黄冈兵法·同步学案

高中数学必修 1（人教 A 版）

主　编　戴从情

编　者　乐瑞芳　荷明新　鲁晓波　阳爱国

戴　威　曾明华　阳兆春　胡联敏

李景清　张焕兵　徐生锋　关喜芬

方文权　刘为刚　万长红　程治友

程　艳　赵正大　刘　星

陕西师范大学出版社

MU LU 目　录

第一章　集合与函数概念

1.1　集　合

1.1.1　集合的含义与表示

问题·思考·研讨

问题 1　“所有较大的数”能组成一个集合吗？

思考·研讨：________________

问题 2　方程 $x^2+2x+1=0$ 有两个相等的实数根，它的解的集合有两个元素吗？

思考·研讨：________________

问题 3　3 个集合 $\{y \mid y=x^2\}$，$\{x \mid y=x^2\}$，$\{(x,y) \mid y=x^2\}$ 是同一个集合吗？你能分清它们吗？

思考·研讨：________________

知识·运用·归纳

知识点 1　集合的概念

一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合（或集）．构成集合的每个对象叫做这个集合的元素．构成集合的对象必须是“确定”的，“不同”的．其中“确定”是指构成集合的对象具有非常明确的特征，这个特征不是模棱两可的；“不同”是指构成集合的各个对象互不相同．以上两条是判定某些对象能否构成集合的标准．一般地，判定一组对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 能否构成集合，就是要看判定对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是否具有一个确定的特征，如果有，能构成集合 如果

没有,就构不成集合. 这个确定的特征非常明确.

【例 1】　下列各组对象不能构成集合的是(　　)

A. 2004 年中国奥运代表团中 35 岁的运动员

B. 2004 年中国奥运代表团中 35 岁的女运动员

C. 2004 年中国奥运代表团中年轻的女运动员

D. 2004 年中国奥运代表团中的跳水运动员

【解析】　2004 年中国奥运代表团中的每位运动员是确定的,可以明确地判定一个运动员是否为 35 岁,是否为跳水运动员,是男运动员还是女运动员;但是“年轻”没有明确的标准,某一位女运动员是否“年轻”无法确定. 由集合元素的确定性,C 不能构成集合.

【答案】　C

思维延伸　看一组对象是否组成一个集合,你主要抓住什么判断?

【例 2】　下列各组对象能否形成一个集合?

(1) 1,2,3,4,5,6,7,8,9;

(2) 方程 $x^2=1$ 的解;

(3) 平行四边形的全体;

(4) 小于 18 的既是奇数又是质数的数.

【解析】　可以看出,(1),(2),(4) 都是确定的数组成的;(3) 是由一些确定的图形组成的.

【答案】　(1),(2),(3),(4) 都是集合.

思维延伸　判断一个集合,主要弄清什么?

知识点 2　元素与集合的关系

元素与集合有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种关系,如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$,读作 a 属于集合 A;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于集合 A.

【例 3】　已知数集 M 满足条件:若 $a\in M$,则 $\frac{1+a}{1-a}\in M$ $(a\neq\pm1, a\neq0)$,已知 $3\in M$,试问 $-2,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ 属于 M 吗?

【解析】　根据已知条件,若 $a\in M$,则 $\frac{1+a}{1-a}\in M$. 当 $3\in M$,可推出 $\frac{1+3}{1-3}=-2\in M$. 依此类推可判断 $-2,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ 是否属于 M.

【答案】 $-2\in M$，$-\frac{1}{3}\in M$，$\frac{1}{2}\in M$.

> 思维延伸　属于符号“$\in$”是用来表示元素和集合之间的关系，对于一个元素和一个集合而言，元素与集合有几种关系？

知识点3　集合中元素的特性

(1) 确定性：作为一个集合的元素，必须是确定的. 这就是说不能确定的对象就不能构成集合. 也就是说，给定一个集合 A，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立.

(2) 互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是不同的（或说是互异的）. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素. 如方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集记为 $\{1\}$，而不能记为 $\{1,1\}$.

(3) 无序性：集合与其中元素的排列次序无关，如集合 $\{-1,0,1\}$ 与 $\{1,0,-1\}$ 是同一集合.

