

目录 Contents

第一部分 必考内容

专题一 函数的性质及其应用	2
§ 1.1 函数的性质	2
§ 1.2 函数的图象	6
§ 1.3 函数的综合问题及应用	9
专题优化测控 (一)	12
专题二 数 列	15
§ 2.1 数列的基本运算和性质	15
§ 2.2 数列的综合应用	19
专题优化测控 (二)	22
专题三 三角函数	25
§ 3.1 三角函数的图象与性质	25
§ 3.2 三角函数的综合应用	29
§ 3.3 解三角形	32
专题优化测控 (三)	34
专题四 平面向量	37
§ 4.1 向量的运算、数量积	37
§ 4.2 平面向量的应用	40
专题优化测控 (四)	43
专题五 立体几何	45
§ 5.1 空间几何体	45
§ 5.2 直线与平面之间的位置关系	49
专题优化测控 (五)	54
专题六 直线与圆锥曲线	56
§ 6.1 直线与圆	56
§ 6.2 直线与圆锥曲线的位置关系	61

§ 6.3 解析几何的综合问题	65
专题优化测控 (六)	69
专题七 不等式	71
§ 7.1 不等式的解法	71
§ 7.2 不等式的应用	74
专题优化测控 (七)	77
专题八 算法、框图、复数	79
§ 8.1 算法初步	79
§ 8.2 框图	82
§ 8.3 数系的扩充与复数的引入	86
专题优化测控 (八)	88
专题九 概率与统计	91
§ 9.1 概率	92
§ 9.2 统计与案例	94
专题优化测控 (九)	97
专题十 导数及其应用	99
§ 10.1 导数	99
§ 10.2 导数的应用	102
专题优化测控 (十)	105
专题十一 简易逻辑、推理与论证	107
§ 11.1 简易逻辑	107
§ 11.2 推理与论证	109
专题优化测控 (十一)	112
专题十二 函数与方程思想	114
§ 12.1 函数思想与方程思想	114
§ 12.2 函数与方程的转化思想及应用	116
专题优化测控 (十二)	118

专题十三 变换与转化思想	120
§ 13.1 变换转化的主要策略	120
§ 13.2 变换转化的方法及依据	122
专题优化测控 (十三)	124
专题十四 数形结合思想	126
§ 14.1 方程、函数中数形结合问题	126
§ 14.2 不等式、解析几何中的数形结合	128
专题优化测控 (十四)	130
专题十五 分类讨论思想	132
§ 15.1 分类讨论的原则与方法	132
§ 15.2 分类讨论的重要题型	134
专题优化测控 (十五)	136
专题十六 最值问题	138
§ 16.1 求最值的常见方法	138
§ 16.2 最值问题的综合应用	140
专题优化测控 (十六)	142
专题十七 应用问题	144
§ 17.1 函数的应用	144
§ 17.2 不等式的应用	147
§ 17.3 数列的应用	149
专题优化测控 (十七)	152
专题十八 探索性问题	154
§ 18.1 条件探索与结论探索型	154
§ 18.2 存在性探索型	157
专题优化测控 (十八)	160

第二部分 选考内容

专题一 几何证明选讲	164
第一讲 相似三角形的判定及有关性质	164
第二讲 直线与圆的位置关系	166
专题二 坐标系与参数方程	169
第一讲 坐标系	169
第二讲 参数方程	170

第三部分 考前指导与综合测试

一 考前指导	174
(一) 考前如何备考	174
(二) 重视数学能力的培养	175
(三) 应试技巧	176
二 综合模拟	178
综合模拟训练(一)	178
综合模拟训练(二)	181
综合模拟训练(三)	184
参考答案	187

专题一 函数的性质及其应用

考点导航

考情分析

函数是高中数学中的重要内容,函数的观点和方法贯穿整个高中数学的全过程.函数也是一条纽带,它把中学数学各个分支紧紧地连在一起,特别是新教材中导数的涉入,使函数的内容更加充实、方法更加灵活,自然就成为高考的重点和热点.近几年高考试题中函数部分占有相当大的比重,所考查的内容主要有函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性以及函数图象的变换等.其中多项式函数(含二次函数)、指数函数、对数函数、幂函数仍是重点考查的内容.高考主要涉及:①直接通过具体函数考查某些性质;②以导数为工具围绕函数、不等式、方程综合考查;③函数与解析几何、数列等内容结合在一起,出现曲线方程的变换、参数范围的探求及最值问题等综合性强的新颖试题.二轮复习时要注意有意识地用函数的思想和方法去看待问题、解决问题,并揭示其内在联系.

纵观近几年来的高考试题,常以基础层次或中档难度的试题考查函数的图象,特别是图象的平移、对称变换等,这充分体现了图象在解题中的作用(数形结合的思想).以中等难度、组合形式、一题多角度考查函数的性质预计将成

为新的热点或方向.函数极易与不等式、方程、最值、参数取值范围的探求及与解析几何等综合在一起编拟综合性较强的高档解答题,以此来测试对函数思想方法的理解与灵活运用,考查等价转化及数形结合、分类讨论等解题策略的理解和掌握程度.

课标链接

集合语言是现代数学的基本语言,使用集合语言,可以简洁、准确地表达数学的一些内容.高中数学课程只将集合作为一种语言来学习,学生将学会使用最基本的集合语言表示有关的数学对象,发展运用数学语言进行交流的能力.

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型.高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系,同时还用集合与对应的语言刻画函数,函数的思想方法将贯穿高中数学课程的始终.学生要学习指数函数、对数函数等具体的基本初等函数,结合实际问题感受运用函数概念建立模型的过程和方法.学生还要学会利用函数的性质求方程的近似解,体会函数与方程的有机联系.

§ 1.1 函数的性质

主干知识再现

函数的性质主要体现在五个方面:

1. 能使函数式有意义的实数 x 的集合称为函数的定义域

确定函数定义域时,常从以下几个方面考虑:

- (1) 分式的分母不等于 0;
- (2) 偶次根式中被开方式大于等于 0;
- (3) 对数式的真数大于零,底数大于 0 且不等于 1;
- (4) 指数为 0 时,底数不等于 0.
- (5) 函数的自变量有实际意义时,应符合实际意义.

定义域经常和判定函数的奇偶性、求函数单调区间、求参数范围或解函数相关不等式相关联,在函数有意义的条

件下转化求解.

