



目 录



第一部分 教材基础知识快速复习	1	第二部分 专项能力提高训练	43
第一章 集合与简易逻辑	1	板块一 函数、方程、不等式	43
第二章 函 数	2	板块二 函数、数列、不等式	47
第三章 数 列	7	板块三 立体几何综合题	51
第四章 三角函数	10	板块四 解析几何综合题	58
第五章 平面向量与空间向量	14	板块五 平面向量与空间向量在中学 数学中的应用	61
第六章 不等式	18	板块六 对称与周期	66
第七章 直线与圆的方程	20	板块七 三角函数与复数	69
第八章 圆锥曲线方程	22	板块八 排列、组合、概率与统计	76
第九章 直线、平面、简单几何体	25	板块九 极限与导数	79
第十章 排列、组合和概率	34		
第十一章 概率与统计	36		
第十二章 极限与导数	38	参考答案	86
第十三章 复 数	40		



第一部分

教材基础知识快速复习



第一章 集合与简易逻辑



教材基础知识针对性训练与基本能力巩固提高



一、选择.

1. 设全集是实数集 R , 集合 $M = \{x \mid |x| \leq 2\}$, $N = \{x \mid x < 1\}$, 则 $(\complement_R M) \cap N$ 等于().
 A. $\{x \mid x < -2\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 1\}$ C. $\{x \mid x < 1\}$ D. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$
2. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\angle A > 30^\circ$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的().
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 命题 p : 若 $a, b \in R$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a + b| > 1$ 的充分而不必要条件;
 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x - 1| - 2}$ 的定义域是 $(- , -1] \cup [3, +)$. 则().
 A. “ p 或 q ”为假 B. “ p 且 q ”为真
 C. p 真 q 假 D. p 假 q 真
4. 在下列四个命题中真命题的个数是().
 ① “若 $xy = 1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题;
 ② “相似三角形的周长相等”的否命题;
 ③ “若 $b \leq -1$, 则方程 $x^2 - 2bx + b^2 + b = 0$ 有实根”的逆否命题;
 ④ “若 $A \cup B = B$, 则 $B \subseteq A$ ”的逆否命题.
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
5. 设集合 $P = \{m \mid -1 < m < 0\}$, $Q = \{m \in R \mid \text{不等式 } mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数恒成立}\}$, 则下列关系中成立的是().
 A. $P \not\subseteq Q$ B. $Q \not\subseteq P$ C. $P = Q$ D. $P \cap Q = \emptyset$
6. 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & (x \in P) \\ -x, & (x \in M) \end{cases}$, 其中 P, M 是实数集 R 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 给出四个判断, 其中正确的判断有().

- ① 若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$;
 ② 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$;
 ③ 若 $P \cup M = R$, 则 $f(P) \cup f(M) = R$;
 ④ 若 $P \cup M \neq R$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq R$.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填 空.

1. 若 p 的逆命题是 r , r 的否命题是 s , 则 s 是 p 否命题的_____.
2. 已知 $x, y \in R, P = \{x | y^2 = -x + 1\}, Q = \{y | y = x^2 - 1\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.
3. 设 A, B 是两个集合, 下列命题中真命题的序号是_____.
- ① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$; ② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
 ③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$; ④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.

探究拓展能力强化训练与应用综合能力的养成

1. (转化题) 已知 $p: |4 - x| \leq 6$; $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件, 求实数 m 的取值范围.
2. (2003 年全国高考题) 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 是 R 上的减函数; Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 R . 如果 P, Q 中有且只有一个正确, 求 c 的取值范围.
3. (探索题) 已知集合 $A = \{y | y = 2^x, x \in R\}$, 集合 $B = \{x | (m+2)x^2 + 2mx + 1 \leq 0\}$, 试讨论是否存在实数 m 使 $B \subseteq A$ 成立.

第二章 函 数

教材基础知识针对性训练与基本能力巩固提高

一、选 择.

