上. 所以 P, Q, R 三点共线.

【例 3】 如图 1-1-6 所示, 已知空间四边形 $ABCD$, E, H 分别是边 AB, AD 的中点, F, G 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$. 求证: 直线 EF, GH, AC 交于一点.

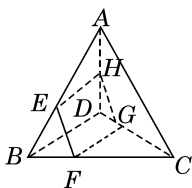


图 1-1-6

【解题技巧】 先证明两线交于一点, 再证明这点在第三条直线上. 在平面内的两条直线, 不平行, 则相交.

【证明】 因为 E, H 分别是边 AB, AD 的中点, 所以 $EH \parallel \frac{1}{2}BD$.

证明点共线时, 通常证明这些点都在两平面的交线上, 或先由某两点作一直线, 再证明其他点也在此直线上.

证明直线共点时, 常采用证两直线的交点在第三条直线上的方法, 而第三条直线又往往是两平面的交线. 证明三线共点问题实际上可转化为证明三点共线问题.



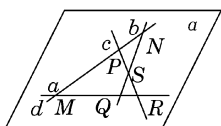
因为 F, G 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$

$= \frac{2}{3}$, 所以 $FH \parallel \frac{2}{3}BD$. 所以 $EH \parallel FG$ 且 $EH \neq FG$,

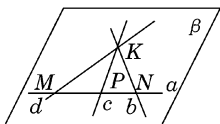
所以四边形 $EFGH$ 是梯形, 则 EF 与 GH 必相交, 设交点为 P . 因为 $EF \subset$ 平面 ABC , 所以 $P \in$ 平面 ABC , 同理 $P \in$ 平面 ADC , 又平面 $ABC \cap$ 平面 $ADC = AC$, 故 $P \in AC$, 即 EF, GH, AC 交于一点 P .

【例 4】 已知 a, b, c, d 是两两相交且不共点的四条直线. 求证: 直线 a, b, c, d 共面.

【解题技巧】 首先对四条直线的位置进行分类, 然后根据部分条件利用公理 3 的推论先确定一个平面, 再证其他直线也在该平面内.



(1)



(2)

图 1-1-7

【证明】 (1) 无三线共点情况, 如图 1-1-7(1) 所示, 设 $a \cap d = M, b \cap d = N, c \cap d = P, a \cap b = Q, a \cap c = R, b \cap c = S$.

因为 $a \cap d = M$, 所以 a, d 可确定一个平面 α .

因为 $N \in d, Q \in a$, 所以 $N \in \alpha, Q \in \alpha$, 所以 $NQ \subset \alpha$, 即 $b \subset \alpha$.

同理 $c \subset \alpha$. 所以 a, b, c, d 共面.

(2) 有三线共点的情况, 如图 1-1-7(2) 所示, 设 b, c, d 三线相交于点 K , 与 a 分别交于 N, P, M 且 $K \notin a$.

因为 $K \notin a$, 所以 K 和 a 确定一个平面, 设为 β .

证明直线共面通常有两种方法:

(1) 先由部分直线确定平面, 再证其他直线也在此平面内; (2) 先由部分直线确定平面 α , 再由其他直线确定平面 β , 然后证明两平面重合.

因为 $N \in a, a \subset \beta$, 所以 $N \in \beta$. 所以 $NK \subset \beta$ 即 $b \subset \beta$.

同理 $c \subset \beta, d \subset \beta$. 所以 a, b, c, d 共面.

由(1)、(2)知 a, b, c, d 共面.

合作解题

【例 5】 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 D_1C_1, B_1C_1 的中点, $AC \cap BD = P, A_1C_1 \cap EF = Q$.

(1) 求证: D, B, F, E 四点共面.

(2) 若 A_1C 交平面 $DBFE$ 于 R 点, 试问 P, Q, R 三点共线吗?

【解题技巧】 (1) 欲证 D, B, F, E 四点共面, 只需证 $EF \parallel DB$, 因而只需证 $EF \parallel D_1B_1$ 即可, 而易知 EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线, $D_1B_1 \parallel DB$, 所以 $EF \parallel DB$.

(2) 即判断 R 点是否在直线 PQ 上.

【证明】 (1) 如图, E, F 分别为 D_1C_1, B_1C_1 的中点, 所以 EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线, 所以 $EF \parallel B_1D_1$, 在正方体 AC_1 中, $B_1D_1 \parallel BD$. 所以 $EF \parallel BD$.

所以 EF, BD 确定一个平面, 即 D, B, F, E 四点共面.

(2) ?

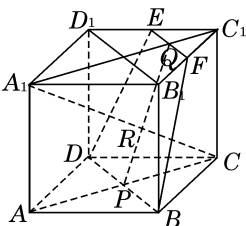


图 1-1-8

通过【例 5】 的解题分析掌握证明多点共面、多点共线问题的证明方法, 提高探索问题的能力. 一般利用公理 3 及其推论证明共面问题, 利用公理 2 证明共线问题.

想一想

(2) 小题的结论是怎样的? 为什么?