【例4】　由实数 $x,-x,\sqrt{x^2},|x|,-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中，最多含有元素的个数为（　　）

A. 2个　　　B. 3个　　　C. 4个　　　D. 5个

【解析】　因为 $\sqrt{x^2}=|x|$，$-\sqrt[3]{x^3}=-x$，所以当 $x=0$ 时，这几个数均为0；当 $x>0$ 时，它们分别为 $x,-x,x,x,-x$；当 $x<0$ 时，它们是 $x,-x,-x,-x,-x$. 故集合中元素的个数最多为2个.

【答案】　A

> 思维延伸　对于含字母的元素的处理应讨论确定集合的元素，而不要被假象蒙蔽，误填答案. 特别在元素的互异性与确定性的运用时应注意对字母进行讨论.

【例5】　集合 A 中有 $3,x,x^2-2x$ 三个元素，则 x 应满足什么条件？

【解析】　根据集合中元素的互异性，x 应满足 $\begin{cases}x\neq3,\\ x^2-2x\neq3,\\ x\neq x^2-2x.\end{cases}$

【答案】　$x\neq3$，且 $x\neq0$，且 $x\neq-1$.

解题规律

在集合问题中,一定要会判断元素是否属于集合;要会根据"三性"处理问题,特别是互异性,最易被忽视,应在学习中引起足够重视.

【例6】 有下列四个命题:(1)平方等于-1的实数不能组成一个集合;(2)正方形组成的集合只有一个元素;(3)$x^2+2x+1=0$的解集是空集;(4)若$a\in A$,则A有可能为空集.其中正确的命题个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】 (1)能组成一个空集;(2)有很多元素(大小不同的正方形);(3)方程$x^2+2x+1=0$有解$x=-1$;(4)中因为$a\in A$,说明A中含有元素a,无论a为何值,都是一个确定的数,所以A不可能为空集.

【答案】 A

思维误区　(1)中平方为-1的实数不存在,则为空集,不要将集合中元素不存在(无元素)与元素不确定相混淆.

知识点4　特定集合的表示

为了书写的方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示,下面是几种常见的数集表示方法.我们约定,用某些大写英语字母表示.

(1) 全体非负整数构成的集合,叫做自然数,记作N;

(2) 在自然数集内排除0的集合叫做正整数集,记作N^*或N_+;

(3) 全体整数构成的集合,叫做整数集,记作Z;

(4) 全体有理数构成的集合,叫做有理数集,记作Q;

(5) 全体实数构成的集合,叫做实数集,记作R.

【例7】 用符号$\in$或$\notin$填空:

(1) 1 ______N,0 ______N,-3 ______Q,$\frac{1}{2}$______Z,$\sqrt{2}$______Q,

$-\sqrt{2}$______R.

(2) -3 ______N,π ______Q,$\frac{1}{3}$______Z,0 ______N_+,$\sqrt{3}$______Q,

3.14 ______R.

【解析】 要牢记N,N_+,Z,Q,R表示的数的指定范围.

【答案】 (1) $1\in N,0\in N,-3\in Q,\frac{1}{2}\notin Z,\sqrt{2}\notin Q,-\sqrt{2}\in R$.

(2) $-3\notin N,\pi\notin Q,\frac{1}{3}\notin Z,0\notin N_+,\sqrt{3}\notin Q,3.14\in R$.

> **思维延伸** 对于一个具体的实数来说,我们只能对确定的集合判断其是否为集合中的元素,尽管有些数同时属于不同的集合 A,B,比如 $1\in N,1\in N_+,1\in Q,1\in Z,1\in R$. 但 N,N_+,Z,Q,R 都是确定的集合. 元素 1 可以同时属于不同的集合.

知识点 5 列举法

用列举法表示集合,就是把集合的元素一一列举出来,并写在大括号{ }内. 用列举法表示集合时,必须注意如下几点:(1) 元素与元素之间必须用“,”隔开;(2) 集合的元素可以表示任何对象,数,形,物均可;(3) 集合的元素不能重复;(4) 不必考虑元素的顺序;(5) 集合的元素必须是明确的;(6) 对含有较多元素的集合,如果元素又呈现一定的规律,在不至于发生误解的情况下,也可列出几个元素作为代表,其他元素用省略号表示. 如有限集,不大于 100 的自然数的全体构成的集合,可表示为 $\{0,1,2,3,\cdots,100\}$,无限集 $N^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

【例 8】 用列举法表示下列集合:(1) 方程 $x=|x|$ 且 $x\in Z,x<5$ 的解集;(2) 自然数中不大于 30 的质数集;(3) 式子 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ $(a\cdot b\neq 0)$ 的所有值组成的集合.