1. 设集合 A 和 B 都是正整数集合 N^* , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 与集合 B 中的元素 $2^n + n$ 相对应, 则在映射 f 作用下, 象 20 的原象是().
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
2. 如图 I - 2 - 1, 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}, N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 给出四个图像, 其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有().

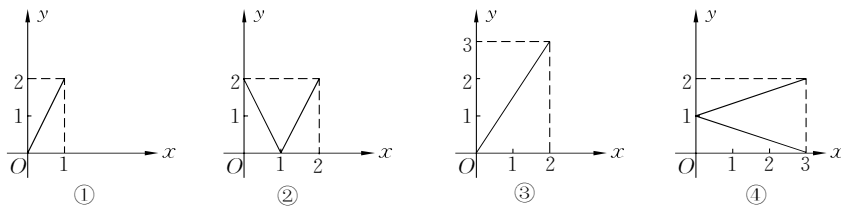


图 I - 2 - 1

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \geq 4) \\ f(x+1) & (x < 4) \end{cases}$, 则 $f(\log_2 3)$ 等于().

- A. $-\frac{23}{8}$ B. $\frac{1}{11}$ C. $\frac{1}{19}$ D. $\frac{1}{24}$

4. 已知函数 $f(x) = \log_2 [2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 \mathbb{R} , 则实数 m 的取值范围是().

- A. $1 < m < 9$ B. $m < 1$ 或 $m > 9$ C. $1 \leq m \leq 9$ D. $m \leq 1$ 或 $m \geq 9$

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在闭区间 $[0, m]$ 上有最大值 3 和最小值 2, 则 m 的取值范围是().

- A. $[1, +\infty)$ B. $[0, 2]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $[1, 2]$

6. 对于任意实数 x , 设 $f(x)$ 是 $y = 4x + 1$, $y = x + 2$ 和 $y = -2x + 4$ 三个函数中的最小值, 则 $f(x)$ 的最大值是().

- A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2)$ 等于().

- A. -26 B. -18 C. -10 D. 10

8. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 又 $f(-2) = 0$, 则不等式 $x \cdot f(x) < 0$ 的解集为().

- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

9. 在 $P(1, 1)$, $Q(1, 2)$, $M(2, 3)$ 和 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 四点中, 函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像与其反函数图像的公共点只可能是().

- A. P 点 B. Q 点 C. M 点 D. N 点

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{a} (a > 0, a \neq 1)$, 如图 I - 2 - 2 所示, 在同一坐标系中, $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = a^{|x-1|}$ 的图像只可能是().

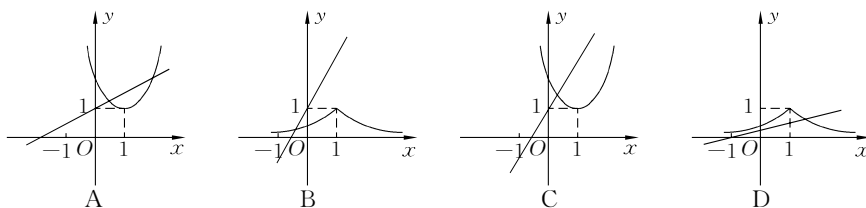


图 I - 2 - 2

11. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图像如图 I - 2 - 3 所示, 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述中正确的是().

- A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称
B. 若 $a = 1, 0 < b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
C. 若 $a = -2, b = 0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称
D. 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

12. 已知 $f(x) = -x - x^3$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 + x_2 > 0$, $x_2 + x_3 > 0$, $x_3 + x_1 > 0$, 则 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的值().

- A. 一定大于零 B. 一定小于零 C. 等于零 D. 无法确定

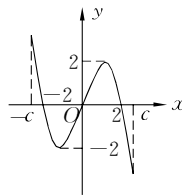


图 I - 2 - 3

13. 设函数 $y = f(x)$ 定义域为实数集, 则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$ 的图像关于().