四、思维训练

1. 下列说法中,正确的是()

- A. 平行四边形是一个平面
- B. 直线 AB 不能全在平面内
- C. 平面 α 和平面 β 只有一个公共点
- D. 圆可以确定一个平面

2. 一条直线和在这条直线外不同的三点可以确定平面的个数可能是()

- A. 0 或 1
- B. 0 或 1 或 4
- C. 1 或 3 或 4
- D. 3 或 4

3. 空间三个平面如果每两个都相交,那么它们的交线的条数是()

- A. 一条
- B. 两条
- C. 三条
- D. 一条或三条

4. 下面是一些命题的叙述语(A, B 表示点, a 表示直线, α, β 表示平面)

- ① 因为 $A \subset \alpha, B \subset \alpha$, 所以 $AB \subset \alpha$;
- ② 因为 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 所以 $AB \in \alpha$;
- ③ 因为 $A \in \alpha, A \in \beta$, 所以 $\alpha \cap \beta = A$;
- ④ 因为 $a \in \alpha, a \in \beta$, 所以 $\alpha \cap \beta = a$;
- ⑤ 因为 $A \notin \alpha, a \subset \alpha$, 所以 $A \notin a$;
- ⑥ 因为 $A \notin \alpha, a \subset \alpha$, 所以 $A \notin a$.

其中命题和叙述说法都正确的个数是()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 用一个平面截一个正方体得到的多边形,其中边数最多的是()



思维点拨

根据三点的不同位置分类讨论.

三个平面可能共线,可能不共线.

注意直线和平面均视为点的集合.

正方体一共有六个面.



A. 四边形 B. 五边形

C. 六边形 D. 七边形

6. 已知 $\triangle ABC$ 的平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 是边长为 a 的正三角形, 那么原三角形 ABC 的面积为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ D. $\sqrt{6}a^2$

7. 平面内一条直线把平面分成 _____ 个部分; 两条直线最多把平面分成 _____ 个部分; 三条直线最多把平面分成 _____ 个部分; n 条直线最多把平面分成 _____ 个部分.

8. 已知 A, B, C, D 四点不共面, 则与这四个点距离相等的平面有 _____ 个.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 E, F, G, H, M, N 分别是 $AB, BC, CC_1, AA_1, C_1D_1, D_1A_1$ 的中点. 求证: E, F, G, H, M, N 六点共面.

10. 如图 1-1-9, 设 $\square ABCD$ 的各边和对角线所在的直线与平面 α 依次相交于 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$.

求证: $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 六点在一直线上.

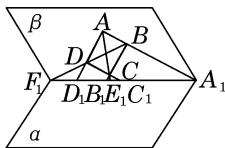


图 1-1-9

11. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

直观图面积是
原图形面积的 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
倍.

利用不完全归
纳法.

抓住点、面的
相对位置关系, 合
理分类.

可先确定平
面, 然后证明平面
重合.

即证 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 六点
既在平面 α 上, 又
在 β 上.





M 、 N 分别是 AA_1 、 D_1C_1 的中点, 过 D 、 M 、 N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l .

- (1) 画出 l 的位置;
- (2) 设 $l \cap A_1B_1 = P$, 求线段 PB_1 的长.

充分利用公理 2, 并注意形数结合.

答案与解析

【合作解题】

(2) P 、 Q 、 R 三点共线. 在正方体 AC_1 中, 记平面 A_1ACC_1 为 α , 平面 $BDEF$ 为 β .

因为 $A_1C_1 \cap EF = Q$, 所以 $Q \in A_1C_1$, $Q \in \alpha$; $Q \in EF$, $Q \in \beta$. 所以 Q 是 α 与 β 的公共点. 同理, P 点也是 α 与 β 的公共点. 所以 $\alpha \cap \beta = PQ$, 又 $A_1C_1 \cap \beta = R$, $R \in A_1C$, $R \in \alpha$, $R \in \beta$. 所以 $R \in PQ$. P 、 Q 、 R 三点共线.

【思维训练】

1. D 2. C 3. D 4. A (只有⑥正确)
5. C (因为正方体一共有六个面, 故用一个平面去截, 最多是六边形)
6. C $\left(S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 \right)$ 7. 2, 4, 7, $\frac{n^2+n+2}{2}$.
8. 7 (由于四点不共面, 故四点不可能都在平面的同侧, 当平面的一侧有一点而另一侧有三点时, 满足条件的平面有 4 个; 当平面的两侧各有两个点时, 满足条件的平面有 3 个. 综上, 与四点距离都相等的平面共有 7 个.)
9. 如图 1-1-10, 连结 A_1C_1 、 HG , 因为 M 、 N 为 D_1A_1 、 D_1C_1 的中点, 所以 $MN \parallel A_1C_1$, 又正方体 AC_1 中, $A_1C_1 \parallel HG$, 所以 $MN \parallel HG$. 所以 MN 和 HG 确定一个平面 α . 所以四点 M 、 N 、 G 、 H 共面于 α , 同理, $MG \parallel NF$. 所以 MG 和 NF 确定一个平面 β . 所以 M 、 G 、 N 、 F 共面于 β , 又 M 、 N 、 G 三点不共线, 平面 α 、平面 β 都过 M 、 N 、 G 三点, 由公理 3 知, 平面 α 与平面 β 重合, 所以 M 、 N 、 G 、 H 共面于 α , 同理可证 $E \in \alpha$. 所以 E 、 F 、 G 、 H 、 M 、 N 六点共面.
10. 设 $\square ABCD$ 所在平面为 β , 因为 $A \in \beta$, $B \in \beta$, 所以 $AB \subset \beta$. 又 $A_1 \in AB$, 所以 $A_1 \in \beta$, 又 $A_1 \in \alpha$, 所以 A_1 点在平面 α 与平面 β 的交线上. 设交线为 l , 则 $A_1 \in l$, 同理可证: B_1 、 C_1 、 D_1 、 E_1 、 F_1 都在直线 l 上. 所以 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 、 E_1 、

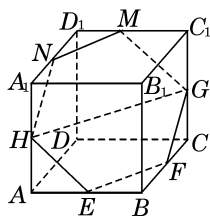


图 1-1-10