【解析】 (1) 根据 x 的范围解方程;(2) 在自然数中,除 1 外只能被其自身整除的数叫质数;(3) 根据绝对值的意义化简式子.

【答案】 (1) $\{0,1,2,3,4\}$ (2) $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$ (3) $\{0,2,-2\}$.

> **思维延伸** 当集合元素不太多时,根据元素特征可一一列举元素,但集合元素较多,元素特征不太明确,无法列举所有元素时,我们可用特征性质描述法.

知识点 6 特征性质描述法

描述法就是把集合的元素所具有的属性叙述出来,并写在大括号内. 如

果在集合 I 中,属于集合 A 的任一元素 x 都具有性质 P(x),而不属于集合 A 的元素都不具有性质 P(x),则性质 P(x) 叫做集合 A 的一个特征性质. 于是,集合 A 可以用它的特征性质 P(x) 描述为 $\{x\in I\mid P(x)\}$,它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 P(x) 的所有元素构成的. 其中 x 是集合 A 的代表元素,I 是 x 的范围,P(x) 是 x 满足的特征性质.

特征性质描述法的语言形式有三种 文字语言,符号语言,图形语言. 如,表示由直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合,可用下列三种方法 方法 1 文字语言形式 直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合 方法 2 符号语言形式:$\{(x,y)\mid y=x\}$ 方法 3 图形语言形式 在平面直角坐标系内画出直线 $y=x$ (图略).

使用特征描述法时,应注意以下几点:(1) 写清楚该集合中元素的代号(即代表元素是什么),是数还是有序实数对(点)、或是集合、或是其他形式;(2) 说明该集合中元素的性质;(3) 不能出现未被说明的字母;(4) 多层描述时,应当准确使用"且"、"或";(5) 所有描述的内容都要写在集合符号内;(6) 用于描述的语句力求简明、准确.

【例 9】　用描述法表示下列集合:(1) 所有能被 3 整除的数;(2) 使 $y=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 有意义的实数 x 的集合;(3) 如图 1-1-1 中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合.

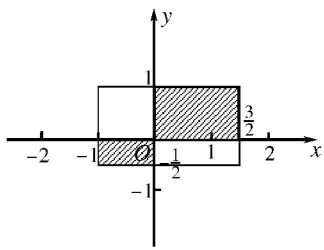

图 1-1-1

【解答】　(1) $\{x\mid x=3n,n\in Z\}$

(2) $\{x\mid x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0,x\in R\}$

(3) $\left\{(x,y)\ \middle|\ -1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\text{且 } xy\geqslant 0\right\}$

思维延伸　符号语言、文字语言、图形语言之间的转化是特征性质描述法的难点,只有在平时学习集合中重视各种数学语言形式间的互译,分析元素的性质,才会很好掌握这一点.

【例 10】　下列说法错误的是(　　)

A. 使 $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合为 $\{x\mid x\neq 2$ 且 $x\neq -3,x\in R\}$

B. 坐标平面内不在一、三象限的点的集合为 $\{(x,y)\mid xy\leqslant 0\}$

C. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上所有点的集合为 $\{y|y=ax^2+bx+c, x\in R$ 且 $a\neq 0\}$

D. 所有被 3 整除余 1 的整数集为 $\{x|x=3n+1, n\in Z\}$

【解析】 A、B、D 正确. C 中代表元素应为点 (x,y)，是点集，不是数集，表示错误.

【答案】 C

> 思维延伸 以上是文字语言与符号语言之间的转化，也可进行文字语言与图形语言的转化、符号语言与图形语言的转化，更多的是将文字、图形语言转化为符号语言.

