



第一部分 专题备考

Contents

专题一 函数的性质及其应用	2
§ 1.1 函数的性质	3
§ 1.2 函数的图象	11
§ 1.3 函数的综合问题及应用	17
专题二 数列	24
§ 2.1 数列的基本运算和性质	25
§ 2.2 数列的综合运用	32
专题三 三角函数	39
§ 3.1 三角函数的图象与性质	40
§ 3.2 三角函数的综合应用	45
专题四 平面向量	51
§ 4.1 向量的运算、数量积	51
§ 4.2 平面向量的应用	57
专题五 不等式	62
§ 5.1 不等式的证明	63
§ 5.2 不等式的解法	67
§ 5.3 不等式的应用	71
专题六 直线与圆锥曲线	76
§ 6.1 直线与圆	77
§ 6.2 直线与圆锥曲线的位置关系	83
§ 6.3 解析几何的综合问题	90
专题七 直线、平面、简单几何体	96
§ 7.1 直线与平面的位置关系	97
§ 7.2 空间角与距离的计算 (A)	104
§ 7.3 空间向量及其应用 (B)	111
§ 7.4 简单多面体与球	118
专题八 排列、组合和概率	123
§ 8.1 排列、组合与二项式定理	123
§ 8.2 概率与统计	129

Contents

专题九 导数及其应用	134
§ 9.1 导数及其应用	134
专题十 函数与方程思想	140
§ 10.1 函数思想与方程思想	141
§ 10.2 函数与方程的转化思想及应用	146
专题十一 变换与转化思想	152
§ 11.1 变换、转化的主要策略	152
§ 11.2 变换、转化的方法及依据	157
专题十二 数形结合思想	162
§ 12.1 方程、函数中数形结合问题	163
§ 12.2 不等式、解析几何中的数形结合	168
专题十三 分类讨论的思想	173
§ 13.1 分类讨论的原则与方法	173
§ 13.2 分类讨论的重要题型	178



第二部分 考能提升

Contents

一、应试策略	184
二、模拟冲刺	187
模拟试题(一)	187
模拟试题(二)	190
参考答案	193



MATH

专题一 函数的性质及其应用



一、高考命题趋势

函数是高考的核心内容,特别是新教材中“导数”和“向量”知识的涉入,拓宽了高考对函数问题的命题空间,因此,函数成为了高考的重点和热点.近年来高考卷中涉及函数的试题分值也在逐渐增加,比如,2006年三套全国卷中相关的分值分别在30~40分之间,占每份试卷总分的20%~27%.因此,我们把今后高考的命题新走向概括为以下四点:

(1)在基础中考能力.高考命题是以函数的概念、最值、奇偶性、单调性、周期性、图象特征、二次函数、指数函数、对数函数等基础知识作为载体,考查运用函数与方程、变换与转化、分类讨论、数形结合等数学思想解决问题的能力.以基础考能力的主要题型是选择题和填空题.

(2)在综合中考能力.我们要明确高考命题的主干知识的主要交汇点,即函数与方程、三角、不等式的综合,函数与导数、向量的综合,函数与数列的综合等.

(3)在应用中考能力.高考注重考查贴近生活、有社会意义和时代意义的应用题,在应用题中主要考查阅读能力、应用能力和探究能力.

(4)在研究性课题中考能力.高考命题逐年加大命制新型题的力度,在新型题中考查探究能力.这些新型题包括:应用题、开放题、探究题等,综合考查数学思想的应用能力以及代数推理能力.

二、备考要点

(1)有关抽象函数试题,在高考中久热不冷,我们要加强应用函数概念来思考问题的习惯,以增强逻辑思维能力和提高抽象思维水平来应对,重点培养运用联系和转化的思想解题的能力.

(2)有关函数单调性试题,应熟练掌握二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数,以及形如 $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的函数等一些常见函数的性质,归纳提炼函数性质的应用规律,注意导数在研究函数单调性方面的重要作用.分段函数是考查的重点,重点培养运用分类讨论的思想解题的能力.

(3)有关函数的奇偶性是考纲新增加内容,会用定义判断函数的奇偶性,会应用其解决一些简单问题,特别是函数图象、解析式等方面的简单应用.

(4)有关函数图象的试题,多考虑平移变换、伸缩变换、对称变换等性质,培养运用数形结合思想解题的能力.

(5)有关反函数的试题,加强对函数与反函数定义的理解,结合定义域、值域、函数图象等关系,将问题转化为与原函数有关的问题来解决.

(6)有关指数函数和对数函数试题,熟练掌握它们的性质、图象以及变形,结合运算推理来解决.

(7)有关函数应用题的试题,也是高考的热点之一,在综合训练中要加大训练力度.

总之,数学思想方法是知识综合的统帅和纽带,是综合能力的中心,因此在总复习中要自觉地、尽早地自我领悟、自我总结思想方法.

真题索引

2006 年全国卷 I :理 2,文 3
2006 年全国卷 II :理 20
2006 年天津卷:文 10
2006 年天津卷:理 9,10
2006 年上海春:21
2006 年重庆卷:理 9,21
2006 年安徽卷:理 20
2006 年湖南卷:理 4,文 5
2005 年全国卷 I :文 19
2005 年江苏卷:22
2005 年广东卷:19
2005 年上海卷:文 22
2005 年重庆卷:3
2005 年福建卷:12
2005 年湖北卷:17

§ 1.1 函数的性质



主干知识

1 函数的概念

函数是一种特殊的映射 $f: A \rightarrow B$, 必须满足: A, B 都是非空数集; 集合 A 中的每个元素都有象 (其象的集合是 B 的子集).

2 构成函数的三个要素: 定义域、值域、对应法则 (解析式)

其中最重要的两个独立要素是定义域和对应法则, 值域是由定义域和对应法则确定的. 两个函数当且仅当定义域和对应法则都相同时, 才是相同的函数, 也可以利用图象来判断.

(1) 能使函数式有意义的实数 x 的集合称为函数的定义域.

确定函数定义域时, 常从以下几个方面考虑:

- ① 分式的分母不等于 0;
- ② 偶次根式被开方式大于等于 0;
- ③ 对数式的真数大于零, 底数大于 1 且不等于 1;
- ④ 指数函数和对数函数的底数必须大于 0 且不等于 1;

⑤ 三角函数中的正切函数 $y = \tan x (x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$, 余切函数 $y = \cot x (x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$;

⑥ 如果函数是由实际意义确定的解析式, 应根据自变量的实际意义确定其取值范围.

(2) 函数的值域

在函数 $y = f(x)$ 中, 与自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域.

确定函数的值域的原则:

- ① 当函数 $y = f(x)$ 用表格给出时, 函数的值域是指表格中实数 y 的集合;
- ② 当函数 $y = f(x)$ 用图象给出时, 函数的值域是指图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合;
- ③ 当函数 $y = f(x)$ 用解析式给出时, 函数的值域由函数的定义域及其对应法则唯一确定;
- ④ 当函数由实际问题给出时, 函数的值域由问题的实际意义确定.



