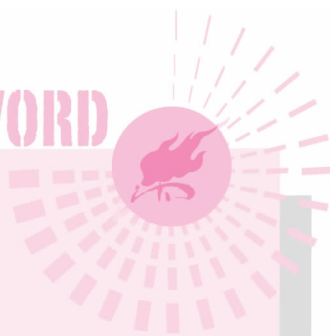




思路决定出路

(代前言)

思路决定出路,创路决定活路。

不同的复习思路,就有不同的复习效果。

不同的编写思路,就有不同的教辅用书。

正确的复习思路能使考生温故知新、如沐春风。科学的思维模式,能使考生左右逢源、绝处逢生。基于这种思考,我们深入研究了山东最新的课改精神和高考动态,吸收了山东最先进的教研成果,汇集了大批山东实力派名家名师全力打造、倾心推出了这套《高中总复习导学大课堂》山东版系列丛书。

丛书根据山东考生的实际情况,科学设置专题,强化训练,充分体现“导学导考”的思想。本丛书编写理念先进、体例设计合理、内容精彩、版式靓丽,是一套用爱心与智慧精心铸造的山东考生备考用书。本丛书具有以下特点:

● **科学设计 全程优化** 丛书与高考复习同步,并在宏观上进行了科学安排,以达到“专题提升”的目标。这不仅符合考生的认知规律和山东考生的复习特点,还符合山东教师指导下的备考实际。

● **能力立意 激活思维** 山东的高考越来越凸现“重视基础,能力立意”的原则。考生发现问题、解决问题的过程其实就是思考的过程、提升能力的过程。丛书通过对教材知识的挖掘和梳理,将知识设置成了一个一个问题。考生在探究问题的过程中,不仅激活了思维,挖掘出了潜能,还能改变传统的复习方式,提高复习的效率。



FOREWORD

● **源于基础 构建网络** 丛书在深入挖掘学科知识点的基础上,还特别注意梳理各部分知识间的内在联系,使零散、孤立的知识汇聚在一起,并形成了具有系统性、条理性的网络结构,供考生在解决问题时迅速地检索、提取和应用。

● **循序渐进 逐级提升** 丛书遵循由浅入深、由易到难、由简到繁的原则,例题和习题都设置了科学、合理的梯度与坡度,最大限度地兼顾了不同层次和不同水平的考生,既要让一般水平的考生吃饱、吃好,又能使学有余力的考生胃口大开。

● **一种思想 万千气象** 丛书的各学科既遵循统一的指导思想和编写理念,又根据各自的特点和创编者的个性,在栏目设置、体例设计、布局谋篇上形成自己独特的风格,使各学科在呈现出异彩纷呈、百花争妍态势同时,又与其他学科自然和谐地组成一个有机的整体。

如今的山东高考,既是学习水平的较量,也是学习能力的较量,更是备考思路的较量。丛书正是为山东考生的一切“较量”量身定做,是山东考生决胜高考并赢得高分的良师,也是山东考生把握现在并通向美好未来的益友。

由于我们水平有限,书中的不足在所难免,敬请读者提出宝贵意见,以便我们更好地完善,向广大考生献上更加丰盛的精神大餐。

丛书编委会



CONTENTS 目录

重难点突破专题

专题一 函 数	1
1. 函数的性质及应用	1
2. 函数的图象	6
专题二 数 列	11
1. 数列的通项与求和	11
2. 数列的综合应用	15
专题三 三角函数	20
1. 三角函数的图象与性质	20
2. 三角函数的综合应用	25
专题四 平面向量	30
1. 向量的运算与数量积	30
2. 向量在几何、物理中的应用	34
专题五 不等式	38
1. 不等式的解法	38
2. 不等式的证明	41
专题六 逻辑用语、推理证明及算法初步	46
1. 常用逻辑用语	46
2. 推理与证明	49
3. 算法及程序框图	51
专题七 直线与圆锥曲线	55
1. 直线与圆	55
2. 直线与圆锥曲线	59
专题八 框图与概率	64
1. 流程图与结构图	64
2. 概率与统计	68



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS



专题九 直线、平面及简单几何体	73
1. 直线、平面间的位置关系	73
2. 空间角与距离	77
专题十 导数与复数	82
1. 导数	82
2. 复数	86

数学思想方法专题

专题十一 最值问题	90
1. 函数的最值	90
2. 三角函数的最值	94
专题十二 应用题、探究题	98
1. 函数应用题	98
2. 数列应用题	102
3. 探究性问题	107
专题十三 数形结合思想	112
专题十四 分类讨论思想	117

解题指导专题

专题十五 怎样解选择题、填空题	121
-----------------------	-----



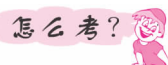
重难点突破专题

专题一 函 数

1. 函数的性质及应用



考什么?



怎么考?

1. 单调函数的性质

(1) 若 $f(x)$ 在区间 M 上是增函数, $x_1, x_2 \in M$, 则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 M 上是减函数, $x_1, x_2 \in M$, 则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

2. 函数的单调性与奇偶性有关的综合知识

(1) 若偶函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上单调递减. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递减, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上单调递增.

(2) 若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上也单调递增. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递减, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上也单调递减.

3. 奇函数的反函数仍是奇函数; 偶函数在定义域上没有反函数.