【例 11】 给出下列说法：(1) 方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 的解集为 $\{-2,2\}$；(2) 集合 $\{y|y=x^2-1, x\in R\}$ 与 $\{y|y=x-1, x\in R\}$ 的公共元素组成的集合为 $\{0,-1\}$；(3) 集合 $\{x|x-1<0\}$ 与集合 $\{x|x>a, a\in R\}$ 没有公共元素，其中真命题的个数有（ ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】 在 (1) 中，方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 等价于 $\begin{cases}x-2=0,\\|y+2|=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$ 解为有序实数对 $(2,-2)$，解集应为 $\{(2,-2)\}$. 在 (2) 中，由于 $\{y|y=x^2-1, x\in R\}$ 代表元素是 y，当 $x\in R$ 时，$y=x^2-1\geqslant -1$，所以集合 $\{y|y=x^2-1, x\in R\}$ 是由大于或等于 -1 的实数所组成的集合，同理 $\{y|y=x-1, x\in R\}$ 的解集是 R. 在 (3) 中，集合 $\{x|x-1<0\}$ 即为不等式 $x<1$ 的解集，而 $\{x|x>a, a\in R\}$ 即为不等式 $x>a$ 的解集. 对于不同的 a 值，两集合元素可能有公共的，也可能没有，如 $a=3$，没有公共元素，$a=0$，有公共元素.

【答案】 A

> 思维延伸 对于初学集合的同学来说，很容易被符号语言的表象所蒙蔽，没有看清集合中的代表元素是数还是点（有序实数对），还是其他形式"形"、"物"、"式"等. 因此像这类元素一时看不清楚的问题，可转化为文字语言来描述，进而弄清集合到底由哪些元素所组成，如上例中的 (2)、(3).

【例 12】 设集合 $A=\{a|a=n^2+1, n\in N\}$，集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,$

$k \in N\}$，若 $a \in A$. 试判断 a 与集合 B 的关系.

【解析】　判断 a 与集合 B 的关系，即判断"属于"或"不属于"关系，$a \in A$，则 a 可写成"$n^2+1, n \in N$"的形式.判断 a 是否属于集合 B，则看 a 是否可表示成"$k^2-4k+5, k \in N$"的形式，至于集合 A 与 B 中的元素是 a 还是 b，只是字母不同，要看"特征"是否相同，是否等价.事实上 $a=n^2+1$，$b=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$，实质是相同的.

【答案】　$a \in B$

思维延伸　要判断一个对象是不是某个集合中的元素，就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性. 在判断过程中，关键是代数变形，即由"n^2+1"向"k^2-4k+5"的形式变化.也可使问题具体化. 用列举法表示 $A=\{1,2,5,10,17,\cdots\}$，$B=\{1,2,5,10,17,\cdots\}$，答案一目了然.

【例 13】　集合 $A=\{x \mid x=4k \pm 1, k \in Z\}$ 与集合 $B=\{y \mid y=2n-1, n \in Z\}$ 是否为同一集合？

【解析】　用列举法来表示 $A=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$，$B=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$.

【答案】　A 与 B 是同一集合.

思维延伸　将集合中的元素具体化、图示化是解决集合问题的重要手段之一.

【例 14】　已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0, a \in R, x \in R\}$，(1) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素；(2) 若 A 中至少有一个元素，求 a 的取值范围.

【解析】　(1) 集合 A 中只有一个元素，等价于方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根或两个相等的根，当 $a=0$ 时，方程变为 $2x+1=0$，只有一个根 $-\frac{1}{2}$；当 $a \neq 0$ 时，只有 $\Delta=4-4a=0$，方程有两个相同的根 -1.

(2) 集合中至少有一个元素，等价于方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个根，所以这个方程除包含题 (1) 中求得的 a 值外，还包括 $a \neq 0$，且 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相同的根时 a 的值.

【答案】　(1) $a=0, x=-\frac{1}{2}$；$a=1, x=-1$；(2) $a \leq 1$.

思维误区 方程 $ax^2+2x+1=0$，$a\in R$，$x\in R$，只是形式上的一元二次方程，当 $a=0$ 时，为一元一次方程，这点容易遗漏.

【例15】 已知集合 $A=\left\{x\in N\,\middle|\,\frac{9}{10-x}\in N\right\}$，$B=\left\{\frac{9}{10-x}\in N\,\middle|\,x\in N\right\}$，试问集合 A 与 B 共有几个相同的元素，并写出由这些"相同元素"组成的集合.