2. 函数的值域

在函数 $y = f(x)$ 中,与自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

确定函数的值域的原则:

- (1) 当函数 $y = f(x)$ 用表格给出时,函数的值域是指表格中实数 y 的集合;
- (2) 当函数 $y = f(x)$ 用图象给出时,函数的值域是指图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合;
- (3) 当函数 $y = f(x)$ 用解析式给出时,函数的值域由函数的定义域及其对应法则唯一确定;
- (4) 当函数由实际问题给出时,函数的值域由问题的实际意义确定.

值域的求法较多,注意选择不同条件的适用性,如:判

别式法、三角代换法、反函数法、不等式法、单调性法、图象法、数形结合法及导数法. 值域往往与实际问题中的最优问题或数列问题相关联.

3. 函数的奇偶性

如果对于函数 $y = f(x)$ 定义域内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$ [$f(-x) = f(x)$], 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数 (偶函数). 在此定义中可以看出, 只有当函数定义域在数轴上所表示的区间关于原点对称, 这个函数才可能具有奇偶性, 然后再作判断.

4. 函数的单调性

函数的单调性是函数的又一个重要性质. 给定区间 D 上的函数 $f(x)$, 若对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$], 则称 $f(x)$ 在区间 D 上为单调函数. 反映在图象上, 若函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增 (减) 函数, 则图象在 D 上的部分从左到右是上升 (下降) 的, 或如果函数 $f(x)$ 在给定区间 (a, b) 上恒有 $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增 (减) 函数, (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增 (减) 区间.

注 ①单调性是函数在某一区间上的“整体”性质, 因此定义中 x_1, x_2 具有任意性, 不能用特殊值代替; ②单调性是与“区间”紧密相关的概念, 一个函数在不同的区间上可以有不同的单调性; ③判定单调性往往要借助定义域和奇偶性, 方法主要有定义法、图象法、导数法等.

5. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 如果存在非零常数 T , 使得任何 $x \in D$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $y = f(x)$ 的一个周期.

周期性往往和单调性、奇偶性、函数的图象及其解析式相关联出现. 注意从代数变换角度分析.

重点内容精练

- 已知 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $[0, 1]$ 上是 x 的减函数, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(0, 2)$ D. $[2, +\infty)$
- 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$
- 函数 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 a 的值为 ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4
- 函数 $y = \begin{cases} 2x-3, & x > 0, \\ f(x), & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数, 则 $f(x) =$
- 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 则实数 m 的取值范围是

【考题 1】 2006 浙江高考, 10 函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 满足 $f[f(x)] = f(x)$, 则这样的函数个数共有 ()

- A. 1 个 B. 2 个
C. 8 个 D. 10 个

解析: 当 $f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3, f(x) = x$ 时有 4 个.

根据元素地位的对等性,

不妨设当 $f(1) = 1, f(2) = 1$,

则必有 $f(3) = 3$, 假若 $f(3) = 2$,

则 $f[f(3)] = f(2) = 1 \neq 3$, 这样的情况共有 $C_3^1 C_2^2 C_2^1 = 6$ 种.

故共有 10 种, 选 D.

答案: D

【考题 2】 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + 2bx + c$ 在 $(0, 1)$

内取得极大值, 在 $(1, 2)$ 内取得极小值, 求 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围.

解: $f'(x) = x^2 + ax + 2b$.

依题意, 方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的一个根大于 0 且小于 1, 另一个根大于 1 且小于 2.

$$\text{于是 } \begin{cases} f'(0) > 0, & b > 0, \\ f'(1) < 0, & \text{即 } \begin{cases} a+b+2 > 0, \\ a+2b+1 < 0. \end{cases} \\ f'(2) > 0, \end{cases}$$

不等式组表示的平面区域如图

所示, 其中 $A(-2, 1)$, $B(-1, 0)$,

$D(1, 2)$.

设 $C(a, b)$ 为可行域 (阴影部

分) 内任一点, 而 $\frac{b-2}{a-1}$ 的几何意义为

直线 CD 的斜率.

由图可知 $k_{BD} > k_{CD} > k_{AD}$, 故 $\frac{1}{3} < \frac{b-2}{a-1} < 1$.

点评 通过对函数 $f(x)$ 求导, 将 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得极大值、在 $(1, 2)$ 内取得极小值的问题转化为研究二次方程 $f'(x) = x^2 + ax + 2b = 0$ 根的分布问题, 利用二元一次不等式组的几何背景, 联系斜率公式, 运用数形结合的数学思想求得取值范围.

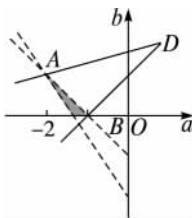
链接·拓展

若此题条件不变, 结论改为: 求 $a^2 + b^2$ 的取值范围.

答案 $1 < a^2 + b^2 < 5$.

【考题 3】 设偶函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是增函数 ($b > a >$

0), 试判断 $F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)-x}$ 在区间 $[-b, -a]$ 上的单调性, 并加以证明.



解： $f(x)$ 是偶函数，且在 $[a, b]$ 上单调递增，

$f(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上单调递减，

$f(x) - x$ 在 $[-b, -a]$ 上单调递减。

故 $F(x) = (\frac{1}{2})^{f(x)-x}$ 在 $[-b, -a]$ 上单调递增。

证明 设 $-b \leq x_1 < x_2 \leq -a, a \leq -x_2 < -x_1 \leq b$,

$$\frac{F(x_1)}{F(x_2)} = \frac{(\frac{1}{2})^{f(x_1)-x_1}}{(\frac{1}{2})^{f(x_2)-x_2}}$$

$$= (\frac{1}{2})^{f(x_1)-f(x_2)+(x_2-x_1)}$$

$$= (\frac{1}{2})^{f(-x_2)-f(-x_1)+(x_2-x_1)}$$

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增， $f(-x_1) > f(-x_2)$ ，

$f(-x_1) - f(-x_2) + x_2 - x_1 > 0$ 。

$$0 < (\frac{1}{2})^{f(-x_2)-f(-x_1)+(x_2-x_1)} < 1.$$

$$\frac{F(x_1)}{F(x_2)} < 1. \text{ 故 } F(x_1) < F(x_2).$$

$F(x)$ 为 $[-b, -a]$ 上的增函数。

链接·思考

① 此题涉及函数的单调性，能否用导数来解决？

提示 当 $x \in (a, b)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

当 $x \in (-b, -a)$ 时， $f'(x) < 0$ 。

$$F'(x) = (\frac{1}{2})^{f(x)-x} \cdot \ln \frac{1}{2} [f'(x) - 1]$$

$$= (\frac{1}{2})^{f(x)-x} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot [f'(x) - 1] > 0.$$