典题链接

【例 1】2006 重庆高考, 理 21 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足

$$f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x.$$

- (1) 若 $f(2) = 3$, 求 $f(1)$; 又若 $f(0) = a$, 求 $f(a)$.
- (2) 设有且仅有一个实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

解: (1) 因为对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x$,

$$\text{所以 } f(f(2) - 2^2 + 2) = f(2) - 2^2 + 2.$$

$$\text{又由 } f(2) = 3, \text{ 得 } f(3 - 2^2 + 2) = 3 - 2^2 + 2, \text{ 即 } f(1) = 1.$$

$$\text{若 } f(0) = a, \text{ 则 } f(a - 0^2 + 0) = a - 0^2 + 0, \text{ 即 } f(a) = a.$$

$$(2) \text{ 因为对任意 } x \in \mathbb{R}, \text{ 有 } f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x,$$

$$\text{又因为有且只有一个实数 } x_0, \text{ 使得 } f(x_0) = x_0,$$

$$\text{所以对任意 } x \in \mathbb{R}, \text{ 有 } f(x) - x^2 + x = x_0.$$

$$\text{在上式中令 } x = x_0, \text{ 有 } f(x_0) - x_0^2 + x_0 = x_0,$$

$$\text{又因为 } f(x_0) = x_0, \text{ 所以 } x_0 - x_0^2 = 0, \text{ 故 } x_0 = 0 \text{ 或 } x_0 = 1.$$

$$\text{若 } x_0 = 0, \text{ 则 } f(x) - x^2 + x = 0,$$

$$\text{即 } f(x) = x^2 - x.$$

$$\text{但方程 } x^2 - x = x \text{ 有两个不同实根, 与题设条件矛盾, 故 } x_0 \neq 0.$$

$$\text{若 } x_0 = 1, \text{ 则有 } f(x) - x^2 + x = 1, \text{ 即 } f(x) = x^2 - x + 1.$$

易验证该函数满足题设条件,

$$\text{综上, 所求函数为 } f(x) = x^2 - x + 1 (x \in \mathbb{R}).$$

【例 2】2005 上海高考, 文 22 对定义域分别是 D_f, D_g 的函数 $y = f(x),$

$y = g(x)$, 规定:

$$\text{函数 } h(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & \text{当 } x \in D_f, \text{ 且 } x \in D_g, \\ f(x), & \text{当 } x \in D_f, \text{ 且 } x \notin D_g, \\ g(x), & \text{当 } x \notin D_f, \text{ 且 } x \in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x) = -2x + 3, x \geq 1, g(x) = x - 2, x \in \mathbb{R}$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的最大值;

(3) 若 $g(x) = f(x + a)$, 其中 a 是常数, 且 $a \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $y = f(x)$ 及一个 a 的值, 使得 $h(x) = \cos 2x$, 并予以证明.

$$(1) \text{ 解: } h(x) = \begin{cases} (-2x+3)(x-2), & x \in [1, +\infty), \\ x-2, & x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$$(2) \text{ 解: 当 } x \geq 1 \text{ 时, } h(x) = (-2x+3)(x-2) = -2x^2 + 7x - 6 = -2(x - \frac{7}{4})^2 + \frac{1}{8}.$$

$$\therefore h(x) \leq \frac{1}{8}. \text{ 当 } x < 1 \text{ 时, } h(x) < -1,$$

$$\therefore \text{ 当 } x = \frac{7}{4} \text{ 时, } h(x) \text{ 取得最大值是 } \frac{1}{8}.$$

3 函数的三种表示方法——列表法、解析法、图象法

若函数在其定义域的不同子集上,对应的法则分别不同或用几个不同的式子表示,这种形式的函数叫做分段函数.分段函数是一个函数而不是几个函数,其值域是各段的并集.

4 复合函数的概念

若 y 是 u 的函数, u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$, $u=g(x)$, $u \in (m,n)$, $x \in (a,b)$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$ 叫做 f 和 g 的复合函数, u 叫做中间变量, u 的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

5 反函数的概念

$y=f(x)$ 的定义域为 A ,它有反函数必须满足: A 中的每一个 x 与其函数值的对应是“一一对应”,不允许两个(或多个) x 有同一个函数值.如函数 $y=x^2$ 是没有反函数的.

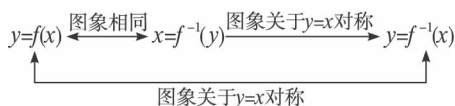
(1)求一个函数 $y=f(x)$ ($x \in A$) 的反函数的一般步骤:先求出 $y=f(x)$ 的值域;再由 $y=f(x)$ 求出 $x=f^{-1}(y)$;将 x,y 的位置互换得到 $y=f^{-1}(x)$;确定函数的定义域(即原函数的值域),并注明.

(2)反函数的定义域是原函数的值域,必须通过原函数的值域得到.

(3) $f^{-1}(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$,要善于利用它进行转化运算,降低计算的复杂程度.

(4)分段函数的反函数求法是先分段求解,再合并写成一个函数的形式.

(5)图象关系:



6 函数的奇偶性

(1)判断函数的奇偶性,必须严格依照函数的奇偶性定义进行,为了便于判断,常应用定义的等价形式: $f(-x)=\pm f(x) \Leftrightarrow f(-x) \pm f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ ($f(x) \neq 0$),即定义的互逆性进行判断.

(2)奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称,反之亦真,因此也可以利用函数的图象的对称性去判断函数的奇偶性.

(3)奇函数、偶函数的定义域关于原点对称,即函数的奇偶性与区间密切相关.如 $y=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上是偶函数,但在区间 $[-1,2]$ 上却无奇偶性可言,可见函数奇偶性是函数的整体性质,

(3)解法一:令 $f(x)=\sin x+\cos x$, $a=\frac{\pi}{2}$,

则 $g(x)=f(x+a)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x+\frac{\pi}{2})$

$=\cos x-\sin x$,

于是 $h(x)=f(x) \cdot f(x+a)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=\cos 2x$.

解法二:令 $f(x)=1+\sqrt{2}\sin x$, $a=\pi$,

则 $g(x)=f(x+a)=1+\sqrt{2}\sin(x+\pi)=1-\sqrt{2}\sin x$,

于是 $h(x)=f(x) \cdot f(x+a)$

$=(1+\sqrt{2}\sin x)(1-\sqrt{2}\sin x)=1-2\sin^2 x=\cos 2x$.

评述:本题主要考查分段函数、函数的最值、三角等知识,配方法求最值,倍角公式应用以及运用构造法解题的能力.

【例3】2006 山东潍坊一模,20 单调函数 $f(x)$ 满足 $f(ax+3)=x$,其中

$a>0$,若 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[-\frac{7}{a}, \frac{3}{a}]$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式和定义域 D ;

(2)当 $b \in D$ 时,求关于 x 的方程 $\frac{x}{b+4}=|b-1|+1$ 的根的取值范围.

解:(1)设 $ax+3=t$,则 $x=\frac{t-3}{a}$,

$\therefore f(ax+3)=x(a>0)$, $\therefore f(t)=\frac{t-3}{a}$,则 $f(x)=\frac{x-3}{a}$.

$\therefore f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[-\frac{7}{a}, \frac{3}{a}]$,

$\therefore f(x) \in [-\frac{7}{a}, \frac{3}{a}]$,

即 $-\frac{7}{a} \leq \frac{x-3}{a} \leq \frac{3}{a}$. $\therefore -4 \leq x \leq 6$.

$\therefore f(x)$ 的定义域 D 为 $[-4, 6]$.

(2) $\because b \in D$,即 $b \in [-4, 6]$,易知 $b \neq -4$.

由 $\frac{x}{b+4}=|b-1|+1$ 得

$x=(b+4)(|b-1|+1)$,

$\therefore$ ①当 $1 \leq b \leq 6$ 时, $x=(b+4)b=b^2+4b$.

$\therefore 1 \leq b \leq 6$, $\therefore x \in [5, 60]$.

②当 $-4 < b < 1$ 时, $x=(b+4)(2-b)=-(b+1)^2+9$.

$\therefore -4 < b < 1$, $\therefore x \in (0, 9]$.

综上,方程的根的取值范围是 $(0, 60]$.

【例4】2005 重庆高考,3 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数,且 $f(2)=0$,则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 2)$

解析: $\because f(2)=0$ 且 $f(x)$ 为偶函数,

又偶函数图象关于 y 轴对称, $\therefore f(-2)=0$.

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, 0]$ 上递减.

$\therefore$ 对于 $x \in (-2, 0]$ 必有 $f(x)<0$.

由对称性得对于 $x \in [0, 2]$ 必有 $f(x)<0$,

$\therefore$ 使得 $f(x)<0$ 的范围是 $(-2, 2)$. 故选 D.