【预测考题 1】 2006 山东淄博高三期末, 10 单调增函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 若 $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1)$ B. $(-\infty, 2\sqrt{2}-1)$
C. $(0, 2\sqrt{2}-1)$ D. $[2\sqrt{2}-1, +\infty)$

解析: 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$,

特殊化法: 令 $f(x)=x$,

由于 $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$,

$\therefore k \cdot 3^x + 3^x - 9^x - 2 < 0$ 恒成立.

又令 $3^x = t$, 得 $t^2 - (1+k)t + 2 > 0$ 对于 $t > 0$ 恒成立.

设 $f(t) = t^2 - (1+k)t + 2$, 则 $\Delta = (1+k)^2 - 8 < 0$ 或 $\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ 1+k \leq 0, \\ f(0) \geq 0. \end{cases}$

$\therefore k < 2\sqrt{2}-1$.

故选 B.

答案: B

【预测考题 2】 2006 山东诸城等一模, 11 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 若 $f(a) \geq f(2)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 2$ B. $a \geq -2$
C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ D. $-2 \leq a \leq 2$

解析: $\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数,

$\therefore f(2) = f(-2)$,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 且 $f(a) \geq f(2)$,

$\therefore f(a) \geq f(-2)$,

$\therefore |a| \leq 2$, 即 $-2 \leq a \leq 2$.

故选 D.

答案: D

函数的性质及应用

本领加信心是一支战无不胜的军队。——赫伯特



三点新释



活学巧用

一、求函数的解析式,再根据解析式研究函数的有关性质

【例1】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上的单调性;
- (3) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的导函数,问是否存在实数 a , 满足 $a > 1$, 并且使 $g(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上的值域为 $[\frac{1}{a}, 1]$, 若存在, 求出 a ; 若不存在, 说明理由.

思路分析: 求 $f(x)$ 的解析式, 需根据 $f(x)$ 的有关性质 (奇偶性、周期性等) 用待定系数法进行求解. 对于单调性的研究, 可以利用定义, 也可以利用导数的性质来进行研究. 值域 (最值) 的研究有时利用函数的单调性比较简单.

解: (1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$. 由题意, 得

$$f(x) = -f(-x) = -(x^2 + \frac{1}{3}x^3).$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{3}x^3, & (x \geq 0), \\ -x^2 - \frac{1}{3}x^3, & (x < 0). \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) = -x^2 - \frac{1}{3}x^3$,

$$\therefore f'(x) = -2x - x^2.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -2$.

$\therefore$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数.

在区间 $(-2, 0)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.

(3) 显然 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的导函数是 $f'(x) = 2x - x^2$.

$$\therefore g(x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1.$$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, a]$ 上是减函数, 且 $g(1) = 1$.

$$\therefore g(a) = 2a - a^2 = \frac{1}{a}, \text{ 即 } a^3 - 2a^2 + 1 = 0.$$

$$\therefore (a-1)(a^2 - a - 1) = 0.$$

$$\text{解得 } a = 1 \text{ (舍去) 或 } a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去) 或 } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ 存在满足题意的实数 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

温馨提示

本题考查函数的奇偶性, 运用导数求单调区间的方法, 考查综合分析问题的能力. 要注意题设条件对答案的影响: 如将已知中的奇函数改为偶函数, 如何求解析式? (3) 中的定义域改为 $[\frac{1}{2}, a]$ 又如何求解? 请同学们认真思考.

类题演练 1

已知 $f(x) = a^{x+b}$ ($a > 0, a \neq 1, b$ 为常数) 的图象经过点 $(1, 1)$, 且 $0 < f(0) < 1$, 设 $m = \frac{1}{2}[f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)]$, $n = f^{-1}(\frac{x_1+x_2}{2})$, 其中 x_1, x_2 是两个不相等的正实数, 则 m 与 n 的大小关系是_____.

变式提升 1

设 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x \neq \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

且 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$. 如果 $f(x)$ 为奇函数,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3^x$.

(1) 求 $f(\frac{2007}{4})$;

(2) 当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, 求 $f(x)$;

(3) 是否存在这样的正整数 k , 使得当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\log_3 f(x) > x^2 - kx - 2k$ 有解?

二、关于抽象函数及其性质的研究

【例2】定义在 $(0, +\infty)$ 内的函数 $f(x)$,对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$ 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$,当且仅当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$ 成立.

- (1) 设 $x, y \in (0, +\infty)$,求证: $f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x)$;
- (2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1) > f(x_2)$,试比较 x_1, x_2 的大小;
- (3) 解不等式 $f(\sqrt{a^x-1}) > f(a^x-3)$ ($0 < a < 1$).

思路分析:抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图象,只给出一些函数符号及其满足的条件的函数,如函数的定义域、解析递推式、特定点的函数值、特定的运算性质等.它是高中函数部分的难点,也是大学高等数学函数部分与中学数学的一个衔接点.由于抽象函数没有具体的解析表达式作为载体,因此理解研究起来比较困难.但由于此类试题既能考查函数的概念和性质,又能考查学生的思维能力,所以备受命题者的青睐.那么怎样求解抽象函数问题呢?我们可以利用“特殊模型法”“函数性质法”“特殊化方法”“联想类比转化法”等多种方法从多角度、多层面去分析研究抽象函数问题.

对于抽象函数的问题,关键是根据给定的式子进行赋值或进行变量的代换.