② $F(x)$ 可以看成 $u(x) = f(x) - x, F(u) = (\frac{1}{2})^u$

的复合函数，复合函数的单调性符合符号的乘法法则，处理复合函数的单调性问题时要注意函数的定义域。

【考题 4】 2006 上海高考，22 已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下

性质 如果常数 $a > 0$ ，那么该函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数。

(1) 如果函数 $y = x + \frac{2^b}{x} (x > 0)$ 的值域为 $[6, +\infty)$ ，求 b 的值；

(2) 研究函数 $y = x^2 + \frac{c}{x^2}$ (常数 $c > 0$) 在定义域内的单调性，并说明理由；

(3) 对函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 和 $y = x^2 + \frac{a}{x^2}$ (常数 $a > 0$) 作出推广，使它们都是你所推广的函数的特例，研究推广后的函数的单调性 (只需写出结论，不必证明)，并求函数 $f(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^n + (\frac{1}{x^2} + x)^n$ (n 是正整数) 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值和最小值 (可利用你的研究结论)。

解： (1) 函数 $y = x + \frac{2^b}{x} (x > 0)$ 在 $(0, \sqrt{2^b}]$ 上是减函数，

在 $[\sqrt{2^b}, +\infty)$ 上是增函数，

该函数在 $x = \sqrt{2^b}$ 处取得最小值 $2\sqrt{2^b}$ 。

令 $2\sqrt{2^b} = 6$ 得 $b = \log_2 9$ 。

(2) 方法一：设 $t = x^2 \geq 0$ ，显然函数 $y = t + \frac{c}{t}$ 在

$(0, \sqrt{c}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{c}, +\infty)$ 上是增函数。

令 $x^2 \leq \sqrt{c}$ ，得 $-\sqrt[4]{c} \leq x \leq \sqrt[4]{c}$ ，

令 $x^2 \geq \sqrt{c}$ ，得 $x \geq \sqrt[4]{c}$ 或 $x \leq -\sqrt[4]{c}$ 。

又 $t = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，

于是利用复合函数的单调性知，函数 $y = x^2 + \frac{c}{x^2}$ 在

$(-\infty, -\sqrt[4]{c}]$ 上是减函数，在 $[-\sqrt[4]{c}, 0)$ 上是增函数，在

$(0, \sqrt[4]{c}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt[4]{c}, +\infty)$ 上是增函数。

$$\text{方法二： } y' = 2x - \frac{2xc}{x^4} = 2x - \frac{2c}{x^3},$$

令 $y' = 0$ ，则 $x = \pm \sqrt[4]{c}$ 。

又 $x \neq 0$ ，

于是

x	$(-\infty, -\sqrt[4]{c})$	$-\sqrt[4]{c}$	$(-\sqrt[4]{c}, 0)$	0	$(0, \sqrt[4]{c})$	$\sqrt[4]{c}$	$(\sqrt[4]{c}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$		$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$y = x^2 + \frac{c}{x^2} (c > 0)$ 的单调增区间是 $[-\sqrt[4]{c}, 0)$ ，

$[\sqrt[4]{c}, +\infty)$ ；

单调递减区间是 $(-\infty, -\sqrt[4]{c}]$ ， $(0, \sqrt[4]{c}]$ 。

(3) 推广结论：当 n 是正奇数时，函数 $y = x^n + \frac{a}{x^n}$

(常数 $a > 0$) 是奇函数，故在 $(-\infty, -\sqrt[n]{a}]$ 上是增函数，

在 $[-\sqrt[n]{a}, 0)$ 上是减函数，

在 $(0, \sqrt[n]{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt[n]{a}, +\infty)$ 上是增函数。

而当 n 是正偶数时，函数 $y = x^n + \frac{a}{x^n}$ (常数 $a > 0$) 是偶函数，

在 $(-\infty, -\sqrt[n]{a}]$ 上是减函数，在 $[-\sqrt[n]{a}, 0)$ 上是增函数，

在 $(0, \sqrt[n]{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt[n]{a}, +\infty)$ 上是增函数。

当 $x = 1$ 时，有最小值 (1 的任意次幂都是 1)，

$$F(x)_{\min} = F(1) = (1+1)^n + (1+1)^n = 2^{n+1},$$

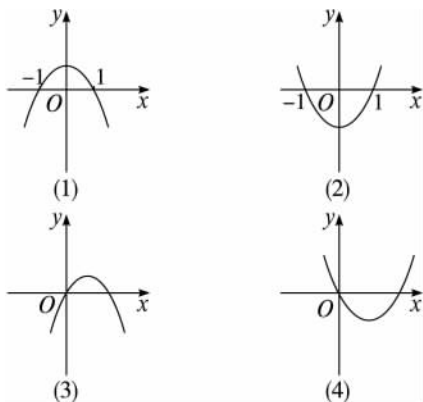
$$F(x)_{\max} = F(\frac{1}{2}) = F(2) = (\frac{9}{2})^n + (\frac{9}{4})^n =$$

$$9^n [(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{2n}].$$

点评 主要考查运用导数研究函数单调性及极值、解不等式等基础知识,考查综合分析和解决问题的能力,以及分类讨论的数学思想方法.

一、选择题

1. **2005 全国高考卷 I, 理 7** 设 $b > 0$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + a^2 - 1$ 的图象为下列之一, 则 a 的值为 ()



- A. 1
B. -1
C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 若 $f(1) > 0, f(2) = (a+1)(2a-3)$, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $a < \frac{3}{2}$
B. $a < \frac{3}{2}$ 且 $a \neq -1$
C. $a > \frac{3}{2}$ 或 $a < -1$
D. $-1 < a < \frac{3}{2}$
3. **2006 全国高考卷 II, 6** 函数 $y = \ln x + 1$ ($x > 0$) 的反函数为 ()
- A. $y = e^{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$)
B. $y = e^{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$)
C. $y = e^{x+1}$ ($x > 1$)
D. $y = e^{x-1}$ ($x > 1$)
4. **2006 北京高考, 5** 已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1, \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 ()
- A. $(0, 1)$
B. $(0, \frac{1}{3})$
C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$
D. $[\frac{1}{7}, 1)$
5. **2005 全国高考卷 I, 8** 设 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a(a^{2x} - 2a^x - 2)$, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, 0)$
B. $(0, +\infty)$
C. $(-\infty, \log_a 3)$
D. $(\log_a 3, +\infty)$