一点不满足就不能判断是奇函数或偶函数,在数轴上凡对应的区间关于原点对称,只是函数为奇函数或偶函数的必要条件而已.

(4) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a, a]$ ($a > 0$), 则“ $f(0) = 0$ ”是 $f(x)$ 为奇函数的必要而不充分条件; 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a, 0) \cup (0, a]$ ($a > 0$), 则“ $f(x) = 0$ ”既不是 $f(x)$ 为奇函数的充分条件, 也不是必要条件.

(5) 偶函数的一条性质: $f(-x) = f(x) = f(|x|) = f(-|x|)$, 灵活运用该性质解决与偶函数有关问题, 可简化运算, 避免分类讨论.

(6) 在公共定义域上, 两个奇函数(或偶函数)的和、差仍为奇函数(偶函数), 两个奇函数(偶函数)的积、商为偶函数.

(7) 函数 $f(x)$ 与函数 $af(x)$ 、 $\frac{c}{f(x)}$ ($c \neq 0$) 有相同的奇偶性.

(8) 非常数函数 $f(x) = a(a \neq 0)$ 是偶函数; 常数函数 $f(x) = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

7 函数的单调性

函数的单调性是函数的又一个重要性质, 函数的单调性的定义: 给定区间 D 上的函数 $f(x)$, 若对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称其为 $f(x)$ 的单调区间. 反映在图象上, 若函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增(减)函数, 则图象在 D 上的部分从左到右是上升(下降)的.

这个定义有如下的三个等价形式:

(1) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ (< 0) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增(减)函数;

(2) $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ (< 0) $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增(减)函数;

(3) 在区间 $[a, b]$ 上有 $f'(x) > 0$ (< 0) $\Leftrightarrow f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是增(减)函数.

几何意义: 增(减)函数图象上任意两点 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$ 连线的斜率都大于(小于)0.

在利用定义证明函数的单调性时, 一般采用如下的步骤: ①在给定的区间内任意取两值 x_1, x_2 ; ②取差 $f(x_1) - f(x_2)$, 因式分解或配方; ③判断每个因子的符号, 确定差的符号; ④说明函数的单调性.

当然也可以利用上面介绍的三个等价形式来证明单调性. 导数法在求高次函数的单调性时较为常用.

另外在判断函数的单调性时还要注意如

答案: D

评述: 本题着重考查函数奇偶性与图象关系, 以及运用数形结合思想解题的能力.

【例5】2006 天津高考, 文 10 如果函数 $f(x) = a^x(a^x - 3a^2 - 1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 那么实数 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{2}{3}]$

B. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$

C. $(1, \sqrt{3}]$

D. $[\frac{3}{2}, +\infty)$

解法一: 令 $t = a^x$, $\therefore x \in [0, +\infty)$, $\therefore h(t) = t^2 - (3a^2 + 1)t$.

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $t = a^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上为减函数, 且 $t \in (0, 1]$.

而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore h(t)$ 在 $(0, 1]$ 上应为减函数.

又 $\therefore h(t)$ 的对称轴为 $\frac{3a^2 + 1}{2}$,

$\therefore \frac{3a^2 + 1}{2} \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq a < 1$.

(2) 当 $a > 1$ 时, $t = a^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $t \in [1, +\infty)$.

而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上也为增函数,

$\therefore h(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上应为增函数.

又 $\therefore h(t)$ 的对称轴为 $\frac{3a^2 + 1}{2}$,

$\therefore \frac{3a^2 + 1}{2} \leq 1 \Rightarrow 0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

这与 $a > 1$ 矛盾, 舍去.

$\therefore a$ 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

评述: 本题亦可用估算法, 求解如下:

解法二: $\therefore 0, 1 \in [0, +\infty)$ 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore$ 必有 $f(0) < f(1)$, 即 $a(3a^2 - 4a + 1) < 0$.

$\therefore a > 0$, $\therefore 3a^2 - 4a + 1 < 0$.

$\therefore \frac{1}{3} < a < 1$.

根据这个大致范围可排除 A、C、D.

答案: B

【例6】2006 山东潍坊二模, 18 已知奇函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + mx, & x < 0. \end{cases}$

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, |a| - 2]$ 上单调递增, 试确定实数 a 的取值范围.

解: (1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

$\therefore f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) = -x^2 - 2x$.

又 $\therefore f(x)$ 是奇函数,

$\therefore f(-x) = -f(x) = -x^2 - 2x$, 即 $f(x) = x^2 + 2x$.

$\therefore m = 2$.

(2) 由题意知, 要使函数 $f(x)$ 在 $[-1, |a| - 2]$ 上单调递增, 则有

下几个问题:

①奇函数在对称的两个区间上有相同的单调性,偶函数在对称的两个区间上有相反的单调性;

②互为反函数的两个函数有相同的单调性;

③如果 $f(x)$ 在区间 D 上是增(减)函数,那么 $f(x)$ 在区间 D 的任一子区间上也是增(减)函数;

④如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 单调性相同,那么 $y=f[g(x)]$ 是增函数,如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 单调性相反,那么 $y=f[g(x)]$ 是减函数.

在研究函数的单调性时常需要先将函数化简,转化为讨论一些熟知的单调性,因此掌握并熟记常用的一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、三角函数等函数的单调性,将大大缩短判断函数的单调性的过程.

8 函数的周期性

(1)周期的定义:

设函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 如果存在非零常数 T 使得任何 $x \in D$, 都有 $f(x+T)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $y=f(x)$ 的一个周期.

(2)周期的性质:

如果总有 $f(x+a)=f(x)$ 成立, 则函数是周期函数, 且它的一个周期为 $T=a$;

如果总有 $f(x-a)=f(x+a)$ 成立, 则函数是周期函数, 且 $T=2a$ 是它的一个周期.

(3)熟记常见的三角函数的周期性, 如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$) 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;

$y=|A\sin(\omega x+\varphi)|$ ($\omega>0$) 和 $y=A\sin^2(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$) 的周期为 $T=\frac{\pi}{\omega}$;

$y=\tan(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$) 的周期为 $T=\frac{\pi}{\omega}$;
 $y=|\tan(\omega x+\varphi)|$ ($\omega>0$) 的周期为 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

在求有关三角函数的周期时, 通常要先把三角函数式化简成为仅含有一个三角函数的形式, 然后再求其周期性, 在给出一般函数时也可以借助已知条件进行代数恒等变形来达到求解函数的目的.

函数的周期性往往并不是单独考查, 经常会和单调性、奇偶性、最值等问题以综合命题的形式出现, 应用时要力求把它们之间的相互影响的关系理清楚, 逐步分解转化, 正确求解.

$$\begin{cases} |a|-2>-1, \\ |a|-2\leq 1, \end{cases} \text{ 即 } 1<|a|\leq 3. \\ \therefore -3\leq a<-1 \text{ 或 } 1<a\leq 3.$$

评述: (1)求关于原点对称区间的函数解析式的题目的求解思路是:

①在哪个区间上求解析式, x 就设在哪个区间里; ②然后利用已知区间的解析式进行代入; ③利用 $f(x)$ 的奇偶性把 $f(-x)$ 写成 $-f(x)$ 或 $f(x)$, 从而解出 $f(x)$.

(2)对于(2)问, 可结合分段函数的图象确定 $|a|-2$ 的范围.

【例7】2005 广东高考, 19 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$, $f(7-x)=f(7+x)$, 且在闭区间 $[0, 7]$ 上, 只有 $f(1)=f(3)=0$.