- A. 直线 $y=0$ 对称 B. 直线 $x=0$ 对称
C. 直线 $y=1$ 对称 D. 直线 $x=1$ 对称

14. 与函数 $y = 10^{\lg(x-1)}$ 的图像相同的函数是().

- A. $y = x - 1$ B. $y = |x - 1|$ C. $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ D. $y = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2$

15. 函数 $y = x^2 + bx + c$ ($x \in [0, +\infty)$) 是单调函数的充要条件是().

- A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $b > 0$ D. $b < 0$

16. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$ 成立, 在函数值 $f(-1), f(1), f(2), f(5)$ 中, 最小的一个不可能是().

- A. $f(-1)$ B. $f(1)$ C. $f(2)$ D. $f(5)$

17. 方程 $\log_2(x+4) = 2x$ 的根的情况是().

- A. 仅有一个正根 B. 有两个正根
C. 有两个负根 D. 有一正根和一负根

18. 已知 $f(x) = |2^x - 1|$, 若 $a < b < c$, 且 $f(a) > f(c) > f(b)$, 则().

- A. $a < 0, b < 0, c > 0$ B. $a < 0, b > 0, c > 0$
C. $2^{-a} < 2^c$ D. $2^a + 2^c < 2$

19. 已知 x_1 是方程 $x + \lg x = 3$ 的解, x_2 是方程 $x + 10^x = 3$ 的解, 则 $x_1 + x_2$ 的值为().

- A. 6 B. 3 C. 2 D. 1

20. 如图 I - 2 - 4 所示, $f_i(x)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质“对 $[0, 1]$ 中的任意 x_1 和 x_2 , 使 $\lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立”的只有().

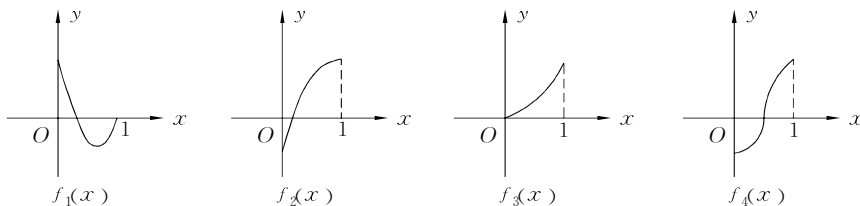


图 I - 2 - 4

- A. $f_1(x), f_3(x)$ B. $f_2(x)$
C. $f_2(x), f_3(x)$ D. $f_4(x)$

二、填 空.

1. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 12x + 52} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ 的最大值为_____.

2. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有相同的定义域, 且对定义域中任意的 x , 都有 $f(-x) + f(x) = 0$,

$g(x) \cdot g(-x) = 1$. 若方程 $g(x) = 1$ 的解集是 $\{x | x = 0\}$, 则函数 $F(x) = \frac{2f(x)}{g(x) - 1} + f(x)$ 是 _____ (填“奇函数”或“偶函数”).

3. 设 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y = 6$, 则函数 $z = 4x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 3y$ 的值域是 _____.

4. 已知函数 $f(x) = |x^2 - 2ax + b| (x \in \mathbb{R})$, 下列命题中正确命题的序号是 _____.

- ① $f(x)$ 是偶函数;
- ② 当 $f(0) = f(2)$ 时 $f(x)$ 的图像必关于直线 $x = 1$ 对称;
- ③ 若 $a^2 - b \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是增函数;
- ④ $f(x)$ 有最大值 $|a^2 - b|$.

5. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 使方程 $\log_a(x - ak) = \log_{a^2}(x^2 - a^2)$ 有解的 k 的取值范围是 _____.

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数 $f(2) = 1, f(xy) = f(x) + f(y)$, 则满足不等式 $f(a) + f(a - 2) \leq 3$ 的 a 的取值范围是 _____.

7. 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x (x \in D)$ 的充要条件是 _____.