有关抽象函数的不等式其实就是研究抽象函数的单调性,在把抽象函数不等式转化为普通不等式时,不能忘记抽象函数的定义域要求.

解: (1) $\because$ 对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$ 有, $f(x) + f(y) = f(xy)$,

$$\therefore f(\frac{y}{x}) + f(x) = f(\frac{y}{x} \cdot x) = f(y).$$

$$\therefore f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x).$$

$$(2) \because f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(\frac{x_1}{x_2}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1}{x_2} > 1 \Leftrightarrow x_1 > x_2, \therefore x_1 > x_2.$$

(3) 由(2)知, $f(x)$ 是在 $(0, +\infty)$ 上的增函数,于是 $f(\sqrt{a^x-1}) > f(a^x-3)$ 等价于

$$\begin{cases} \sqrt{a^x-1} > 0, \\ a^x-3 > 0, \\ \sqrt{a^x-1} > a^x-3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x-3 > 0, \\ \sqrt{a^x-1} > a^x-3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ a^x-1 > (a^x-3)^2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ a^{2x}-7a^x+10 < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ (a^x-2)(a^x-5) < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ 2 < a^x < 5, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < a^x < 5 \Leftrightarrow \log_a 3 < x < \log_a 5.$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(\log_a 3, \log_a 5)$ ($0 < a < 1$).

类题演练 2

设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减,若 $f(1-m) < f(m)$,求实数 m 的取值范围.

变式提升 2

已知定义在区间 $(-m, m)$ ($m > 0$)上,值域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足:①当 $0 < x < m$ 时, $f(x) > 0$;②对于定义域内任意的实数 a, b 均满足: $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}$.

(1) 试求 $f(0)$;

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若函数 $f(x)$ 存在反函数 $g(x)$,当 $n \in \mathbb{N}$

时,求证: $g(\frac{1}{7}) + g(\frac{1}{13}) + \dots +$

$$g(\frac{1}{n^2+3n+3}) < g(\frac{1}{2}).$$

温馨提示

本题将函数与不等式两大不同的知识块在网络交汇处融为一体,具有很强的综合性和时代性.高考试题中,对于解不等式要求较高,往往与二次函数、指数函数、对数函数等有关概念和性质密切相关.

从近几年的高考试题来看,解不等式的内容年年都有,有的是直接考查解不等式,有的则是间接考查解不等式(如本例),其难度系数一般在 0.6 左右.对不等式的基本性质以及各种类型的不等式的解法要求熟练掌握,对思维能力和运算化简能力有较高要求.

三、函数性质的实际应用

【例3】通过研究学生的学习行为,心理学家发现,学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间,讲座开始时,学生的兴趣激增;中间有一段不太长的时间,学生的兴趣保持较理想的状态,随后学生的注意力开始分散,分析结果和实验表明,用 $f(x)$ 表示学生掌握和接受概念的能力($f(x)$ 值越大,表示接受的能力越强), x 表示提出和讲授概念的时间(单位:分),可有以下的公式:

$$f(x) = \begin{cases} -0.1x^2 + 2.6x + 43, & (0 < x \leq 10), \\ 59, & (10 < x \leq 16), \\ -3x + 107, & (16 < x \leq 30). \end{cases}$$

- (1) 开讲后多少分钟,学生的接受能力最强?能维持多少时间?
- (2) 开讲后 5 分钟与开讲后 20 分钟比较,学生的接受能力何时强一些?
- (3) 一个数学难题,需要 55 的接受能力以及 13 分钟时间,老师能否及时在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这个难题?

思路分析:高考中,借助函数知识解应用题一直是考查的重点,而且背景越来越广泛.解应用题的关键是如何把实际问题转化为数学问题.因而审题时要着重弄清楚题目中涉及到哪些量,这些量之间存在哪些联系,如何建立函数关系式等.本例已给出解析式,重点是要明白解析式中两变量的实际意义.

解: (1) 当 $0 < x \leq 10$ 时,

$$f(x) = -0.1x^2 + 2.6x + 43 = -0.1 \times (x - 13)^2 + 59.9,$$

故 $f(x)$ 递增,

$$\text{最大值为 } f(10) = -0.1 \times (-3)^2 + 59.9 = 59;$$

当 $16 < x \leq 30$ 时, $f(x)$ 递减,

$$f(x) < -3 \times 16 + 107 = 59.$$

因此,开讲后 10 分钟,学生达到最高的接受能力(值为 59),并维持 6 分钟.

$$(2) f(5) = -0.1 \times (5 - 13)^2 + 59.9 = 59.9 - 6.4 = 53.5,$$

$$f(20) = -3 \times 20 + 107 = 47 < 53.5.$$

因此开讲后 5 分钟,学生的接受能力比开讲 20 分钟强一些.

(3) 当 $0 < x \leq 10$ 时,令 $f(x) = 55$,

$$\text{则 } -0.1 \times (x - 13)^2 = -4.9,$$

$$(x - 13)^2 = 49, \text{ 所以 } x = 20 \text{ 或 } 6, \text{ 但 } 0 < x \leq 10, \text{ 故 } x = 6.$$

类题演练 3

能源紧缺是一个社会问题,为合理用电,缓解电力紧张,某市将试行“峰谷电价”计费方法,在高峰用电时段,即居民户每日 8 时至 22 时,电价为每千瓦时 0.56 元,其余时段电价为每千瓦时 0.28 元.而目前没有实行“峰谷电价”的居民户电价为每千瓦时 0.53 元,若总用电量为 S 千瓦时,设高峰时段用电量为 x 千瓦时.