二、填空题

6. **2006 全国高考卷 I, 13** 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$. 若 f

(x) 为奇函数, 则 $a =$

7. **2006 北京西城抽样测试, 14** 对于一切实数 x , 令 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 则函数 $f(x) = [x]$ 称为高斯函数或取整函数. 计算 $f(-0.3) + f(1) + f(1.3) =$

三、解答题

8. **2006 安徽高考, 20** 设函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ ($x \in \mathbb{R}$), 已知 $g(x) = f(x) - f'(x)$ 是奇函数.
- (1) 求 b, c 的值;
(2) 求 $g(x)$ 的单调区间与极值.
9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数. 当 $a, b \in [-1, 1]$, 且 $a+b \neq 0$ 时, 有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$.
- (1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并给予证明;
(2) 若 $f(1) = 1$, 且 $f(x) \leq m^2 - 2bm + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1], b \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

10. 2006 浙江高考,20 设 $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 若 $a + b + c = 0, f(0) f(1) > 0$, 求证:
- (1) 方程 $f(x) = 0$ 有实根;
 - (2) $-2 < \frac{b}{a} < -1$;
 - (3) 设 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个实根, 则 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq |x_1 - x_2| < \frac{2}{3}$.

探究题

11. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 是常数, 且 $a \neq 0$) 满足条件 $f(2) = 0$ 且方程 $f(x) = x$ 有等根.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式,
 - (2) 问是否存在实数 m, n ($m < n$), 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[2m, 2n]$? 若存在, 求出 m, n 的值; 若不存在, 请说明理由.

§ 1.2 函数的图象

主干知识再现

1. 要准确记忆一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等各种基本初等函数的图象.
2. 函数图象的作法有两种: 一种是描点法, 另一种是图象的变换法.

(1) 描点法作图: 一般要考虑定义域, 化简解析式, 描出能确定图象伸展方向的几个关键点.

(2) 利用图象变换法作图:

① 平移变换: $y = f(x) \xrightarrow[h < 0, \text{左移}]{h > 0, \text{右移}} y = f(x - h) \quad y = f(x) \xrightarrow[k < 0, \text{下移}]{k > 0, \text{上移}} y = f(x) + k.$

② 对称变换: $y = f(x) \xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴}} y = -f(x),$

$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴}} y = f(-x);$

$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于直线 } x=a} y = f(2a - x);$

$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于直线 } y=x} y = f^{-1}(x);$

$y = f(x) \xrightarrow{\text{关于原点}} y = -f(-x).$

③ 翻折变换:

$y = f(x)$

保留 y 轴右边图象, 并作关于 y 轴的对称图象 $\rightarrow y = f(|x|);$

去掉 y 轴左边图象 $\rightarrow y = f(x) \quad y = f(x) \xrightarrow{\text{保留 } x \text{ 轴上方图象}} y = |f(x)|.$

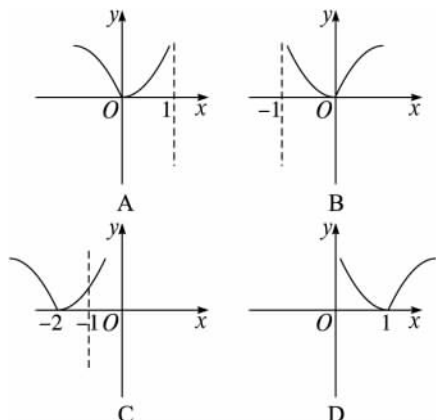
④ 伸缩变换:

$y = f(x) \xrightarrow[0 < a < 1, \text{横向伸长到原来的 } \frac{1}{a}]{a > 1, \text{横向缩短到原来的 } \frac{1}{a}} y = f(ax);$

$y = f(x) \xrightarrow[0 < a < 1, \text{纵向缩短到原来的 } \frac{1}{a}]{a > 1, \text{纵向伸长到原来的 } a} y = af(x).$

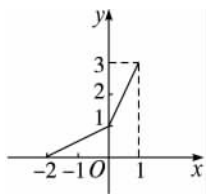
重点内容精练

1. 设函数 $y = f(x)$ 定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上, 则函数 $y = f(x - 1)$ 与 $y = f(1 - x)$ 的图象关于 ()
 - A. 直线 $y = 0$ 对称
 - B. 直线 $x = 0$ 对称
 - C. 直线 $y = 1$ 对称
 - D. 直线 $x = 1$ 对称
2. 已知函数 $f(x) = \lg x$, 则函数 $g(x) = |f(1 - x)|$ 的图象大致是 ()



3. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图

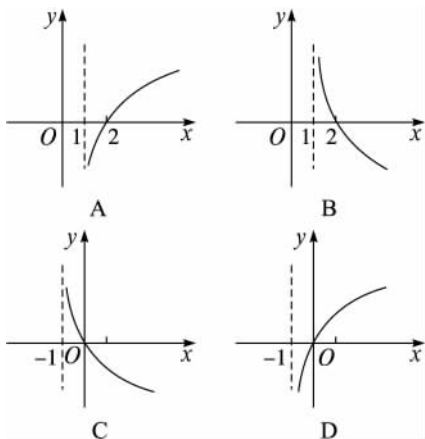
象关于直线 $y=x$ 对称. 现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移2个单位, 再沿 y 轴向上平移1个单位, 所得的图象是由两条线段组成的折线(如图所示), 则函数 $f(x)$ 的表达式为



- A. $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}+2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$
- B. $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}-2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$
- C. $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2}+1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$
- D. $f(x) = \begin{cases} 2x-6, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2}-3, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

4. 若函数 $f(x) = \log_2 |ax-1|$ ($a \neq 0$) 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则 $a =$
5. 已知函数 $f(x) = 2-x^2$, $g(x) = x$, 若 $f(x) * g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 那么 $f(x) * g(x)$ 的最大值是

【考题1】 若函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 既是奇函数, 又是增函数, 那么 $g(x) = \log_a(x+k)$ 的图象是



解析: $f(x)$ 为奇函数, $f(0) = 0$,
 $k=1$. 又 $f(x)$ 是增函数, $a > 1$.
 可知 $g(x)$ 的图象是 D.