【解析】 集合 A，B 均是由符号语言描述的，形式很像，关键是看代表元素是什么，A 中是以 x 为元素，x 满足的条件是 $x\in N$，且 $\frac{9}{10-x}\in N$；B 中是以 $\frac{9}{10-x}$ 为元素，$\frac{9}{10-x}$ 满足的条件是 $\frac{9}{10-x}\in N$ 且 $x\in N$，抓住这一点就可以将 A、B 用列举法表示出来，然后再找出 A 和 B 的相同元素组成一个集合.

【答案】 $A=\{1,7,9\}$，$B=\{9,3,1\}$，所以 A，B 中的"相同元素"组成的集合为 $\{1,9\}$.

解题技巧

当集合语言很抽象时，审题很重要，只有正确地理解题意，弄清集合中的"代表"元素特征，将问题具体化、形象化，并在符号语言、文字语言、图形语言之间进行转换，才能正确解题.

知识点7 维恩(Venn)图

为了形象地表示集合，我们常用平面内一个封闭曲线的内部表示一个集合，这个区域通常叫做维恩(Venn)图. 例如：表示集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 可用图1-1-2表示：

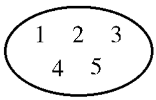

图1-1-2

【例16】 用图示法表示下列集合以及它们之间的关系.

$A=$ {四边形}；$B=$ {平行四边形}；$C=$ {梯形}；$D=$ {菱形}；$E=$ {正方形}；$F=$ {矩形}.

【解析】 用维恩图表示.

【答案】

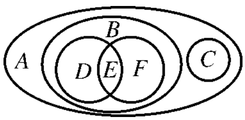

图1-1-3

思维延伸　用图示法表示集合的优点在于形象直观，它特别适用于解决较抽象的集合问题（如集合的运算），缺点在于集合的元素具有的属性不明显，不可列举元素．通常它只是作为一种解题的辅助工具，一般集合最终结果的表示不用图示法．

【例 17】　下面几种表示法：(1) $\{x=-1,y=2\}$；(2) $\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}x=-1,\\y=2\end{array}\right.\right\}$；(3) $\{-1,2\}$；(4) $\{(-1,2)\}$；(5) $(-1,2)$；(6) $\{x,y\mid x=-1$ 或 $y=2\}$．能正确表示方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集的是（　　）

A. (1)(2)(3)(4)(5)(6)　　B. (2)(3)(4)(5)

C. (2)(4)　　D. (2)(4)(6)

【解析】　由于方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ 因而写成集合时，元素应为一对有序实数对 $(-1,2)$；而 (1) 中元素为两个等式；(3) 中元素为两个实数；(5) 可看成一个区间，也可看成一对有序实数对，不明确；(6) 中代表元素为 x,y，不是有序实数对 (x,y)．

【答案】　C

解题方法

对于几类方程的解集的代表元素应弄清楚：一元二次方程 $Ax^2+Bx+C=0\ (A\neq 0)$ 的解集中代表元素为实数 x；二元方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集中代表元素为有序实数对 (x,y)；二元方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=0$ 的解集中代表元素也是有序实数对 (x,y)．

感受·体验·探究

■**问题探究**

【例 18】　下面有四个命题：(1) 集合 N 中的最小元素为 1；(2) 方程 $(x-1)^3(x+2)(x-5)=0$ 的解集中含有 3 个元素；(3) 方程组

$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是$\{(x,y)\mid x=1$ 或 $y=2\}$；(4) 满足 $2-x>-x$ 的实数的全体能形成一个集合. 其中正确命题的个数是（　　）

A. 0 个　　　B. 1 个　　　C. 2 个　　　D. 3 个

【解析】　(1) N 表示自然数集，最小的自然数是 0；(2) 根据集合中元素的互异性，重根只能算一个根，所有方程的解集为 $\{1,-2,5\}$；(3) 方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}\right\}=\{(1,2)\}$，而集合$\{(x,y)\mid x=1$ 或 $y=2\}$ 为有序实数对 $(1,y)$ 和 $(x,2)$，有无数组；(4) $2-x>-x$ 表示 x 可以为任意实数. 所以 (1)，(3) 是错误的，(2)，(4) 正确.

【答案】　D

> **思维点拨**　本题考查对集合概念的理解及准确地表示一个集合的知识点.