- (1) 写出实行“峰谷电价”的电费 $y_1 = g_1(x)$ 及现行电价的电费 $y_2 = g_2(S)$ 的函数解析式及电费总差额 $f(x) = y_2 - y_1$ 的解析式;
- (2) 对于用电量按时均等的电器(在任何相同的时间内,用电量相同),采用峰谷电价的计费方法后是否能省钱?
- (3) 若每户实行“峰谷电价”的居民需缴纳安装“分时段电能计量表”的成本费 100 元.在用电量按时均等的条件下,一户居民要在一年内收回安装“分时段电能计量表”的成本费,每户每月用电至少要不低于多少千瓦时(结果取整数)?

则 $16 < x \leq 30$ 时,
 令 $f(x) = 55$,
 则 $-3x + 107 = 55$,
 所以 $x = 17\frac{1}{3}$.

因此学生达到(或超过)55 的接受能力的时间为 $17\frac{1}{3} - 6 = 11\frac{1}{3} < 13$ (分钟),老师来不及在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这道难题.

温馨提示

此题是一道分段函数、二次函数性质的题目,通过方程、不等式的互相转化,使问题得以解决.同时也考查了基本计算能力和理解能力.

变式提升 3

现代社会对破译密码的要求越来越高,有一种密码把英文的明文(真实文)按字母分解,其中英文字母按顺序 $a, b, c, \dots, x, y, z$ (不分大小写)依次对应 $1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26$ 这 26 个自然数.给出如下一变换公式:

$$x' = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & (x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 不能被 } 2 \text{ 整除}), \\ \frac{x}{2} + 13, & (x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 能被 } 2 \text{ 整除}). \end{cases}$$

将明文转换为密文,如 $8 \rightarrow \frac{8}{2} + 13 = 17$,即 h

变为 q ; $5 \rightarrow \frac{5+1}{2} = 3$,即 e 变为 c .按上述规定,将明文 $good$ 译成密文是_____.



基础过关

- 1 若函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 _____ ()
 A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$
 C. $[-5, 5]$ D. $[-3, 7]$
- 2 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数 $y = f(x)$ 又是减函数, 且 $f(a-3) + f(9-a^2) < 0$, 则 a 的取值范围是 _____ ()
 A. $(2\sqrt{2}, 3)$ B. $(3, \sqrt{10})$
 C. $(2\sqrt{2}, 4)$ D. $(-2, 3)$
- 3 若 $a > 1$ 且 $a^{-x} + \log_a y < a^{-y} + \log_a x$, 则 x, y 之间的关系为 _____ ()
 A. $x > y > 0$
 B. $x = y = 0$
 C. $y > x > 0$
 D. 不能确定, 与 a 取值有关
- 4 已知当 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 时, $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $x_1, x_2, \dots, x_{2006} \in \mathbb{R}^+$, 且 $f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2006}) = 8$, 则 $f(x_1^2) + f(x_2^2) + \dots + f(x_{2006}^2)$ 的值为 _____.
- 5 2006 广东汕头模拟, 12 给定实数 x , 定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, $\{x\}$ 为 x 的小数部分, 且 $x = [x] + \{x\}$, 则下列结论: ① $x-1 < [x] \leq x$; ② $x - [x]$ 是周期函数; ③ $x - [x]$ 是偶函数; ④ $-1 < \{x\} < 1$. 其中不正确的是 _____.
- 6 设函数 $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x} - 1$ (a 为实数).
 (1) 若 $a < 0$, 用函数单调性定义证明: $y = f(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上是增函数;

- (2) 若 $a = 0$, $y = g(x)$ 的图象与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 求函 $y = g(x)$ 的解析式.

能力提升

- 7 2006 山东高三综合测试(一), 13 二次函数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 满足条件: (1) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增; (2) $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 对任意实数 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 都有 $\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} < g(\frac{x_1 + x_2}{2})$, 则 $f_1(x) =$ _____, $f_2(x) =$ _____.
 (写出符合条件的一组即可)

不会宽容人的人,是不配受到别人宽容的。——贝尔奈

8 设函数 $f(x) = \frac{mx+2}{x-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

- (1) 求 m 的值,并用定义判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性;
- (2) 若直线 $y=a (a \in \mathbf{R})$ 与 $f(x)$ 的图象无公共点,且 $f(|t-2| + \frac{3}{2}) < 2a + f(4a)$, 求实数 t 的取值范围.

挑战高分

9 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1 (a, b \text{ 为实数}) x \in \mathbf{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & (x > 0), \\ -f(x), & (x < 0). \end{cases}$$

- (1) 若 $f(-1) = 0$, 且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 $F(x)$ 的表达式;
- (2) 在(1)的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围;
- (3) 设 $m \cdot n < 0, m+n > 0, a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 判断 $F(m) + F(n)$ 能否大于零?

2. 函数的图象



考什么?

怎么考?



函数

1. 奇函数的图象关于原点对称; 偶函数的图象关于 y 轴对称.