8. 若当 $a \in [-1, 1]$ 时, 不等式 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2 + ax + 1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2x + a}$ 恒成立, 则 x 的取值范围是 _____.

9. 已知 $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{2x + 3}{x}$, 则 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) =$ _____.

10. 某工厂 8 年来某产品总产量 y 与时间 t (年) 的函数关系如图 I - 2 - 5 所示, 下列四种说法中正确的是 _____ (只填序号).

- ① 前三年总产量增长速度越来越快;
- ② 前三年总产量增长速度越来越慢;
- ③ 第三年后这种产品停止生产;
- ④ 第三年后这种产品年产量保持不变.

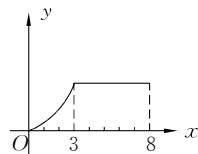


图 I - 2 - 5

探究拓展能力强化训练与应用综合能力的培养

1. (创新题) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图像如图 I - 2 - 6 所示, 则 ().

- A. $b \in (-\infty, 0)$ B. $b \in (0, 1)$ C. $b \in (1, 2)$ D. $b \in (2, +\infty)$

2. (讨论题) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线, 当 $n \leq y \leq n + 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 该图像是斜率为 b^n 的线段 (其中 b 为正常数且 $b \neq 1$), 设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n) = n (n = 1, 2, \dots)$ 定义.

- (1) 求 x_1, x_2 和 x_n 的表达式.
- (2) 求 $f(x)$ 的表达式, 并求出其定义域.
- (3) 求证 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = x$ 没有横坐标大于 1 的交点.

3. (2003 年北京春季高考题) 某租赁公司拥有 100 辆汽车, 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出; 每辆车的月租金每增加 50 元, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

- (1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?

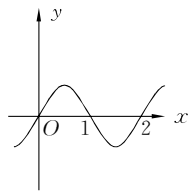


图 I - 2 - 6

- (2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?
4. (探究题) 是否存在常数 $k \in \mathbb{R}$, 使函数 $f(x) = x^4 + (2 - k)x^2 + (2 - k)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上是减函数, 且在 $[-1, 0)$ 上是增函数?
5. (新定义题) 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称点 (x_0, x_0) 为函数 $f(x)$ 的不动点.
- (1) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx - b$ ($a \neq 0$) 有不动点 $(1, 1)$ 和 $(-3, -3)$, 求 a, b 的值.
- (2) 若对于任意实数 b , 函数 $f(x) = ax^2 + bx - b$ 总有两个互异的不动点, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 若定义在实数集 \mathbb{R} 上的奇函数 $g(x)$ 存在 (有限的) n 个不动点, 求证 n 必为奇数.
6. (图表题) 王老师从甲镇去乙村, 一开始沿公路乘车, 后沿小路步行, 图 I - 2 - 7 中横轴表示时间, 纵轴表示王老师距乙村的距离, 则符合王老师走法的图像是 ().

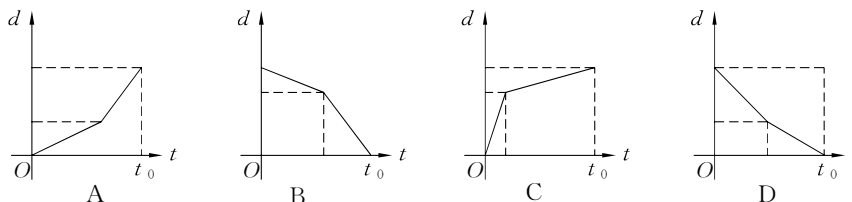


图 I - 2 - 7

7. (图表题) 依法纳税是每个公民应尽的义务. 国家征收个人工资、薪金所得税是分段计算的, 月总收入不超过 1000 元的部分免征个人工资、薪金所得税, 超过 1000 元的部分需征税. 设全月计税金额为 $x = \text{全月总收入} - 1000$ (元), 税率见下表:

级数	全月应纳税所得金额	税率
1	不超过 500 元部分	5%
2	超过 500 ~ 2000 元部分	10%
3	超过 2000 ~ 5000 元部分	15%
...
9	超过 100000 元部分	45%

- (1) 若应纳税额为 $f(x)$, 试用分段函数表示 1 ~ 3 级纳税额 $f(x)$ 的计算公式.
- (2) 小李 2005 年 3 月份工资总收入为 3200 元, 试计算小李 3 月份应缴纳个人所得税多少元.
8. (转化题) 已知函数 $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x + a)$ 的图像过原点.
- (1) 若 $f(x - 3), f(\sqrt{2} - 1), f(x - 4)$ 成等差数列, 求 x 的值.
- (2) 若 $g(x) = f(x) + 1$, 三个正数 m, n, t 成等比数列, 求证 $g(m) + g(t) \geq 2g(n)$.
9. (信息题) 已知两个函数 $f(x)$ ($x \in [a, b]$) 及 $g(x)$ ($x \in [a, b]$) 对任意 $x \in [a, b]$ 总有 $\left| \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{10}$, 我们就称 $f(x)$ 可被 $g(x)$ “替代”, 试判断 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [4, 16]$) 能否被 $g(x) = \frac{1}{5}(x + 6)$ ($x \in [4, 16]$) 替代?
10. (探究题) 对于在区间 $[m, n]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对任意的 $x \in [m, n]$ 均有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是接近的, 否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上

是非接近的. 现有两个函数 $f_1(x) = \log_a(x - 3a)$ 与 $f_2(x) = \log_a \frac{1}{x - a}$ ($a > 0, a \neq 1$), 给定区间 $[a + 2, a + 3]$.

(1) 若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a + 2, a + 3]$ 上都有意义, 求 a 的取值范围.

(2) 讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a + 2, a + 3]$ 上是否是接近的.

11. (计算题) 在测量物理量的过程中, 因仪器和观测的误差, 使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 共 n 个数据, 我们规定所测量物理量的“最佳近似值” a 是这样—个量: 与其他近似值相比, a 与各数据差的平方和最小. 依此规定, 从 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中可以推出 $a =$ _____.

12. (探究题) 某工厂生产的 A 型商品进入某劝业场(租赁市场柜台), 若劝业场对 A 型商品不征收管理费, A 型商品每件定价 80 元, 则每年可销售 8 万件; 若劝业场对 A 型商品征收管理费的比率为 $p\%$ (即每销售 100 元征收 p 元), 则 A 型商品每件价格要提高到 $\frac{80}{1 - p\%}$ 元, 且每年销售量将减少 $0.62p$ 万件. 根据上述情况:

(1) 设劝业场对 A 型商品征收管理费的比率为 $p\%$ 时, A 型商品每年销售额为 y 万元, 写出 y 与 p 的函数关系式, 并指出这个函数的定义域.

(2) 若劝业场对 A 型商品每年征收的管理费不少于 16 万元, 求 p 的取值范围.

(3) 在(2)的条件下, p 值定为多少时, 可使该厂的 A 型商品的销售额最大? 并证明你的结论.

13. (综合题) 在 xOy 平面上有一列点 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), \dots, P_n(a_n, b_n)$, 对于任意一个自然数 n , 点 $P_n(a_n, b_n)$ 在函数 $y = 2000\left(\frac{a}{10}\right)^x$ ($0 < a < 10$) 的图像上, 且点 $P_n(a_n, b_n)$ 、点 (n, ρ) 与点 $(n + 1, \rho)$ 构成一个以 $P_n(a_n, b_n)$ 为顶点的等腰三角形.

(1) 求点 $P_n(a_n, b_n)$ 的纵坐标 b_n 的表达式.

(2) 若对任意一个自然数 n , 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长都能构成一个三角形, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $B_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 当 a 取(2)中确定范围内的最小整数时, 求 B_n 取最大值的项数.