【例 19】　已知 $A=\{x\mid x=5n+1,n\in N\}$，$B=\{x\mid x=5n+2,n\in N\}$，$C=\{x\mid x=5n+3,n\in N\}$，$D=\{x\mid x=5n+4,n\in N\}$. 若 $\alpha\in A,\beta\in B,\theta\in C,\gamma\in D$，则有（　　）

A. $\alpha^2\in A,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$

B. $\alpha^2\in A,\beta^2\in B,\theta^2\in C,\gamma^2\in D$

C. $\alpha^2\in A,\beta^2\in C,\theta^2\in B,\gamma^2\in A$

D. $\alpha^2\in B,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in B$

【解析】　**方法一**　设 $\alpha=5n+1$，则 $\alpha^2=5(5n^2+2n)+1$，，$\alpha^2\in A$，同理可得 $\beta^2=[5(5n^2+4n)+4]\in D$，$\gamma^2=[5(5n^2+8n+3)+1]\in A$，$\theta^2=(5n+3)^2=[5(5n^2+6n+1)+1]\in D$.

方法二　特值法，令 $n=0$，取 $\alpha=1,\Rightarrow\alpha^2=1$；$\beta=2,\Rightarrow\beta^2=4$；$\theta=3,\Rightarrow\theta^2=9$；$\gamma=4,\Rightarrow\gamma^2=16$. 然后筛选结果.

【答案】　A

> **思维点拨**　对于选择题可采用多种方法处理，尤其是含字母与抽象问题可采用特值法、排除法等方法处理.

■**拓广探究**

【例 20】　已知 $f(x)=x^2-ax+b\ (a,b\in R)$，$A=\{x\mid f(x)-x=0,x\in$

R\}，$B=\{x|f(x)-ax=0, x\in R\}$，若 $A=\{1,-3\}$，试用列举法表示集合 B.

【解答】 由 $f(x)-x=0$ 得 $x^2-ax+b-x=0$，整理有 $x^2-(a+1)x+b=0$，, $A=\{1,-3\}$，, 1，-3 是方程 $x^2-(a+1)x+b=0$ 的两根．由根与系数的关系得 $\begin{cases} a+1=1-3, \\ b=1\times(-3), \end{cases}$，, $a=-3, b=-3$，, $f(x)=x^2+3x-3$. 由 B 可得 $f(x)-ax=0$，即 $x^2+3x-3-(-3)x=0$，, $x^2+6x-3=0$，解方程得 $x=-3\pm2\sqrt{3}$.

, $B=\{x|x^2+6x-3=0\}=\{-3-2\sqrt{3},-3+2\sqrt{3}\}$.

思维点拨　A，B 均为方程的解集，, 需通过 $A=\{1,-3\}$ 求出 a，b 的值，然后求解方程 $f(x)-ax=0$ 可确定 B.

【例 21】 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：①S 内不含 1；②若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 解答下列问题：(1) 若 $2\in S$，则 S 中必有其他两个数，求出这两个数；(2) 求证 若 $a\in S$，则 $\left(1-\frac{1}{a}\right)\in S$；(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个？请说明理由；(4) 求证 集合 S 中至少有三个不同元素.

【解答】 (1) 由 $a\in S$，$a\neq1$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$，当 $2\in S$，则 $\frac{1}{1-2}=-1\in S$，于是 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$，故集合 S 中还有 -1，$\frac{1}{2}$ 两个元素；

(2) 由 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$ 可推出 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\in S$；

(3) 假设 S 中元素的个数只有一个，则 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，此方程无实数解，, $a\neq\frac{1}{1-a}$，故在集合 S 中元素的个数不能只有一个；

(4) 由已知条件②和 (2) 的证明 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$，$\left(1-\frac{1}{a}\right)\in S$. 现只需证明 a，$\frac{1}{1-a}$，$1-\frac{1}{a}$ 互不相等. 由 (3) 知 $a\neq\frac{1}{1-a}$. 若 $a=1-\frac{1}{a}$，则 $a^2-a+1=0$，方程无解，, $a\neq1-\frac{1}{a}$. 若 $\frac{1}{1-a}=1-\frac{1}{a}$，则 $a^2-a+1=0$，方程无解，

新课标同步学案

，$1-\frac{1}{a}\neq\frac{1}{1-a}$，故集合 S 中至少有三个元素.