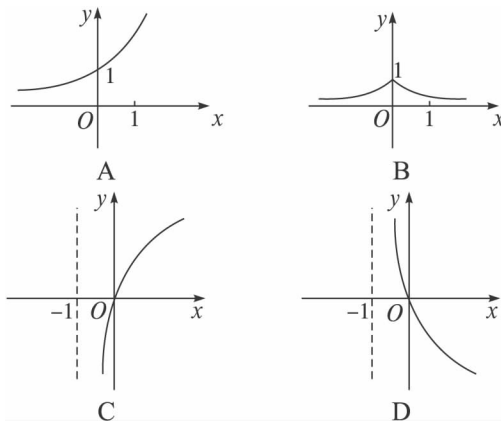
2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

3. 若函数 $f(x)$ 在定义域内有 $f(x) = f(a-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a}{2}$ 对称.

4. 函数 $f(x)$ 与反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

5. 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(x)$ 的图象关于 x 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y =$

【预测考题 1】2006 广东中山月考, 8 设 $a > 1$, 实数 x, y 满足 $|x| - \log_a \frac{1}{y} = 0$, 则 y 关于 x 的函数的图象形状大致是 ()



解析: $\because |x| = \log_a \frac{1}{y}, \therefore |x| = -\log_a y, y = a^{-|x|} (a > 1), x \in \mathbf{R}, y > 0$. 故 C、D 均为错误, 令 $x=1$, 则 $y = a^{-1} = \frac{1}{a} < 1$, 选 B.

$-f(-x)$ 的图象关于原点对称.

6. 若函数 $f(x)$ 在定义域内满足 $f(x) = f(a+x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象向左或向右平移 $|a|$ 个单位后, 能与原来的图象完全重合.

答案: B

【预测考题 2】2006 山东烟台期末, 21 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \in \mathbb{Z})$ 为偶函数, 对于 $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 1$ 恒成立, 且 $f(1) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $F(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)}, & (0 \leq x \leq 1), \\ -\sqrt{f(x)}, & (-1 \leq x < 0), \end{cases}$ 求 $F(x) + \sqrt{3}x$ 的取值范围;

解: (1) $\because f(-x) = f(x), \therefore b = 0$.

$\because f(1) = 0, \therefore a + c = 0$.

又 $\because f(x) = ax^2 + c \leq 1$ 恒成立, $\therefore a < 0, c \leq 1. \therefore 0 > a \geq -1$.

由 $a \in \mathbb{Z}$, 得 $a = -1, c = 1, f(x) = 1 - x^2$.

(2) $F(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & (0 \leq x \leq 1), \\ -\sqrt{1-x^2} & (-1 \leq x < 0). \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $F(x) + \sqrt{3}x = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x \in [1, 2]$.

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $F(x) + \sqrt{3}x = -\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x = -F(-x) + \sqrt{3}x \in [-2, -1]$.

$\therefore F(x) + \sqrt{3}x$ 的取值范围是 $[-2, -1) \cup [1, 2]$.



三点新释



活学巧用

一、函数的图象关于点或直线对称或利用对称性解题

【例 1】已知函数 $f(x) = -\frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}} (a > 0, a \neq 1)$.

(1) 证明函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称;

(2) 求 $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ 的值.

思路分析: 如何证明函数的图象关于点或直线对称? 即在图象上任取一点 $A(x, y)$, 并设点 A 关于点或直线的对称点为 $B(x_0, y_0)$, 再证明点 B 也在函数的图象上即可. 根据这种对称性, 可以研究某些函数值之间的关系.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数. 任取一点 (x, y) , 它关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称的点的坐标为 $(1-x, -1-y)$. 由已知,

$$y = -\frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}},$$

$$\text{则 } -1-y = -1 + \frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}} = -\frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}},$$

$$f(1-x) = -\frac{\sqrt{a}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} = -\frac{\frac{a}{a^x} + \sqrt{a}}{\frac{a}{a^x} + \sqrt{a}}$$

$$= -\frac{\sqrt{a} \cdot a^x}{a + \sqrt{a} \cdot a^x} = -\frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}},$$

$$\therefore -1-y = f(1-x).$$

类题演练 1

函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+4| + |x-3|}$ 的图象关于 ...

- ()
- A. x 轴对称 B. 直线 $y = x$ 对称
C. 原点对称 D. y 轴对称

变式提升 1

设函数 $f(x)$ 满足:

- ① 对任意实数 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1)f(x_2)$; ② 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称; ③ $f(x)$ 不恒为零, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) < 1$.

(1) 求证: $f(x)$ 为偶函数;

(2) 求证: $f(x)$ 是周期函数;

(3) 求 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(\frac{6}{3}) + \dots + f(\frac{2005}{3})$.

函数的图象

如烟往事俱忘却,心底无私天地宽。——陶铸

即函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称.

(2) 解: 由(1)有 $-1-f(x)=f(1-x)$.

即 $f(x)+f(1-x)=-1$.

$\therefore f(-2)+f(3)=-1, f(-1)+f(2)=-1$.

$f(0)+f(1)=-1$.

则 $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=-3$.

温馨提示

这是证明对称性的一般方法. 如果没有(1), 只有(2), 则必须先研究对称性才能从中找到规律即自变量和为1的两个函数值之间的关系. 请同学们从这道例题总结类似问题的解法.