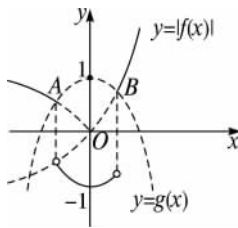
答案: D

【考题2】 已知 $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 1 - x^2$, 规定: 当 $|f(x)| \geq$

$g(x)$ 时, $h(x) = |f(x)|$; 当 $|f(x)| < g(x)$ 时, $h(x) = -g(x)$. 试讨论 $h(x)$ 是否有最大值或最小值, 并说明理由.

解: 画出 $y = |f(x)| = |2^x - 1|$

与 $y = g(x) = 1 - x^2$ 的图象, 它们交于 A、B 两点. 由“规定”, 在 A、B 两侧, $|f(x)| \geq g(x)$, 故 $h(x) = |f(x)|$; 在 A、B 之间, $|f(x)| < g(x)$, 故 $h(x) = -g(x)$.



综上所述, $y = h(x)$ 的图象是图中的实线部分, 因此 $h(x)$ 有最小值 -1, 无最大值.

【考题3】 2005 广东高考, 19 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(2-x) = f(2+x)$, $f(7-x) = f(7+x)$, 且在闭区间 $[0, 7]$ 上, 只有 $f(1) = f(3) = 0$.

- (1) 试判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性;
 (2) 试求方程 $f(x) = 0$ 在闭区间 $[-2005, 2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

解: (1) 由 $f(2-x) = f(2+x)$ 得函数 $y = f(x)$ 的对称轴为 $x=2$, $f(-1) = f(5)$. 而 $f(5) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq f(-1)$, 即 $f(x)$ 不是偶函数.

又 $f(x)$ 在 $[0, 7]$ 上只有 $f(1) = f(3) = 0$,
 $f(0) \neq 0$.

从而知函数 $y = f(x)$ 不是奇函数. 故函数 $y = f(x)$ 是非奇非偶函数.

$$(2) \begin{cases} f(2-x) = f(2+x) \\ f(7-x) = f(7+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(4-x) \\ f(x) = f(14-x) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(4-x) = f(14-x) \Rightarrow f(x) = f(x+10)$, 从而知函数 $y = f(x)$ 的周期为 $T=10$.

又 $f(3) = f(1) = 0$,
 $f(11) = f(13) = f(-7) = f(-9) = 0$.

故 $f(x)$ 在 $[0, 10]$ 和 $[-10, 0]$ 上均有2个根, 从而可知函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 2000]$ 上有400个根, 在 $[2000, 2005]$ 上有2个根, 在 $[-2000, 0]$ 上有400个根, 在 $[-2005, -2000]$ 上没有根. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-2005, 2005]$ 上有802个根.

【考题4】 2006 四川高考, 文21 已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax - 1$, $g(x) = f'(x) - ax - 5$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 对满足 $-1 \leq a \leq 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x) < 0$, 求实数 x 的取值范围;
 (2) 设 $a = -m^2$, 当实数 m 在什么范围内变化时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y=3$ 只有一个公共点?

解: (1) 由题意, $g(x) = 3x^2 - ax + 3a - 5$.

令 $\varphi(a) = (3-x)a + 3x^2 - 5$, $-1 \leq a \leq 1$.

对 $-1 \leq a \leq 1$, 恒有 $g(x) < 0$, 即有 $\varphi(a) < 0$.

$$\begin{cases} \varphi(1) < 0, \\ \varphi(-1) < 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x^2 - x - 2 < 0, \\ 3x^2 + x - 8 < 0. \end{cases}$$

解得 $-\frac{2}{3} < x < 1$.

故 $x \in (-\frac{2}{3}, 1)$ 时, 对满足 $-1 \leq a \leq 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x) < 0$.

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 3m^2.$$

① 当 $m=0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$ 的图象与直线 $y=3$ 只有一个公共点;

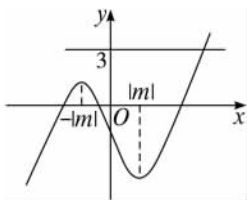
② 当 $m \neq 0$ 时,

列表:

x	$(-\infty, - m)$	$- m $	$(- m , m)$	$ m $	$(m , +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$$f(x)_{\text{极小}} = f(|m|) = -2m^2|m| - 1 < -1.$$

又因为 $f(x)$ 的值域是 $\mathbb{R}$, 且在 $(|m|, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > |m|$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y=3$ 只有一个公共点.



当 $x < -|m|$ 时, 恒有 $f(x) \leq f(-|m|)$.

由题意, 得 $f(-|m|) < 3$,

$$\text{即 } 2m^2|m| - 1 = 2|m|^3 - 1 < 3.$$

$$\text{解得 } m \in (-\sqrt[3]{2}, 0) \cup (0, \sqrt[3]{2}).$$

综上, m 的取值范围是 $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

一、选择题

1. 已知 $f(x) = -a^{x+1}$ ($0 < a < 1$), 若 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则

A. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

B. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

C. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

D. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的大小关系不确定

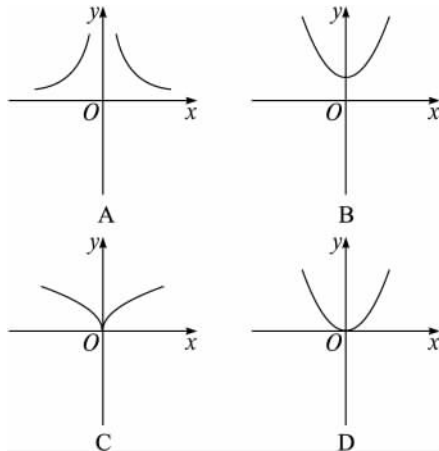
2. 2006 重庆高考, 文 6 设函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 且 $y = f(2x-1)$ 的图象过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 则 $y = f^{-1}(x)$ 的图象必过点

A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(1, \frac{1}{2})$

C. $(1, 0)$

D. $(0, 1)$

3. 函数 $y = |x|^{-\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}^+, n > 2$) 的图象大致形状是 ()



4. 2006 湖南高考, 理 8 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x | f(x) < 0\}$, $P = \{x | f'(x) > 0\}$, 若 $M \subseteq P$, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

5. 将函数 $y = \lg(1-x)$ 的图象进行变换, 使所得图象与函数 $y = \lg x$ 的图象关于 y 轴对称, 这种变换是

A. 向左平移 1 个单位

B. 向右平移 1 个单位

C. 向上平移 1 个单位

D. 向下平移 1 个单位

二、填空题

6. 2005 天津高考, 理 16 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) =$

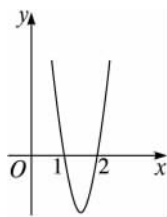
7. 2006 浙江高考, 理 12 对 $a, b \in \mathbb{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$, 函数 $f(x) = \max\{|x+1|, |x-2|\}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最小值是

三、解答题

8. 2006 北京高考, 理 16 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, $(2, 0)$, 如图所示. 求:

(1) x_0 的值;

(2) a, b, c 的值.



9. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), 且 $f(1) = -\frac{a}{2}, a > 2c > b$.

- (1) 判断 a, b 的符号;
- (2) 证明 $f(x) = 0$ 至少有一个实根在区间 $(0, 2)$ 内;
- (3) 求函数 $y = f(x)$ 的图象被 x 轴所截得的弦长的取值范围.

探究题

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在 $x_0 \in D$, 使得 $y_0 = f(x_0) = x_0$, 则称以 (x_0, y_0) 为坐标的点为函数图象上的不动点.

- (1) 若函数 $f(x) = \frac{3x+a}{x+b}$ 的图象上有两个关于原点对称的不动点, 求 a, b 满足的条件;
- (2) 在 (1) 的条件下, 若 $a = 8$, 记函数 $f(x)$ 图象上的两个不动点分别为 A, A' , P 为函数 $f(x)$ 的图象上的另一点, 且其纵坐标 $y_P > 3$, 求点 P 到直线 AA' 距离的最小值及取得最小值时点 P 的坐标.
- (3) 命题“若定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图象上存在有限个不动点, 则不动点有奇数个”是否正确? 若正确, 试给予证明, 并举出一例; 若不正确, 试举一反例说明.

§ 1.3 函数的综合问题及应用

主干知识再现

函数知识几乎渗透到中学数学的各个环节, 与其他知识互相渗透、相互融合. 函数这一章应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性构成了本课时的重点.

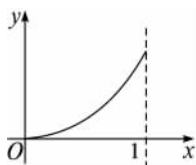
- (1) 函数与不等式的综合.
- (2) 函数与方程的综合.
- (3) 函数与数列的综合.
- (4) 利用导数研究函数的单调性、最值等. 在解决函数综合问题时, 要认真分析, 处理好各种关系, 把握问题的主线, 运用相关的知识和方法逐步化归为基本问题来解决, 尤其是要注意数学思想方法的运用.

这部分内容在高考中多以解答题形式出现, 有一定的难度.

重点内容精练

1. 已知函数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图象如图所示, 若 $0 < x_1 < x_2$, 则

- A. $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$
- B. $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$



C. $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$

D. 前三个判断都不正确

2. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 它的最小正周期为 2, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2\,004) + f(2\,005)$ 等于 ()
A. 1 或 0 B. 1 或 -1 C. 0 D. 1
3. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车, 利润 (单位: 万元) 分别为 $L_1 = 5.06x - 0.15x^2$ 和 $L_2 = 2x$, 其中 x 为销售量 (单位: 辆). 若该公司在这两地共销售 15 辆车, 则能获得的最大利润为 ()
A. 45.606 B. 45.6 C. 45.56 D. 45.51
4. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC, BC 的距离乘积的最大值是
5. 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$. 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$

【考题 1】 2006 湖北高考, 理 4 设 $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$, 则 $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{2}{x})$ 的定义域为 ()
A. $(-4, 0) \cup (0, 4)$ B. $(-4, -1) \cup (1, 4)$
C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$ D. $(-4, -2) \cup (2, 4)$

解析: $\frac{2+x}{2-x} > 0$, $-2 < x < 2$, $-2 < \frac{x}{2} < 2$ 且 $-2 <$

$\frac{2}{x} < 2$. 取 $x=1$, 则 $\frac{2}{x}=2$ 不合题意(舍去),

故排除 A, 取 $x=2$, 满足题意, 排除 C、D, 故选 B.

答案: B

【考题 2】 2006 福建高考, 文 21 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是 12.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 是否存在自然数 m , 使得方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$ 在区间

$(m, m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出所有 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) $f(x)$ 是二次函数, 且 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$,

可设 $f(x) = ax(x-5)$ ($a > 0$).

$f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是 $f(-1) = 6a$.

由已知, 得 $6a = 12$, $a = 2$.

$f(x) = 2x(x-5) = 2x^2 - 10x$ ($x \in \mathbb{R}$).

(2) 方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$ 等价于方程 $2x^3 - 10x^2 + 37 = 0$.

设 $h(x) = 2x^3 - 10x^2 + 37$,

则 $h'(x) = 6x^2 - 20x = 2x(3x - 10)$.

当 $x \in (0, \frac{10}{3})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数;

当 $x \in (\frac{10}{3}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数.

$h(3) = 1 > 0$, $h(\frac{10}{3}) = -\frac{1}{27} < 0$, $h(4) = 5 > 0$,

方程 $h(x) = 0$ 在区间 $(3, \frac{10}{3})$, $(\frac{10}{3}, 4)$ 内分别有唯一实数根, 而在区间 $(0, 3)$, $(4, +\infty)$ 内没有实数根,

存在唯一的自然数 $m=3$, 使得方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$

在区间 $(m, m+1)$ 内有且只有两个不同的实数根.

点评 本小题主要考查函数的单调性、极值、最值等基本知识, 考查运用导数研究函数的性质的方法, 考查函数与方程、数形结合等数学思想方法和分析问题、解决问题的能力.

【考题 3】 设平面内两向量 a 与 b 互相垂直, 且 $|a| = 2$, $|b| = 1$, 又 k 与 t 是两个不同时为 0 的实数.

(1) 若 $x = a + (t^2 - 3)b$ 与 $y = -ka + tb$ 垂直, 求 k 关于 t 的函数关系式 $k = f(t)$;

(2) 试确定 $k = f(t)$ 的单调区间.

解: (1) 由题意, $a \perp b$, $a \cdot b = 0$. 又 $x \perp y$,

$x \cdot y = 0$, 即 $[a + (t^2 - 3)b] \cdot (-ka + tb) = 0$.

$-ka^2 + [t - k(t^2 - 3)]a \cdot b + t(t^2 - 3)b^2 = 0$.