思维点拨 解此题的关键在于会应用集合中元素的互异性，由已知 $a\in S\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in S\Rightarrow\left(1-\frac{1}{a}\right)\in S\Rightarrow a\in S$，这样循环反复，由此说明 $a,\frac{1}{1-a}$，$1-\frac{1}{a}$ 互不相等就可以.

双基·巩固·测评

■**基础练习**

1. 下列各组对象 (1) 接近于 0 的数的全体；(2) 比较小的正整数全体；(3) 直角坐标平面内到原点 O 的距离等于 $\sqrt{2}$ 的点的全体；(4) 正三角形的全体；(5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体，其中能构成集合的有（　　）

A. 2 组　　B. 3 组　　C. 4 组　　D. 5 组

2. 已知集合 A 中的三个元素是 △ABC 的三边长 a，b，c，则 △ABC 一定不是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3. 集合 A 是一条边长为 1，一个角为 40° 的等腰三角形，则 A 中的元素有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

4. 集合 $\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$ 用描述法可表示为（　　）

A. $\{x|x=2n\pm1,n\in Z\}$

B. $\{x|x=(-1)^{n}(2n-1),n\in N\}$

C. $\{x|x=(-1)^{n}(2n+1),n\in N\}$

D. $\{x|x=(-1)^{n-1}(2n-1),n\in N\}$

5. 集合 (1) $\{x|x+2>0\}$，(2) $\{(x,y)|y=x+2\}$，(3) $\{x|x=a+2,a\in R\}$，(4) $\{x+2>0\}$ 中数集的个数是（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

6. 下列方程的实数解的集合为 $\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$ 的个数为（　　）

(1) $4x^2+9y^2-4x+12y+5=0$　(2) $6x^2+x-2=0$

(3) $(2x-1)^2(3x+2)=0$　　(4) $6x^2-x-2=0$

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

7. (2002年高考题)已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,若 $a\in M$ 且 $a\in N$,那么 a 为(　　)

A. $\{3,-1\}$　B. $(3,-1)$

C. $\{(3,-1)\}$　D. $\{x=3,y=-1\}$

8. 已知 $M=\{m\mid m=2k,k\in Z\}$,$N=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$,$P=\{y\mid y=4k+1,k\in Z\}$,则(　　)

A. $(x+y)\in M$　B. $(x+y)\in N$

C. $(x+y)\in P$　D. $(x+y)\notin M$

9. 下列四个集合中,不同于另外三个的是(　　)

A. $\{y\mid y=2\}$　B. $\{x=2\}$

C. $\{2\}$　D. $\{x\mid x^2-4x+4=0\}$

10. 若集合 $A=\{1,2,3,4\}$,集合 $B=\{y\mid y=x-1,x\in A\}$,将集合B用列举法表示为________.

11. 对于集合 $A=\{2,4,6\}$,若 $a\in A$,则 $6-a\in A$,那么 a 的值是______.

12. 设数集A中含有两个元素 $2a$ 和 a^2+a,则 a 满足的条件是______.

■综合运用

13. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{12}{x+3},x\in Z,y\in Z\right\}$ 的元素个数为(　　)

A. 4　B. 5　C. 10　D. 12

14. 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$,$b=2$,$c=2\sqrt{2}$,$d=\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)$,集合 $M=\{x\mid x=m+n\sqrt{2},m,n\in Q\}$,其中 a,b,c,d 是集合M的元素的个数是(　　)

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

15. 已知集合 $A=\{x\mid ax+b=1\}$,$B=\{x\mid ax-b>4\}$,其中 $a\neq 0$,若A中元素必须为B中元素,求实数 b 的取值范围.

16. 已知集合 $A=\{$小于6的正整数$\}$,$B=\{$小于10的质数$\}$,$C=\{$24和36的正公约数$\}$,用列举法表示:(1) $\{y\mid y\in A$ 且 $y\in C\}$;(2) $\{y\mid y\in B$ 且 $y\notin C\}$.

■拓广探究

17. 设 x,y,z 是非零实数,若 $a=\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{xyz}{|xyz|}$,求 a 的值的集