二、关于二次函数的问题

【例2】已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2x + x^2$.

(1) 求 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在这样的正数 a, b , 当 $x \in [a, b]$ 时 $g(x) = f(x)$, 且 $g(x)$

的值域为 $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$? 若存在, 求出所有的 a, b 的值; 若不存在, 请

说明理由.

思路分析: 二次函数在高中数学和大学数学中是极其重要的内容, 应用相当广泛, 借助于图象可与一元二次方程, 一元二次不等式有机地联系起来. 给定定义域求值域, 常常带有字母参数, 这时关于定义域与对称轴位置关系的讨论就是一个重要的考查点. 借助于函数的图象, 研究一元二次方程根的分布也是一个重要考点.

解: (1) 任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$, $\therefore f(-x) = -2x + (-x)^2$.

对 $f(x)$ 是奇函数, $-f(x) = -2x + x^2$,

即 $f(x) = 2x - x^2 (x > 0)$.

(2) 分下述三种情况:

① 当 $0 < a < b \leq 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 即当 $x > 0$ 时,

$f(x)$ 的最大值为 1, 故此时不可能使 $g(x) = f(x)$.

② 若 $0 < a < 1 < b$ 时, 此时若 $g(x) = f(x)$, 则 $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = f(1) = 1$ 而 $\frac{1}{a} = 1$ 得 $a = 1$, 这与 $0 < a < 1 < b$ 矛盾.

③ 若 $1 \leq a < b$, 因为当 $x \geq 1$ 时, $f(x)$ 是减函数, 则 $f(x) = g(x) = 2x - x^2$, 于是有

$$\begin{cases} \frac{1}{b} = g(b) = -b^2 + 2b \\ \frac{1}{a} = g(a) = -a^2 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a^2-a-1) = 0, \\ (b-1)(b^2-b-1) = 0. \end{cases}$$

当注意到 $1 \leq a < b$ 时, 解得 $a = 1, b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 故当 $a = 1$,

$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时满足题意.

温馨提示

本例对称轴 $x=1$ 是固定的, 讨论定义域 $[a, b]$ 与对称轴 $x=1$ 的位置关系就分三种情况, 需要结合图象帮助分析, 以寻找最大值和最小值的位置.

类题演练 2

已知关于 x 的方程 $x^2 + (\frac{1}{2} - 2m)x + m^2 -$

$1 = 0$ (m 是与 x 无关的实数) 的两个实根在区间 $[0, 2]$ 内, 求 m 的取值范围.

变式提升 2

已知方程 $ax^2 + 2(2a-1)x + 4a-7 = 0, a \in \mathbb{N}^*$, 问 a 为何值时, 方程至少有一个整数解?

三、利用函数图象解题

【例3】求函数 $u = \sqrt{2t+4} + \sqrt{6-t}$ 的最值.

思路分析: 本例带有两个根式, 如何去掉根号是关键. 显然需要用换元法, 只换一个根号, 如令 $x = \sqrt{2t+4}$, 则增加了一个新元且仍有一个根号, 不合适. 因此需要把两个根号全换元. 换元的过程需要注意新元的取值范围.

解: 令 $x = \sqrt{2t+4}, y = \sqrt{6-t}$,

则 $x^2 + 2y^2 = 16 (0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\sqrt{2})$

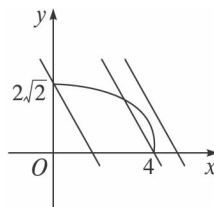
所给函数化为以 u 为参数的直线系 $y = -x + u$, 它与椭圆 $x^2 + 2y^2 = 16$ 在第一象限的部分(包括端点)有公共点, 如右图所示, $u_{\min} = 2\sqrt{2}$, 相切于第一象限时 $u_{\max}$, 此时由方程组:

$$\begin{cases} y = -x + u, \\ x^2 + 2y^2 = 16. \end{cases}$$

得 $3x^2 - 4ux + 2u^2 - 16 = 0$.

解 $\Delta = 0$, 得 $u = \pm 2\sqrt{6}$,

又直线在第一象限, 故 $u_{\max} = 2\sqrt{6}$.



温馨提示

该题若用常规法较难求解, 但换元以后可借助线性归划的思想, 再运用数形结合则起到了事半功倍的效果. 考查了逻辑思维, 计算与迁移能力, 以及化归与转化的思想.

类题演练 3

已知函数 $f(x) = |x^2 + 2x|$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同的实数解, 则 b, c 的大小关系为 ()

A. $b > c$

B. $b \geq c$ 与 $b \leq c$ 中至少有一个正确

C. $b < c$

D. 不能判定

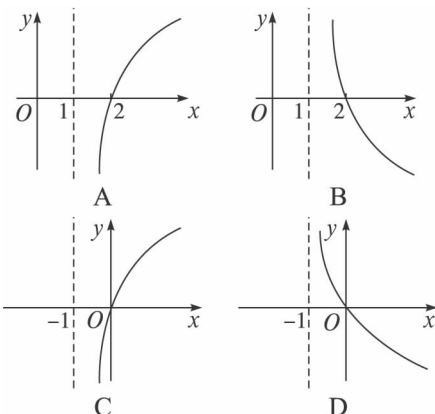
变式提升 3

设 $y = (\log_2 x)^2 + (t-2)\log_2 x + 1$, 若 t 在 $[-2, 2]$ 上变化时, y 恒取正值, 求实数 x 的取值范围.