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2\ 005, 2\ 005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

解: (1)由 $f(2-x)=f(2+x)$ 得函数 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=2$,

$$\therefore f(-1)=f(5).$$

而 $f(5)\neq 0 \Rightarrow f(1)\neq f(-1)$, 即 $f(x)$ 不是偶函数.

$$\text{又} \because f(x) \text{ 在 } [0, 7] \text{ 上只有 } f(1)=f(3)=0,$$

$$\therefore f(0)\neq 0.$$

从而知函数 $y=f(x)$ 不是奇函数.

故函数 $y=f(x)$ 是非奇非偶函数.

$$(2) \begin{cases} f(2-x)=f(2+x) \\ f(7-x)=f(7+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=f(4-x) \\ f(x)=f(14-x) \end{cases} \Rightarrow f(4-x)=$$

$f(14-x) \Rightarrow f(x)=f(x+10)$. 从而知函数 $y=f(x)$ 的周期为 $T=10$.

$$\text{又 } f(3)=f(1)=0,$$

$$\therefore f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0.$$

故 $f(x)$ 在 $[0, 10]$ 和 $[-10, 0]$ 上均有 2 个根, 从而可知函数 $y=f(x)$ 在 $[0, 2\ 000]$ 上有 400 个根, 在 $[2\ 000, 2\ 005]$ 上有 2 个根, 在 $[-2\ 000, 0]$ 上有 400 个根, 在 $[-2\ 005, -2\ 000]$ 上没有根.

所以函数 $y=f(x)$ 在 $[-2\ 005, 2\ 005]$ 上有 802 个根.

评述: 本题考查抽象函数的奇偶性、周期性等函数性质, 利用周期性求方程根的个数. 对抽象函数问题的考查在近几年高考中有逐年增加数量的趋势. 解题的关键是: 合理赋值, 化抽象为具体, 由此探究函数的性质.

【例8】2005 福建高考, 12 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2)=0$, 则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析: $\because f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且为奇函数, 又奇函数图象关于原点对称,

$$\therefore f(0)=0.$$

又 $f(x)$ 周期为 3, 且 $f(2)=0$,

$$\therefore f(2)=f(-1)=-f(1), f(2)=-f(-2), f(-2)=f(1)=f(4), f(2)=f(5).$$

$$\therefore f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0.$$

答案: D

评述: 本题主要考查抽象函数的奇偶性、周期性等知识, 以及运用函数与方程的思想解题的能力.



疑难突破

1 求函数值域的方法

没有通用的解法,只能依据函数解析式的结构特征来确定相应的解法,常用的方法有:

(1) 反函数法

利用函数和它的反函数的定义域与值域的互逆关系,通过求出反函数的定义域,得到原函数的值域.形如 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ ($a \neq 0$) 的函数的值域,均可使用反函数法.此外,这种类型的函数值域也可使用“分离常数法”来求解.

(2) 配方法

配方法是求“二次函数类”值域的基本法.形如 $F(x) = a[f^2(x) + bf(x) + c]$ 的函数的值域问题,均可使用配方法,借助二次函数的性质求得值域.

(3) 换元法

运用代数或三角代换,将所给函数化成值域容易确定的另一函数,从而求得原函数的值域.形如 $y = ax + b \pm \sqrt{cx+d}$ (a, b, c, d 均为常数,且 $a \neq 0$) 的函数常用此法求解.用换元法要注意两点:

①“新元”的取值范围,即换元前后的等价性,如令 $t = \sqrt{1-2x} \geq 0$,要在 t 有意义的取值范围内求解.

②换元后的可操作性,力求使用新变元代换后,能达到使问题简化,运算更简便的目的.

(4) 重要不等式

利用基本不等式: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

用此法求函数的值域时,要注意条件“一正、二定、三相等”.如:利用 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 求某些函数的值域(或最值)时应满足三个条件:① $a > 0, b > 0$; ② $a+b$ (或 ab) 为定值; ③ 取等号条件 $a=b$. 三个条件缺一不可.

(5) 利用函数的单调性

形如 $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的函数,在不能用重要不等式的情况(等号不成立)下,可考虑用函数的单调性,当 $x > 0$ 时,函数 $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的单调减区间为 $(0, \sqrt{k}]$, 单调增区间为 $[\sqrt{k}, +\infty)$. 至于 $x < 0$ 的情况,可根据函数的奇偶性加以解决.

(6) 导数法

若函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则此函数在此闭区间上有最大值和最小值.具体可先求出导数,再令导数为 0 得到极值点,然后用列表的方法考查函数在此闭区间上的导数的符号及 $f(a), f(b)$ 与极值的大小关系,确定此闭区间上函数的最值.

在处理含有参数的习题中,要根据需要确定讨论参数的划分方法,讨论的标准必须统一,不能重复和遗漏.



活学巧用

【例1】2005 江苏高考,22 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = x^2|x-a|$.

(1) 当 $a=2$ 时,求使 $f(x)=x$ 成立的 x 的集合;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值.

解:(1) 由题意, $f(x) = x^2|x-2|$,

当 $x < 2$ 时,由 $f(x) = x^2(2-x) = x$,

解得 $x=0$ 或 $x=1$;

当 $x \geq 2$ 时,由 $f(x) = x^2(x-2) = x$,

解得 $x=1+\sqrt{2}$.

综上,所求解集为 $\{0, 1, 1+\sqrt{2}\}$.

(2) 设此最小值为 m .

① 当 $a \leq 1$ 时,在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = x^3 - ax^2$.

因为 $f'(x) = 3x^2 - 2ax = 3x(x - \frac{2}{3}a) > 0$, $x \in$

$(1, 2)$, 则 $f(x)$ 是区间 $[1, 2]$ 上的增函数,

所以 $m = f(1) = 1 - a$.

② 当 $1 < a \leq 2$ 时,

在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = x^2|x-a| \geq 0$, 由 $f(a) = 0$

知 $m = f(a) = 0$.

③ 当 $a > 2$ 时,

在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = ax^2 - x^3$,

$f'(x) = 2ax - 3x^2 = 3x(\frac{2}{3}a - x)$.

若 $a \geq 3$, 在区间 $(1, 2)$ 上, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是区间 $[1, 2]$ 上的增函数,

所以 $m = f(1) = a - 1$.

若 $2 < a < 3$, 则 $1 < \frac{2}{3}a < 2$.

当 $1 < x < \frac{2}{3}a$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是区间 $[1, \frac{2}{3}a]$ 上的增函数;

当 $\frac{2}{3}a < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 是区间 $[\frac{2}{3}a, 2]$ 上的减函数.

因此, 当 $2 < a < 3$ 时, $m = f(1) = a - 1$ 或 $m = f(2) = 4(a - 2)$;

当 $2 < a \leq \frac{7}{3}$ 时, $4(a - 2) \leq a - 1$, 故 $m = f(2) = 4(a - 2)$;

当 $\frac{7}{3} < a < 3$ 时, $4(a - 2) < a - 1$, 故 $m = f(1) = a - 1$.

综上所述,所求函数的最小值

$$m = \begin{cases} 1-a, & a \leq 1, \\ 0, & 1 < a \leq 2, \\ 4(a-2), & 2 < a \leq \frac{7}{3}, \\ a-1, & a > \frac{7}{3}. \end{cases}$$

2 求函数解析式的方法

(1) 配方法和换元法

如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式,要求 $f(x)$ 的解析式时,若 $f[g(x)]$ 表达式右边易配成 $g(x)$ 的运算形式,则可用配凑法.当然,亦可用换元法求 $f(x)$ 的解析式.但要注意,无论是配凑法还是换元法,所求的函数的定义域必须满足两个条件:是函数 $t=g(x)$ 的值域且使 $f(x)$ 的解析式有意义.

(2) 待定系数法

已知函数的模型(如指数函数、二次函数等),一般的方法是设出函数的解析式,然后根据题设条件求待定系数.

(3) 综合利用函数的奇偶性或周期性来求出函数的解析式

这种类型的函数往往是分段函数,需要认真考察清楚函数的奇偶性或周期性的特征,严格利用对称区间的关系(或周期关系),通过代数变换,求相关区间上的函数的解析式,然后综合写出整个函数的解析式.如例2.