14. (2002 年全国高考题) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 + |x - a| + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

第三章 数 列

教材基础知识针对性训练与基本能力巩固提高

一、选 择.

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 则它的前 $3m$ 项和为().

A. 130

B. 170

C. 210

D. 260

2. 设 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 那么 $f(n+1) - f(n)$ 等于().

$S(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. 求 $S(k)$ 的表达式, 并写出其定义域和最小值.

5. (图表题) 甲、乙两人连续 6 年对某县农村养鸡业规模进行调查, 调查后提供了两个不同的信息统计图, 甲的调查表明: 鸡的生产数量从第一年平均每家养鸡场生产 1 万只鸡上升到第六年平均每家养鸡场生产 2 万只鸡, 如图 I - 3 - 1(1) 所示; 乙的调查表明: 养鸡场数量由第一年的 30 家减少到第六年的 10 家, 如图 I - 3 - 1(2) 所示.



图 I - 3 - 1

请你根据提供的信息回答下列问题:

- (1) 该县第六年生产鸡的数量比第一年增加了还是减少了? 说明理由.
 - (2) 设第 n 年平均每家养鸡场生产鸡的只数为 a_n , 第 n 年养鸡场家数为 b_n , 写出 a_n, b_n 的解析式(用 n 表示, $1 \leq n \leq 6, n \in \mathbb{N}^*$).
 - (3) 在这 6 年内, 哪一年该县产鸡最多? 说明理由.
6. (应用题) 现有流量均为 $300 \text{ m}^3/\text{s}$ 的两条河流 A、B 汇合于某处后, 不断混合, 它们的含沙量分别为 $2 \text{ kg}/\text{m}^3$ 和 $0.2 \text{ kg}/\text{m}^3$. 假设从汇合处开始, 沿岸设有若干观测点, 两股水流流经相邻两个观测点的过程中, 其混合效果相当于两股水流在单位时间内交换 100 m^3 的水量, 即从 A 股水流中流入 B 股水流 100 m^3 的水, 经混合后, 又从 B 股水流中流入 A 股水流 100 m^3 的水, 并混合. 求从第几个观测站开始, 两股河水的含沙量之差小于 $0.01 \text{ kg}/\text{m}^3$ (不考虑泥沙沉淀).
7. (竞赛题) 递增数列 $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ 由一些正数组成, 它们或者是 3 的幂, 或者是若干个不同的 3 的幂的和, 试求这个数列的第 100 项.

8. (学科综合题) 对于任意函数 $f(x), x \in D$, 可按如图 I - 3 - 2 所示构造一个数列发生器. 其工作原理如下:

- ① 输入数据 $x_0 \in D$, 经数列发生器输出 $x_1 = f(x_0)$.
- ② 若 $x_1 \notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1 \in D$, 则将 x_1 反馈到输入端, 再输出 $x_2 = f(x_1)$; 依此规律继续下去. 现设 $f(x) = \frac{4x - 2}{x + 1}$.

- (1) 若输入 $x_0 = \frac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$, 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项.
- (2) 若输入 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足对任意正整数 n , 均有 $x_n < x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.

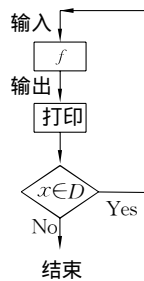


图 I - 3 - 2

第四章 三角函数



11. 函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图像的一条对称轴方程是().

- A. $x = -\frac{\pi}{2}$ B. $x = -\frac{\pi}{4}$ C. $x = \frac{\pi}{8}$ D. $x = \pi$

12. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ 等于().

- A. $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\pi}{12}$ D. $-\frac{\pi}{12}$

13. 下列四个命题中正确的是().

- A. 正切函数在整个定义域内是增函数
 B. 周期函数一定有最小正周期
 C. 函数 $y = 3\tan\sqrt{x^2}$ 的图像关于 y 轴对称
 D. 若 x 是第一象限的角, 则 $\sin x$ 是增函数, $\cos x$ 是减函数

14. 化简 $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha} - 2\cos(\alpha+\beta)$ 的结果是().