基础过关

1 若奇函数 $f(x) = ka^x - a^{-x} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数, 那么 $g(x) = \log_a(x+k)$ 的大致图象是 ()

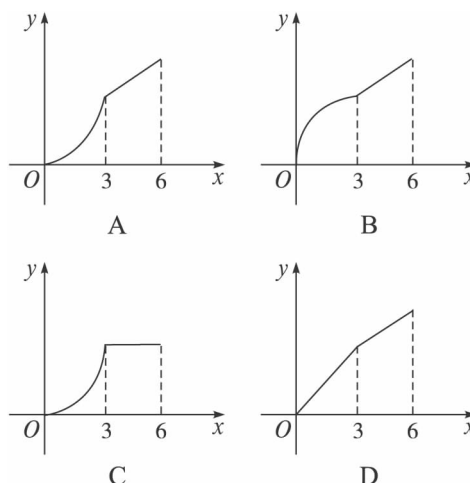


2 设二次函数 $f(x) = x^2 - x + a (a > 0)$, 若 $f(m) < 0$, 则 $f(m-1)$ 的值为 ()
A. 正数 B. 负数

C. 非负数

D. 正数、负数和零都有可能

3 某工厂六年来生产某种产品的情况是: 前三年年产量的增长速度越来越快, 后三年年产量保持不变, 则该厂六年来这种产品的总产量与时间 t 的函数关系可用图象表示的是 ()



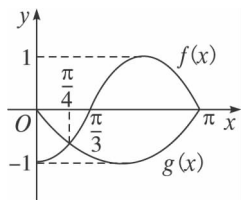
函数的图象

不做才以骄人,不以宠而作威。——诸葛亮

- 4 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} & (x \neq 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, 若

关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 3 个不同的实数解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 等于_____.

- 5 已知函数 $y = f(x)$ 是偶函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 它们的定义域为 $[-\pi, \pi]$, 且它们在 $x \in [0, \pi]$ 上的图象如右图



所示, 则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 的

解集为_____.

- 6 已知函数 $f(x) = kx + b$ 的图象与 x, y 轴分别相交于点 A, B , $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别是与 x, y 轴正半轴同方向的单位向量), 函数 $g(x) = x^2 - x - 6$.

(1) 求 k, b 的值;

(2) 当 x 满足 $f(x) \geq g(x)$ 时, 若 $g(x) \geq -5x + m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

挑战高分

- 9 已知 $f(x) = \log_4(4^x + 1) + kx$ ($k \in \mathbf{R}$) 是偶函数.

(1) 求 k 的值;

(2) 证明: 对任意实数 b , 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线

$$y = \frac{1}{2}x + b \text{ 最多只有一个交点;}$$

(3) 设 $g(x) = \log_4(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$

的图象有且只有一个公点, 求实数 a 的取值范围.

能力提升

- 7 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2$ 的公共点的个数为_____.

- 8 2006 广东湛江测试(二), 19 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = g(2-x)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时 $g(x) = 2a(x-2) - 4(x-2)^3$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 是否存在正实数 a ($a > 6$), 使函数 $f(x)$ 的图象的最高点在直线 $y = 12$ 上? 若存在, 求出正实数 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

专题二 数 列

1. 数列的通项与求和



考什么?



怎么考?



1. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\{a_{2n}\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列, $\dots, \{a_{mn}\}$ (m 是某个正整数, $n \in \mathbb{N}^*$) 是公差为 md 的等差数列.

2. $\{a_n\}$ 是等差数列的一个充要条件是 $S_n = an^2 + bn$ (a, b 为常数).

3. 若 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_{n+1} + \dots + a_{n+m} = nd(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)$.

4. 等差数列求和常用基本量法、裂项法、迭代法等, 等比数列的求和常用基本量法、迭乘法、倒序相加法等.

【预测考题 1】2006 广东番禺月考, 6 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 12$, $a_4 + a_5 + a_6 = 18$, 则 $a_7 + a_8 + a_9$ 等于 ()

A. 24 B. 6 C. 0 D. -12

解析: $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 成等差数列,

$$\therefore 2(a_4 + a_5 + a_6) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_7 + a_8 + a_9),$$

$$\therefore a_7 + a_8 + a_9 = 24, \text{选 A.}$$

答案: A

【预测考题 2】2006 山东莱芜一模, 19 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{5}{6}$, 对任意的正整数 n , 都有 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$ 对任意的正整数 n 都成立.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(1) 证明: 由 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$ 得 $b_n = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{6}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$,

$$\text{于是 } b_{n+1} = -\frac{1}{6}a_{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+2}$$

$$= -\frac{1}{6}[\frac{1}{3}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}] + (\frac{1}{2})^{n+2}$$

$$= \frac{1}{3}[-\frac{1}{6}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}]$$

$$= \frac{1}{3}b_n.$$

对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

$$\text{而 } b_1 = -\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{9}, \text{故 } b_n = (\frac{1}{3})^{n+1}.$$

因此数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{9}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

(2) 解: 由于 $b_n = -\frac{1}{6}a_n + (\frac{1}{2})^{n+1} = (\frac{1}{3})^{n+1}$

$$\text{于是 } a_n = 6[(\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{1}{3})^{n+1}]$$

$$= 3 \cdot (\frac{1}{2})^n - 2 \cdot (\frac{1}{3})^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

数列的通项与求和



三点新释



活学巧用

一、直接应用通项公式或求和公式

【例1】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a ,公差为 b ;等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 b ,公比为 a ,其中 $a, b \in \mathbb{N}^*$,则 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3$.