3 含有指数或对数的复合型函数以及由向量切入函数的综合问题

这是近年高考的重点考查方向.

(1) 注意指数和对数有意义时必须满足的条件.

(2) 根据指数、对数函数的图象,求其解析式与求二次函数类似,都采用待定系数法.

(3) 研究指数、对数问题时尽量化为同底.另外,对数问题中要重视定义域的限制.

(4) 要充分利用指数函数和对数函数的概念、性质讨论一些复合函数的性质,要能熟练绘出其图象,这也是“数形结合”的数学思想的体现.

(5) 对于含有参数的指数、对数问题,应用单调性时,要注意对底数进行讨论.

(6) 对于抽象函数 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 可借助对数函数理解, $f(m+n)=f(m)f(n)$ 可借助指数函数理解.

【例2】定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 有最小正周期为 2,且 $x \in$

$$(0,1) \text{ 时, } f(x) = \frac{2^x}{4^x+1}.$$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式.

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性.

(3) 当 λ 为何值时,方程 $f(x)=\lambda$ 在 $x \in [-1,1]$ 上有实数解?

解: (1) $\because f(x)$ 是 $x \in \mathbb{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$.

又 $\because 2$ 为最小正周期,

$$\therefore f(1)=f(2-1)=f(-1)=0.$$

设 $x \in (-1,0)$, 则 $-x \in (0,1)$,

$$f(-x) = \frac{2^{-x}}{4^{-x}+1} = \frac{2^x}{4^x+1} = -f(x),$$

$$\therefore f(x) = -\frac{2^x}{4^x+1}.$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{2^x}{4^x+1}, & x \in (-1,0), \\ 0, & x \in \{-1,0,1\}, \\ \frac{2^x}{4^x+1}, & x \in (0,1). \end{cases}$$

(2) 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(2^{x_1}-2^{x_2}) + (2^{x_1+2x_2}-2^{x_2+2x_1})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}$$

$$= \frac{(2^{x_1}-2^{x_2})(1-2^{x_1+x_2})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)} > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

(3) $\because f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数,

$$\therefore \frac{2^1}{4^1+1} < f(x) < \frac{2^0}{4^0+1}, \text{ 即 } f(x) \in \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

同理, $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上时,有 $f(x) \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$.

又 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$,

$\therefore$ 当 $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\lambda = 0$ 时,

$f(x)=\lambda$ 在 $[-1,1]$ 内有实数解.

【例3】2005 湖北高考,17 已知向量 $a=(x^2, x+1)$, $b=(1-x, t)$, 若函数 $f(x)=a \cdot b$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数,求 t 的取值范围.

解: 由向量数量积定义,得

$$f(x) = x^2(1-x) + t(x+1) = -x^3 + x^2 + tx + t,$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + t.$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数,

$$\therefore f'(x) \geq 0, x \in (-1,1).$$

又 $\because f'(x) = -3x^2 + 2x + t$ 的图象是开口向下的抛物线,

$\therefore$ 当且仅当 $f'(1)=t-1 \geq 0$, 且 $f'(-1)=t-5 \geq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上满足 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

$\therefore t$ 的取值范围是 $t \geq 5$.



一、选择题

- 1 2006 北京东城一模,5 若指数函数 $f(x)=a^x (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的部分对应值如下表:

x	-2	0
$f(x)$	0.592	1

则不等式 $f^{-1}(|x|)<0$ 的解集为 ()

- A. $\{x|-1<x<1\}$ B. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$
C. $\{x|0<x<1\}$ D. $\{x|-1<x<0$ 或 $0<x<1\}$

- 2 2006 全国高考卷 I,理 2 文 3 已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 ()

- A. $f(2x)=e^{2x} (x\in\mathbf{R})$ B. $f(2x)=\ln 2 \cdot \ln x (x>0)$
C. $f(2x)=2e^x (x\in\mathbf{R})$ D. $f(2x)=\ln x + \ln 2 (x>0)$

- 3 2006 四川成都二模,11 定义两种运算: $a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2}$, $a\otimes b=\sqrt{(a-b)^2}$, 则函数 $f(x)=\frac{2\oplus x}{(x\otimes 2)-2}$ 的解析式为 ()

- A. $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}, x\in[-2,0)\cup(0,2]$
B. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
C. $f(x)=-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
D. $f(x)=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}, x\in[-2,0)\cup(0,2]$

- 4 2005 黄冈模拟 已知映射 $f:A\rightarrow B$, 其中 $A=(-\infty,1], B=\mathbf{R}$, 对应法则 $f:x\rightarrow y=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\sqrt{1-x}$, 对于实数 $k\in B$, 在集合 A 中不存在原象, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k<0$ B. $k<1$
C. $k>0$ D. 以上都不对

- 5 2004 辽宁模拟 函数 $y=f(x)$ 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$, 当 $x>0$ 时, $f(x)>1$, 并且 $f(3)=4$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是减函数, 且 $f(1)=3$ B. $f(x)$ 是增函数, 且 $f(1)=3$
C. $f(x)$ 是减函数, 且 $f(1)=2$ D. $f(x)$ 是增函数, 且 $f(1)=2$

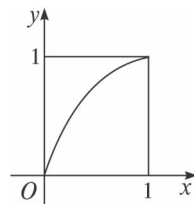
二、填空题

- 6 已知 $f(x)=a^x+a^{-x} (a>0, a\neq 1)$, 且 $f(1)=3$, 则 $f(0)+f(1)+f(2)$ 的值是 _____.

- 7 2006 山东潍坊一模,16 已知定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $y=f(x)$, 图象如图所示. 对满足 $0<x_1<x_2<1$ 的任意 x_1, x_2 , 给出下列结论:

- ① $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$; ② $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$; ③ $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

其中正确结论的序号是 _____ (把所有正确结论的序号都填上).



← 本题考查指数函数和对数函数互为反函数, 及指数函数和对数函数性质的运用, 数形结合是常用方法.

← 考查反函数的求法及复合函数.

← 新定义运算题. 考查函数的解析式及定义域的求法. 注意挖掘 x 的范围化简解析式.

← 考查映射与象的概念、复合函数的单调性.

← 考查函数单调性, 赋值法、消元法.

← 利用配方法求指数函数值.

← 考查数形结合思想、导数的几何意义、化归思想以及新课标教材中凸函数定义等.

三、解答题

8 设函数 $f(x) = \log_2(a^x - b^x)$, 且 $f(1) = 1, f(2) = \log_2 12$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值.

← 考查指数、对数的运算以及利用函数的单调性求最值. 方法: 配方法、换元法.

9 2005 重庆模拟 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)$, 当 $2 \leq x \leq 6$ 时, $f(x) =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-m|} + n, f(4) = 31.$$

(1) 求 m, n 的值;

(2) 比较 $f(\log_3 m)$ 与 $f(\log_3 n)$ 的大小.

← 函数的综合应用, 指数、对数的转化及实数大小的比较.

10 2006 全国高考卷 II, 文 21 已知 $a \in \mathbf{R}$, 二次函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$. 设不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 A , 又知集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

← 考查集合的运算、不等式的解法及充要条件知识.

11 (探究创新题) 有点难度哟!

2005 湖北八校联考 已知函数 $f(x) = \frac{x+1-a}{a-x} (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 函数 $y=f(x)$ 的图象是否是中心对称图形? 若是, 指出它的对称中心. (不需证明)
- (2) 当 $x \in [a+1, a+2]$ 时, 求证: $f(x) \in [-2, -\frac{3}{2}]$.
- (3) 我们利用函数 $y=f(x)$ 构造一个数列 $\{x_n\}$, 方法如下: 对于给定的定义域中的 x_1 , 令 $x_2=f(x_1), x_3=f(x_2), \dots, x_n=f(x_{n-1}), \dots$, 在上述构造数列的过程中, 如果 $x_i (i=2, 3, 4, \dots)$ 在定义域中, 构造数列的过程将继续下去; 如果 x_i 不在定义域中, 构造数列的过程将停止.
 - ① 如果可以用上述方法构造出一个常数列 $\{x_n\}$, 求实数 a 的取值范围;
 - ② 如果取定义域中任一值作为 x_1 , 都可以用上述方法构造出一个无穷数列 $\{x_n\}$, 求实数 a 的值.