- A. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ B. $\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha}$ C. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ D. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3, 3)$ 上的奇函数, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x)$ 的图像如图 I-4-1 所示, 那么不等式 $f(x)\cos x < 0$ 的解集是().

- A. $\left(-3, -\frac{\pi}{2}\right) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
 B. $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
 C. $(-3, -1) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$
 D. $\left(-3, -\frac{\pi}{2}\right) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$

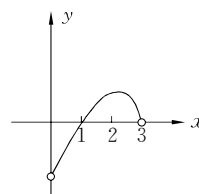


图 I-4-1

二、填 空.

1. 若方程 $\sin^2 x + \cos x + k = 0$ 有解, 则常数 k 的取值范围是_____.

2. 若 $2^x + 2^{-x} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\theta =$ _____.

3. 函数 $y = 2\sin x \cos x - 2\sin^2 x + 1$ 的最小正周期 $T =$ _____.

4. 关于 x 的函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 有以下命题:

- ① 对任意的 φ , $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数;
 ② 不存在 φ , 使 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数;
 ③ 存在 φ , 使 $f(x)$ 是奇函数;
 ④ 对任意的 φ , $f(x)$ 都不是偶函数.

其中一个假命题的序号是_____, 因为当 $\varphi =$ _____ 时, 该命题不成立.

5. 二次方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 记 $\alpha = \arctan x_1$, $\beta = \arctan x_2$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为_____.

三、解 答.

1. 已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 求 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} + \sqrt{3} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的值.

3. 用 $\cot \theta$ ($\theta \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) 表示角 θ 的其他三角函数.

4. 已知函数 $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cdot \cos x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

(1) 当函数 y 取最大值时, 求自变量 x 的值组成的集合.

(2) 该函数的图像可由 $y = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图像经过怎样的平移和伸缩变换得到?

5. 已知 $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, 且 $\frac{17\pi}{12} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, 求 $\sin 2\alpha$ 和 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 的值.

6. 关于 x 的方程 $x^2 + x \sin 2\theta - \sin \theta \cot \theta = 0$ 的两根为 α, β , 且 $0 < \theta < 2\pi$, 若数列 $1, \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right), \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2, \dots$ 的前 100 项和为 0.

(1) 求 $\sin \theta$ 的值.

(2) 求 θ 的值.

7. 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 且 α, β 均为锐角, 求 $\alpha + \beta$ 的值.

8. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值.

(2) 在图 I - 4 - 2 所示的直角坐标系中, 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图像.

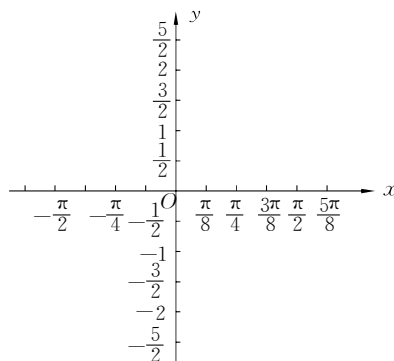


图 I - 4 - 2

9. 求证 $2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\theta \cos 2\varphi$.

10. 若 $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$, 且 $a \sqrt{1-b^2} + b \sqrt{1-a^2} = 1$.

求证 $a^2 + b^2 = 1$.

探究拓展能力强化训练与应用综合能力的养成

1. (数形结合题) 如图 I - 4 - 3, 函数 $y = -x \cdot \cos x$ 的部分图像是().