由于 $a^2 = |a|^2 = 4$, $b^2 = |b|^2 = 1$,

$4k = t(t^2 - 3)$, 即 $k = \frac{1}{4}t(t^2 - 3) = \frac{1}{4}(t^3 - 3t)$.

(2) 设 $t_1 < t_2$, 则 $f(t_1) - f(t_2) = \frac{1}{4}[(t_1^3 - t_2^3) - 3(t_1 - t_2)] = \frac{1}{4}(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 - 3)$.

① 当 $t_1 < t_2 \leq -1$ 时, $t_1t_2 > 1$, $t_1^2 > 1$, $t_2^2 \geq 1$, 即 $t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 - 3 > 0$, 而 $t_1 - t_2 < 0$, 故 $f(t_1) < f(t_2)$, 即 $(-\infty, -1]$ 为 $k = f(t)$ 的单调增区间.

② 当 $-1 \leq t_1 < t_2$ 时, $t_1t_2 > 1$, $t_1^2 \geq 1$, $t_2^2 > 1$, 即 $t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 - 3 > 0$, 而 $t_1 - t_2 < 0$, 故 $f(t_1) < f(t_2)$, 即 $[1, +\infty)$ 为 $k = f(t)$ 的单调增区间.

③ 当 $-1 < t_1 < t_2 < 1$ 时, $t_1^2 < 1$, $t_2^2 < 1$, $t_1t_2 < 1$, 则 $t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 - 3 < 0$, 而 $t_1 - t_2 < 0$, $f(t_1) > f(t_2)$, 即 $(-1, 1)$ 为 $k = f(t)$ 的单调减区间.

综合①②③, 知 $k = f(t)$ 的单调减区间为 $(-1, 1)$, 单调增区间为 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

链接·思考

此题(2)若用导数解又怎样? 你又得到什么启示?

另解: (2) 由(1)知 $k = f(t) = \frac{1}{4}(t^3 - 3t)$,

则 $f'(t) = \frac{3}{4}(t^2 - 1)$.

令 $f'(t) = 0$, 得 $t = \pm 1$. 当 $t < -1$ 时, $f'(t) > 0$;

当 $-1 < t < 1$ 时, $f'(t) < 0$; 当 $t > 1$ 时, $f'(t) > 0$.

故 $f(t)$ 的增区间为 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, 减区间为 $(-1, 1)$.

点评: (1) 两向量 x, y 垂直的充要条件为 $x \cdot y = 0$, 通过此式和已知条件求出函数的解析式, 在函数和向量知识交汇处出题, 设计新颖, 此类问题应引起我们足够的重视.

(2) 求解和证明函数的单调区间(性), 通常利用函数单调性的定义去解决. 本题也可先求 $[0, +\infty)$ 内的单调区间, 可利用函数是奇函数来解决.

(3) 如何找到分类的标准为 ± 1 , 通常是令 $t_1 = t_2 = t$, 由不等式 $3t^2 - 3 \geq 0$ (或 ≤ 0) 得到.

(4) 导数的应用之一是用来研究函数的单调性. 此题用导数处理, 显得轻松便捷.

【考题 4】 2006 湖南高考, 理 20 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 [含污物体的清洁度定义为 $1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$] 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗;

方案乙: 分两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a ($1 \leq a \leq 3$). 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}$ ($x > a-1$), 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$, 其中 c ($0.8 < c$

<0.99) 是该物体初次清洗后的清洁度.

(1) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;

(2) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 可使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

解: (1) 设方案甲与方案乙的用水量分别为 x 与 z , 由题设有 $\frac{x+0.8}{x+1}=0.99$. 解得 $x=19$.

由 $c=0.95$ 得方案乙初次用水量为 3, 第二次用水量

y 满足方程 $\frac{y+0.95a}{y+a}=0.99$, 解得 $y=4a$, 故 $z=4a+3$,

即两种方案的用水量分别为 19 与 $4a+3$.

因为当 $1 \leq a \leq 3$ 时, $x-z=4(4-a)>0$, 即 $x>z$, 故方案乙的用水量较少.

(2) 设初次与第二次清洗的用水量分别为 x 与 y , 类似 (1) 得 $x=\frac{5c-4}{5(1-c)}$, $y=a(99-100c)$. (*)

$$\begin{aligned} \text{于是 } x+y &= \frac{5c-4}{5(1-c)} + a(99-100c) \\ &= \frac{1}{5(1-c)} + 100a(1-c) - a - 1. \end{aligned}$$

当 a 为定值时, $x+y$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{5(1-c)} \times 100a(1-c)} - a - 1 = -a + 4\sqrt{5a} -$$

1.

当且仅当 $\frac{1}{5(1-c)} = 100a(1-c)$ 时等号成立, 此时

$$c = 1 + \frac{1}{10\sqrt{5a}} \quad (\text{不合题意, 舍去}),$$

$$\text{或 } c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}} \in (0.8, 0.99).$$

将 $c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}}$ 代入 (*) 式得 $x = 2\sqrt{5a} - 1 >$

$$a - 1, y = 2\sqrt{5a} - a.$$

故 $c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}}$ 时总用水量最少, 此时第一次与

第二次用水量分别为 $2\sqrt{5a} - 1$ 与 $2\sqrt{5a} - a$, 最少总用水量 $T(a) = -a + 4\sqrt{5a} - 1$.

当 $1 \leq a \leq 3$ 时, $T'(a) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a}} - 1 > 0$, 故 $T(a)$ 是增函

数 (也可以用二次函数的单调性判断). 这说明, 随着 a 的值的增加, 最少总用水量增加.

点评 主要考查函数的应用, 函数的最值; 考查分类讨论的思想, 均值不等式, 运算能力, 逻辑思维能力, 化归转化意识.