← 考查函数对称性、函数值域的求法. (3) 问的实质是研究方程 $f(x) = x$ 有无实数解.

§ 1.2 函数的图象

主干知识

1 一次函数、二次函数

(1) 形如 $y=kx+b (k \neq 0)$, 称一次函数, 形如 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$, 称二次函数, 它们的定义域皆为 $\mathbb{R}$.

(2) 二次函数的三种形式

一般式: $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$.

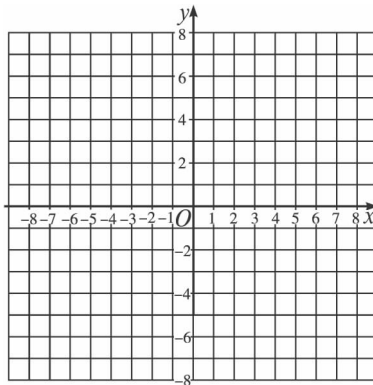
顶点式: $y=a(x-h)^2+k$, 其中 (h, k) 是抛物线的顶点坐标.

零点式: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, 其中 x_1, x_2 是抛物线与 x 轴的交点的横坐标. 这三种形式在应用时经常根据需要选择地使用会使运算更为简便.

(3) 一次函数的图象是一条直线, 斜率为 k , 在 y 轴上的截距为 b , 在考查时主要是以综合考查参数和图象位置的相互制约关系为主. 有时也会考查思维的转换能力. 例如: 求使不等式在 $x \in (-1, 1)$ 时 $3x^2+kx+3 > 0$ 恒成立的 k 的范围. 此问题直接求解比较困难, 其图象是不易确定的. 但是如果我们把它变化为 $kx + (3x^2+3) > 0$, 左边看作是关于 k 的一个主变元的一次函数形式, 通过图象特征, 就较容易转化为其等价形式: $-k + (3+3) > 0$ 且 $k + (3+3) > 0$.

典题链接

【例1】2006 上海春季高考, 21 设函数 $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$.



- (1) 在区间 $[-2, 6]$ 上画出函数 $f(x)$ 的图象;
- (2) 设集合 $A = \{x | f(x) \geq 5\}$, $B = (-\infty, -2] \cup [0, 4] \cup [6, +\infty)$, 试判断集合 A 和 B 之间的关系, 并给出证明;
- (3) 当 $k > 2$ 时, 求证: 在区间 $[-1, 5]$ 上, $y=kx+3k$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

好好学习,天天向上。——毛泽东

0, 即 $k \in (-6, 6)$.

(4) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象是一条抛物线. 经过配方, 可得 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 顶点为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$, 对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$.

其图象及主要性质如下表:

	$a > 0$ 开口向上	$a < 0$ 开口向下
图 象		
	① 函数的定义域为 $\mathbb{R}$	
	② 值域: $[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$	② 值域: $(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$
性 质	③ 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 函数有最小值, $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$	③ 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 函数有最大值, $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$
	④ 在 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 上是减函数, 在 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上是 增函数	④ 在 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 上是增函数, 在 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上是 减函数

(5) 二次函数在闭区间上的最值.

函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 在区间 $[m, n]$ 上的最值有以下两种情况 (注意是按 $a > 0$ 时讨论):

如果 $-\frac{b}{2a} \in [m, n]$, 则函数的最小值是 $f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

函数的最大值是 $\max\{f(m), f(n)\}$;

如果 $-\frac{b}{2a} \notin [m, n]$, 则函数的最小值是 $\min\{f(m), f(n)\}$.

函数的最大值是 $\max\{f(m), f(n)\}$.

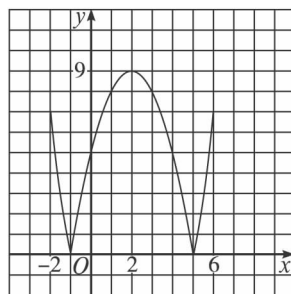
2 反比例函数

它是形如 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的函数, 其图象是分布在一、三象限 ($k > 0$) 或二、四象限的双曲线 ($k < 0$).

应用时注意两类函数图象的转化: 形如

$$y = \frac{cx + d}{ax + b} (x \neq -\frac{b}{a}), y = x + \frac{c}{x} (c \neq 0).$$

(1) 解:



(2) 解: 方程 $f(x) = 5$ 的解分别是 $2 - \sqrt{14}$, $0, 4$ 和 $2 + \sqrt{14}$. 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 和 $[2, 5]$ 上单调递减, 在 $[-1, 2]$ 和 $[5, +\infty)$ 上单调递增, 因此

$$A = (-\infty, 2 - \sqrt{14}] \cup [0, 4] \cup [2 + \sqrt{14}, +\infty).$$

由于 $2 + \sqrt{14} < 6, 2 - \sqrt{14} > -2, \therefore B \subset A$.

(3) 解法一: 当 $x \in [-1, 5]$ 时, $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

$$\text{令 } g(x) = k(x+3) - (-x^2 + 4x + 5)$$

$$= x^2 + (k-4)x + 3k-5 = (x - \frac{4-k}{2})^2 - \frac{k^2 - 20k + 36}{4},$$

$$\because k > 2, \therefore \frac{4-k}{2} < 1. \text{ 又 } -1 \leq x \leq 5,$$

$$\text{① 当 } -1 \leq \frac{4-k}{2} < 1, \text{ 即 } 2 < k \leq 6 \text{ 时, 取 } x = \frac{4-k}{2},$$

$$g(x)_{\min} = -\frac{k^2 - 20k + 36}{4} = -\frac{1}{4}[(k-10)^2 - 64].$$

$$\because 16 \leq (k-10)^2 < 64, \therefore (k-10)^2 - 64 < 0. \text{ 则 } g(x)_{\min} > 0.$$

$$\text{② 当 } \frac{4-k}{2} < -1, \text{ 即 } k > 6 \text{ 时, 取 } x = -1, g(x)_{\min} = 2k > 0.$$

由①②可知, 当 $k > 2$ 时, $g(x) > 0$ 在 $x \in [-1, 5]$ 上恒成立.

因此, 在区间 $[-1, 5]$ 上, $y = k(x+3)$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

解法二: 当 $x \in [-1, 5]$ 时, $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+3), \\ y = -x^2 + 4x + 5, \end{cases} \text{ 得 } x^2 + (k-4)x + 3k-5 = 0,$$

$$\text{令 } \Delta = (k-4)^2 - 4(3k-5) = 0, \text{ 解得 } k = 2 \text{ 或 } k = 18.$$

在区间 $[-1, 5]$ 上, 当 $k = 2$ 时, $y = 2(x+3)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象只交于一点 $(1, 8)$; 当 $k = 18$ 时, $y = 18(x+3)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象没有交点.

由于直线 $y = k(x+3)$ 过点 $(-3, 0)$, 当 $k > 2$ 时, 直线 $y = (x+3)$ 是由直线 $y = 2(x+3)$ 绕点 $(-3, 0)$ 逆时针方向旋转得到的. 因此, 在区间 $[-1, 5]$ 上, $y = k(x+3)$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

评述: 本题考查二次函数图象的画法及分段函数图象的画法、函数的综合知识, 利用数形结合思想、分类讨论思想解决问题等.