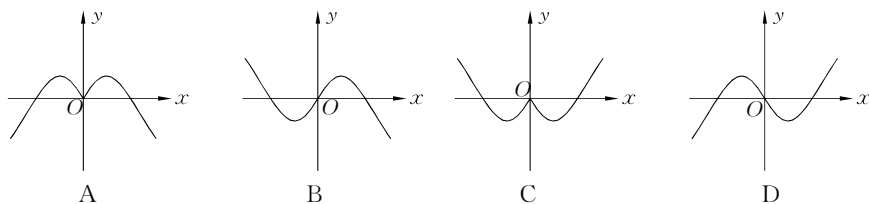


图 I - 4 - 3

2. (探究题)(1) 已知函数 $y = 5 \cos\left(\frac{2k+1}{3}\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$), 若对于任意的实数 a , 在区间 $[a, a +$

3]上函数值 $\frac{5}{4}$ 出现的次数不少于 4 次且不多于 8 次,求 k 的值.

(2) 为了使 $y = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 1]$ 上至少出现 50 次最大值,求 ω 的最小值.

3. (综合题) 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 曲线 $x^2 \sin \theta + y^2 \cos \theta = 1$ 和 $x^2 \cos \theta - y^2 \sin \theta = 1$ 有 4 个不同的交点.

(1) 求 θ 的取值范围.

(2) 证明这 4 个交点共圆, 并求圆半径的取值范围.

4. (应用题) 有一很大的湖, 它的岸边(可视湖岸为直线)停放着一只小船, 由于缆绳突然断开, 小船被风刮跑, 运动的方向与湖岸成 15° 角, 速度为 2.5 km/h. 同时, 岸边有一人从同一地点开始追赶小船, 已知他在岸上跑的速度为 4 km/h, 在水中游泳的速度为 2 km/h, 问此人能否追上小船. 若小船速度改变, 则小船能被人追上的最大速度是多少?

5. (联系现实生活应用题) 足球比赛中, 甲队的边锋从乙队的球门一侧带球沿平行于边线的直线向前推进, 如图 I - 4 - 4. 试问: 边锋在何处射门, 才能使命中球门的角度最大?

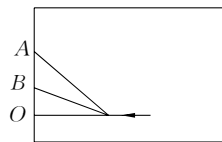


图 I - 4 - 4

6. (数形结合题) 求方程 $10^{\sin x} = \sqrt{x}$ 实根的个数.

7. (转化题) 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数, 对任意的 $\theta \in \mathbb{R}$, 问: 是否存在这样的实数 m , 使得 $f(\cos 2\theta - 3) + f(4m - 2m \cos \theta) > f(0)$ 对所有的 θ 都成立? 证明你的结论.

8. (探究题) (1) 通过计算可得 $\sin x + \sin 3x = \frac{\sin^2 2x}{\sin x}$, $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \frac{\sin^2 3x}{\sin x}$, ... 请你猜想一个规律, 并证明你的结论.

(2) 猜想 $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n - 1)x$ 化积的表达式(不用证明), 并化简 $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin 99x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos 99x}$.

9. (2004 年全国高考题) 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$.

(1) 求证 $\tan A = 2 \tan B$.

(2) 设 $AB = 3$, 求 AB 边上的高.

10. (竞赛题) 已知 $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $a \in \mathbb{R}$, 且 $\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0, \end{cases}$ 则 $\cos(x + 2y) =$ _____.

第五章 平面向量与空间向量

教材基础知识针对性训练与基本能力巩固提高

一、选择.

1. 在 $\square ABCD$ 中, 设对角线 $\vec{AC} = a$, $\vec{BD} = b$, 则向量 \vec{AB} , \vec{BC} 可以分别表示为().

- _____.
4. 点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点, 并且满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 _____ 心.
5. 若 $a = (2, 3, 1)$, $b = (5, 6, 4)$, 则以 a, b 为边的平行四边形的面积是 _____.
6. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下面四个命题中错误命题的序号为 _____.
- ① $(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1})^2 = 3(\overrightarrow{A_1B_1})^2$;
- ② $\overrightarrow{A_1C} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}) = 0$;
- ③ $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 60° ;
- ④ 正方体的体积为 $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}|$.