一、选择题

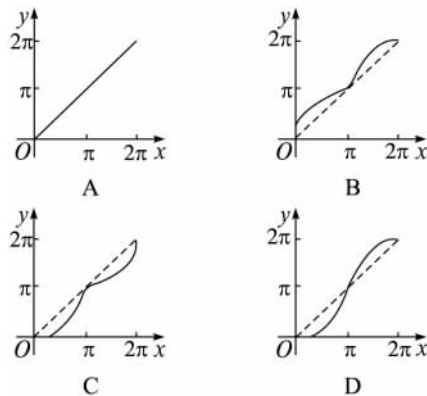
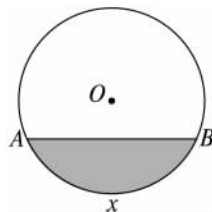
1. 2006 湖南高考, 理 4 “ $a=1$ ”是“函数 $f(x) = |x-a|$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 2005 天津高考, 理 9 设 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a>1$) 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$
B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$
C. $(\frac{a^2-1}{2a}, a)$
D. $[a, +\infty)$

3. 2006 重庆高考, 理 9 如图所示, 单位圆中弧 $\widehat{AB}$ 的长为 x , $f(x)$ 表示弧 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍, 则函数 $y=f(x)$ 的图象是 ()



4. 方程 $\log_2(x+4) = 3^x$ 的实根的个数是 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

二、填空题

5. 定义运算 $a * b = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 则 $1 * 2^x$ 的取值范围是

6. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若函数 $y = f(x+1)$ 是偶函数, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 2005 北京高考, 13 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), 有如下结论:

- ① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;
② $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;
③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$;
④ $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

当 $f(x) = \lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是

3. 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = f(x)$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数 $f(x) = 3^x - 1$, 则 $f(\log_{\frac{1}{3}} 36)$ 等于..... ()

A. $-\frac{1}{3}$ B. $-\frac{7}{3}$
C. $-\frac{10}{3}$ D. $-\frac{35}{36}$

4. 2006 辽宁高考, 文 3 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的任意函数, 下列叙述正确的是..... ()

A. $f(x)f(-x)$ 是奇函数
B. $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
C. $f(x) + f(-x)$ 是偶函数
D. $f(x) - f(-x)$ 是偶函数

5. 2006 陕西高考, 理 10 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($0 < a < 3$), 若 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 1 - a$, 则..... ()

A. $f(x_1) > f(x_2)$
B. $f(x_1) < f(x_2)$
C. $f(x_1) = f(x_2)$
D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

6. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数, $A(0, -2)$ 、 $B(-3, 2)$ 是图象上的两点, 那么不等式 $|f(x-2)| > 2$ 的解集是... ()

A. $(-1, 2)$
B. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
D. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

7. 2006 全国高考卷 I, 理 2 已知函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则..... ()

A. $f(2x) = e^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$)
B. $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x$ ($x > 0$)
C. $f(2x) = 2e^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$)
D. $f(2x) = \ln x + \ln 2$ ($x > 0$)

8. 2006 北京高考, 理 6 在下列四个函数中, 满足性质: “对于区间 $(1, 2)$ 上的任意 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ 恒成立”的只有..... ()

A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = |x|$
C. $f(x) = 2^x$ D. $f(x) = x^2$

9. 某种电热水器的水箱盛满水是 200 升, 加热到一定温度可浴用, 浴用时, 已知每分钟放水 34 升, 在放水的同时注水, t 分钟注水 $2t^2$ 升, 当水箱内水量达到最小值时, 放水自动停止. 现假定每人洗浴用水 65 升, 则该热水器一次至多可供..... ()

A. 3 人洗澡 B. 4 人洗澡
C. 5 人洗澡 D. 6 人洗澡

10. 2006 天津高考, 理 10 已知函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 记 g

$(x) = f(x) [f(x) + f(2) - 1]$. 若 $y = g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$

上是增函数, 则实数 a 的取值范围是..... ()

A. $[2, +\infty)$ B. $(0, 1) \cup (1, 2)$
C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

第 II 卷 (非选择题 共 100 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把正确答案填在题中横线上)

11. 2006 上海高考, 文 11 若曲线 $|y| = 2^x + 1$ 与直线 $y = b$ 没有公共点, 则 b 的取值范围是.....

12. 已知定义集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 定义集合 A, B 之间的运算 “ $*$ ” $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 则集合 $A * B$ 中最大的元素是..... 集合 $A * B$ 的所有子集的个数为.....

13. 在工程技术中, 常用到双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双

曲线余弦函数 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. 其实双曲正弦函数和双曲

余弦函数与我们学过的正弦函数和余弦函数相类似, 比如关于正、余弦函数有 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ 成立, 而关于双曲正、余弦函数满足 $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, 请你类比此关系式, 写出关于 $\operatorname{sh}(x+y)$ 的一个正确式子:.....

14. 已知函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x) = 2^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 令 $h(x) = f(1 - |x|)$, 则关于函数 $h(x)$ 有下列命题:

① $h(x)$ 的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称;
② $h(x)$ 的图象关于 y 轴对称;
③ $h(x)$ 的最小值为 0;
④ $h(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递增.

其中正确的命题是..... (把正确命题的序号都填上)

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15. (本小题满分 12 分) 已知 $p: x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根, $q: 4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根, 若 $p \cup q$ 为真, $p \cap q$ 为假, 求 m 的取值范围.

16. (本小题满分 12 分) 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域是 A, $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a < 1$) 的定义域为 B.
- (1) 求集合 A;
 - (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

17. (本小题满分 14 分) 2006 安徽高考,理 20 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 对任何实数 $a > 0$ 和任何实数 x , 都有 $f(ax) = af(x)$,
- (1) 证明 $f(0) = 0$;
 - (2) 证明 $f(x) = \begin{cases} kx, & x \geq 0, \\ hx, & x < 0, \end{cases}$ 其中 k 和 h 均为常数;
 - (3) 当 (2) 中的 $k > 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{1}{f(x)} + f(x)$ ($x > 0$), 讨论 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性并求极值.

18. (本小题满分 14 分) 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 是奇函数.
- (1) 求 a、b 的值;
 - (2) 若对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

19. (本小题满分 14 分) 已知 $f(x) = \ln x$.
- (1) 求函数 $g(x) = f(x+1) - x$ 的最大值;
 - (2) 当 $0 < a < b$ 时, 求证 $f(b) - f(a) > \frac{2a(b-a)}{a^2 + b^2}$.

20. (本小题满分 14 分) 2006 陕西高考,理 22 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, 且存在 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 使 $f(x_0) = x_0$.
- (1) 证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调增函数;
 - (2) 设 $x_1 = 0, x_{n+1} = f(x_n)$,
 $y_1 = \frac{1}{2}, y_{n+1} = f(y_n)$, 其中 $n = 1, 2, \dots$,
 证明 $x_n < x_{n+1} < x_0 < y_{n+1} < y_n$;
 - (3) 证明 $\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} < \frac{1}{2}$.