【例2】2005 杭州模拟 已知点 $P(t, y)$ 在函数 $f(x) = \frac{x}{x+1} (x \neq -1)$ 的

图象上, 且有 $t^2 - c^2at + 4c^2 = 0 (c \neq 0)$.

(1) 求证: $|ac| \geq 4$;

(2) 求证: 在 $[-1, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增;

(3) 求证: $f(|a|) + f(|c|) > 1$.

例如 $y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$.

再利用图象的变换可以确定其图象位置,其对称中心是(1,2).

3 指数函数、对数函数的图象

指数函数的图象和性质

	指数函数
定义	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$ 的常数) 叫指数函数
图象	
性质	(1) $x \in \mathbf{R}, y > 0$. (2) 图象经过(0,1)点. (3) $a > 1$, 当 $x > 0$ 时, $y > 1$, 当 $x < 0$ 时, $0 < y < 1$; $0 < a < 1$, 当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$, 当 $x < 0$ 时, $y > 1$. (4) $a > 1, y = a^x$ 为增函数, $0 < a < 1, y = a^x$ 为减函数

对数函数的图象和性质

	对数函数
定义	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$ 的常数) 叫对数函数
图象	
性质	(1) $x > 0, y \in \mathbf{R}$. (2) 图象经过(1,0)点. (3) $a > 1$, 当 $x > 1$ 时, $y > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$; $0 < a < 1$, 当 $x > 1$ 时, $y < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$. (4) $a > 1$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $y = \log_a x$ 为增函数; $0 < a < 1$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $y = \log_a x$ 为减函数

把握指数和对数函数图象,要善于对底数 a 进行讨论,一般分 $a > 1, 0 < a < 1$ 两种情况,进而确定图象的位置.

【例】2005 辽宁高考,6 若 $\log_{2a} \frac{1+a^2}{1+a} < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

证明: (1) $\because t \in \mathbf{R}, t \neq -1, \therefore \Delta = (-c^2 a)^2 - 16c^2 = c^4 a^2 - 16c^2 \geq 0$.

$\because c \neq 0, \therefore c^2 a^2 \geq 16, \therefore |ac| \geq 4$.

(2) 由 $f(\pi) = 1 - \frac{1}{x+1}$,

设 $-1 \leq x_1 < x_2$, 则 $f(x_2) - f(x_1) = 1 - \frac{1}{x_2+1} - 1 + \frac{1}{x_1+1} =$

$$\frac{x_2 - x_1}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}.$$

$\because -1 \leq x_1 < x_2, \therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$.

$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$.

$\therefore$ 在 $[-1, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增.

(3) $\because f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, $|c| \geq \frac{4}{|a|} > 0$,

$$\therefore f(|c|) \geq f\left(\frac{4}{|a|}\right) = \frac{\frac{4}{|a|}}{\frac{4}{|a|} + 1} = \frac{4}{|a| + 4}.$$

$$f(|a|) + f(|c|) = \frac{|a|}{|a| + 1} + \frac{4}{|a| + 4} > \frac{|a|}{|a| + 4} + \frac{4}{|a| + 4} = 1,$$

即 $f(|a|) + f(|c|) > 1$.

【例 3】2005 大连模拟 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象有两个公共点, 则 a 的取值范围是

解析: 数形结合.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = |a^x - 1|$ 的图象如图(1)

所示.

$\therefore$ 欲使 $y = 2a$ 与 $y = |a^x - 1|$ 有两个不同点,

需 $2a < 1$.

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}.$$

当 $a > 1$ 时, 图(2)为 $y = |a^x - 1|$ 的图象.

$\therefore$ 欲使 $y = 2a$ 与 $y = |a^x - 1|$ 有两不同交点,

需 $2a < 1$.

$$\text{显然无解. } \therefore 0 < a < \frac{1}{2}.$$

答案: $(0, \frac{1}{2})$

评述: 本小题主要考查函数的图象和空间想象能力. 考查分析和判断的基本能力.

【例 4】函数 $f(x)$ 的图象无论经过平移还是沿直线翻折后均不能与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象重合, 则 $f(x)$ 是 ()

A. $y = 2^{-x}$

B. $y = 2 \log_4 x$

C. $y = \log_2(x+1)$

D. $y = \frac{1}{2} \cdot 4^x$

解析: 将 $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$ 的图象沿直线 $y = x$ 翻折即可与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

的图象重合, 排除 A; 将 $y = 2 \log_4 x = -\log_{\frac{1}{2}} x$ 沿 x 轴翻折即可与 $y =$

$\log_{\frac{1}{2}} x$ 图象重合, 排除 B; 将 $y = \log_2(x+1) = -\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 的图象

向右平移 1 个单位, 再沿 x 轴翻折即可与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象重合, 排

除 C.

答案: D

天才属于真正的图书爱好者。图书事业中的天才,堪与音乐天才相媲美。——李定

A. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$

C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{2})$

解析: 这里要对 $2a > 1$ 及 $0 < 2a < 1$ 讨论.

答案: C

一个重要结论: $y = \log_a x$ 的 a 与 x 均可划分为 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 两个区间, 当 a 与 x 同区间时, $y > 0$; 当 a 与 x 异区间时, $y < 0$. 简记为: 同正异负.

4 函数图象的作法有两种: 一种是描点法; 另一种是图象的变换法

【例5】2006 广东广州二模, 8 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$

($a > 1$) 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为 ()

A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$

B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$

C. $(\frac{a^2-1}{2a}, a)$

D. $[a, +\infty)$

解析: 使用互为反函数的性质, 不用求出反函数, 求 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围也就是求 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a > 1$) $x > 1$ 时的值

域. 因为 a^x 是增函数, $-a^{-x}$ 也是增函数, 所以 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$

也是增函数. 因为 $f(1) = \frac{1}{2}(a - a^{-1}) = \frac{a^2-1}{2a}$, 所以 $f(x) > \frac{a^2-1}{2a}$. 故

选 A.

答案: A



疑难突破

1 高考考查函数图象的三种方式

函数的图象问题是中学数学的一个重要知识点, 也是历年来高考出题的热点之一. 纵观历年来的高考试题, 高考中考查函数的图象总是以几类基本函数的图象为基础, 考查函数的有关概念和性质. 主要有以下三种方式:

(1) 画图

在画给定函数的图象时, 可用描点法, 但若函数是由基本初等函数通过变换得到的, 可利用图象的变换, 这是高考考查的重点. 在高考中要求同学们掌握三种变换方式: 平移变换, 伸缩变换, 对称变换.

(2) 识图

这里是指给定一个函数的图象, 通过观察它的特征, 讨论相应函数的性质, 或者得到另外的与之相关的函数图象. 在识别图形时, 要注意寻找图形中的特征点、图形的对称性、图形的增减性、奇偶性等特征量.

(3) 用图

主要指利用函数的图象研究图象的交点、方程解的个数, 以及确定参数的取值范围等问题. 如[典题链接]中例 3.

总之, 函数的解析式可以量化研究函数的性质, 而函数的图象可以直观显示函数的性质, 数形结合思想能将两者的长处有机地结合在一起, 既能充分利用形的直观, 又能有效借助数的严谨, 因此成为高考考查的热点, 希望同学们牢固掌握这一思想方法.

2 有关函数图象的综合问题

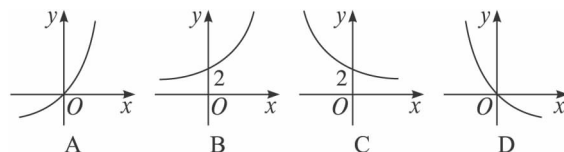
(1) 高考命题往往利用某些参数来限制图象的位置等特征, 解题时要对参数的可能取值认真分析, 找到函数图象间的合理制约关系, 确定函数图象的可能情况及性质.

(2) 二次函数要注意确定其对称轴的位置, 是否过定



活学巧用

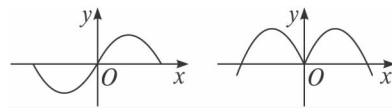
【例1】 已知函数 $y = \log_2 x$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(1-x)$ 的图象是



解析: 由 $y = f(x) = \log_2 x$ 可得 $f^{-1}(x) = 2^x$, 所以 $f^{-1}(1-x) = 2^{1-x}$. 先作 $y = 2^x$ 关于 y 轴的对称图形, 再向右平移 1 个单位, 即得 $y = f^{-1}(1-x)$ 的图象. 故选 C.

答案: C

【例2】2006 湖北八校联考, 4 已知函数 $f(x) = x \cdot \sin x$ 的图象是下图两个图象中的一个, 请你选择后再根据图象作出下面的判断: 若 $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 且 $f(x_1) < f(x_2)$, 则...



A. $x_1 > x_2$

B. $x_1 + x_2 > 0$

C. $x_1 < x_2$

D. $x_1^2 < x_2^2$

解析: $\because f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = x \cdot \sin x = f(x)$ 且 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

$\therefore f(x)$ 是偶函数, 故函数的图象是第二个图象.

当 $|x_1|, |x_2| \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 由偶函数的性质得

$f(|x_1|) < f(|x_2|)$.

点,开口方向如何,根的情况.

如在开区间 (m, n) 内方程 $f(x) = 0 (a > 0)$ 的情况) 有两

$$\text{实根, 则} \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(m) > 0, \\ f(n) > 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n. \end{cases}$$

$$\text{如方程 } f(x) = 0 (a > 0) \text{ 两根恒大于 } m, \text{ 则} \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > m, \\ f(m) > 0. \end{cases}$$

如在 (m, n) 内有且仅有一个实数根, 则 $f(m)f(n) < 0$.

如在闭区间 $[m, n]$ 内方程 $f(x) = 0$ 有且只有一个实数解. 利用 $f(m) \cdot f(n) \leq 0$ 就不行了. 因为满足此不等式的方程也可能有两个解. 为避免出现以上错误, 可先利用 $f(m) \cdot f(n) < 0$, 求得开区间 (m, n) 的结果, 再令 $x = m$, $x = n$ 检查端点情况.

3 图象与数列、导数的综合, 复合型函数图象

在没有给出具体函数的解析式或不能完全明确其解析式的情况下, 要善于利用已知条件, 分析图象上点的坐标特征. 近年来高考常把函数图象与数列、导数问题相关联, 考查知识迁移应用能力. 此时我们要把数列、导数相关知识与函数图象、性质相联系. 如数列可以看成特殊的函数, 函数在某区间内单调时其导数 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 对应的图象应是上升 (或下降) 等. 复合型函数先求定义域, 再递推确定图象位置.

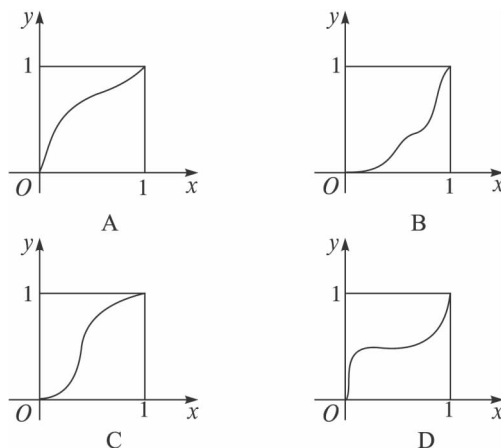
由图象知 $|x_1| < |x_2|$,

$$\therefore x_1^2 < x_2^2.$$

故选 D.

答案: D

【例3】2005 辽宁高考, 12 一给定的函数 $y = f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 则该函数的图象是



解析: 依题意, 由 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n$, 即该函数 $y = f(x)$ 图象上任一点 (x, y) 都满足 $y > x$. 由图象可知, 只有 A 满足.

答案: A



全优测控

考查明释

一、选择题

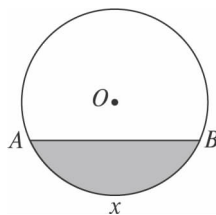
1 当函数 $f(x) = 2^{x+1} + m$ 的图象不过第二象限时, m 的取值范围是

- A. $m \geq 2$
- B. $m \leq -2$
- C. $m > 2$
- D. $m < -2$

2 2006 浙江高考, 4 已知 $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n < 0$, 则

- A. $n < m < 1$
- B. $m < n < 1$
- C. $1 < m < n$
- D. $1 < n < m$

3 2006 重庆高考, 理 9 如图所示, 单位圆中弧 $\widehat{AB}$ 的长为 x , $f(x)$ 表示弧 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍, 则函数 $y = f(x)$ 的图象是

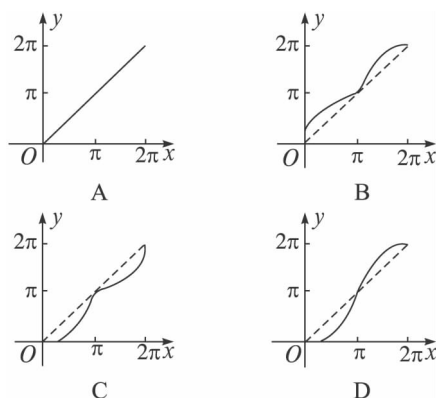


← 考查指数函数图象、函数图象的平移.

← 考查对数函数的图象及性质.

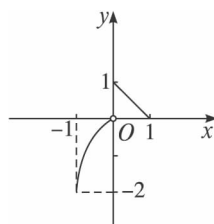
← 图象选择题. 特殊值法.

自学,不怕起点低,就怕不彻底。——华罗庚



- 4 2006 安徽合肥一模,11 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$, 其图象如图所示,则不等式 $-1 \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{2}$ 的解集是 ... ()

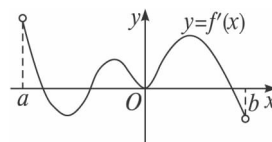
- A. $[-1, \frac{1}{2}]$
B. $[-2, \frac{1}{2}]$
C. $[-2, 0) \cup [\frac{1}{2}, 1]$
D. $[-1, 0) \cup [\frac{1}{2}, 1]$



← 考查互为反函数图象关于直线 $y=x$ 对称及图象法解不等式.

- 5 2006 天津高考,理 9 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示,则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点 ... ()

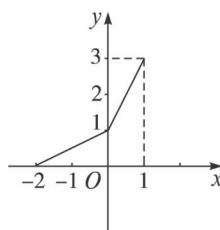
- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个



← 考查导函数与原函数间的关系及极值,考查识图能力.

- 6 2005 广东高考,9 在同一平面直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位,再沿 y 轴向上平移 1 个单位,所得的图象是由两条线段组成的折线(如右图所示),则函数 $f(x)$ 的表达式为 ... ()

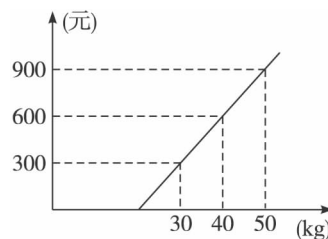
- A. $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}+2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$
B. $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}-2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$
C. $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2}+1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$
D. $f(x) = \begin{cases} 2x-6, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2}-3, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$



← 考查函数图象的平移及分段函数的解析式.

二、填空题

- 7 2006 河南郑州二模,16 某航空公司规定,乘机所携带行李的质量(kg)与其运费(元)由如图的一次函数图象确定,那么乘客免费可携带行李的最大质量为_____.
- 8 2004 北京西城模拟 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-4,0]$ 上的减函数,其图象端点为 $A(-4,1)$ 、 $B(0,-1)$,记 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$,则 $f^{-1}(1)$ 的值是_____; $f(x)$ 的值



← 考查函数的实际应用及识图、用图能力.用待定系数法求解析式.

← 考查互为反函数图象、单调性,数形结合法.