- (1)求 a 的值;
 (2)若对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$,总存在 $m \in \mathbb{N}^*$,使 $a_m + 3 = b_n$,求 b 的值;
 (3)在(2)中,记 $\{c_n\}$ 是所有 $\{a_n\}$ 中满足 $a_m + 3 = b_n, m \in \mathbb{N}^*$ 的项从小到大依次组成的数列,又记 S_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, T_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.求证: $S_n \geq T_n (n \in \mathbb{N}^*)$

思路分析:已知中明确给出首项公差(公比),可以写出通项公式,前 n 项和公式.据此可以进行一系列变形.

解:(1) $\because a < b < a + b < ab < a + 2b, a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$\therefore \begin{cases} a + b < ab, \\ ab < a + 2b, \end{cases} \therefore \begin{cases} a > \frac{b}{b-1}, \\ a < \frac{2b}{b-1}. \end{cases} \therefore \begin{cases} a > 1 + \frac{1}{b-1}, \\ a < 2 + \frac{2}{b-1}. \end{cases} \therefore \begin{cases} a > 1, \\ a < 4. \end{cases}$$

$\therefore a = 2$ 或 $a = 3$ ($a = 3$ 时不合题意,舍去). 故 $a = 2$.

(2) $a_m = 2 + (m-1)b, b_n = b \cdot 2^{n-1}$,由 $a_m + 3 = b_n$,可得

$$5 + (m-1)b = b \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{即 } b(2^{n-1} - m + 1) = 5, \therefore b = 5.$$

证明:(3)由(2)知 $a_n = 5n - 3, b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$,

$$\therefore a_m = b_n - 3 = 5 \cdot 2^{n-1} - 3, \therefore c_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3,$$

$$\therefore S_n = 5(2^n - 1) - 3n, T_n = \frac{1}{2}n(5n - 1).$$

$$\therefore S_1 = T_1 = 2, S_2 = T_2 = 9.$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } S_n - T_n = 5[2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1]$$

$$= 5[(1+1)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1]$$

$$= 5[(1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots) - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] > 5[1 + n +$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1] = 0.$$

$$\therefore S_n > T_n. \text{ 综合以上, 便得 } S_n \geq T_n (n \in \mathbb{N}^*).$$

温馨提示

直接应用公式需要仔细计算,任何一步出错都会造成前功尽弃的后果.

二、研究数列的项之间的关系

【例2】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前4项的和为60,第二项与第四项的和为34;等比数列 $\{b_n\}$ 的前4项的和为120,第二项与第四项的和为90.求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

类题演练 1

已知等差数列 $\{a_n\}$,公差 $d < 0$,又其前 n 项和 S_n 中有 $S_{20} = S_{15}$,则 S_n 取最大值时, n 等于多少?

变式提升 1

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{5}, a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2,$

$n \in \mathbb{N}^*)$,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n - 1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1)求证 $\{b_n\}$ 是等差数列;
 (2)求 $\{a_n\}$ 中的最大项与最小项,并说明理由.

类题演练 2

有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数

思路分析:由已知可以直接列式,代入通项公式,前 n 项和公式进行计算,但需要动脑寻求计算捷径,避免繁冗计算.由 $S_4 = 60, a_2 + a_4 = 34$,可以得到 $a_1 + a_3 = 26$,这样两式相减可得公差的关系.等比数列类似.

$$\text{解:由题意知:} \begin{cases} a_2 + a_4 = 34, \\ S_4 = 60, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_4 = 34, \\ a_1 + a_3 = 26. \end{cases} \quad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

$$\therefore ① - ② \text{ 可得: } 2d = 8, \therefore d = 4, a_1 = 9.$$

$$\therefore a_n = 4n + 5 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\text{由题意知:对数列} \{b_n\}, \begin{cases} T_4 = 120, \\ b_2 + b_4 = 90, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b_1 + b_3 = 30, \\ b_2 + b_4 = 90. \end{cases} \quad \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix}$$

$$④ \div ③ \text{ 可得: } q = 3, \text{ 则 } b_1 = 3.$$

$$\therefore b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

三、与前 n 项和有关的问题

【例3】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 100n - n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) $\{a_n\}$ 是什么数列;

(2) 设 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

思路分析:本题考查数列的基础知识,以及含绝对值的数列前 n 项和的求法.在求和前首先要确定,从哪一项开始该项的值为负,然后将和分段表示.

解析:(1) $a_n = S_n - S_{n-1} = (100n - n^2) - [100 \cdot (n-1) - (n-1)^2] = 101 - 2n (n \geq 2)$.

$$\therefore a_1 = S_1 = 100 \times 1 - 1^2 = 99 = 101 - 2 \times 1,$$

$$\therefore \text{数列} \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 101 - 2n (n \in \mathbf{N}^*).$$

又 $a_{n+1} - a_n = -2$ 为常数,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 99$, 公差 $d = -2$ 的等差数列.

(2) 令 $a_n = 101 - 2n \geq 0$, 得 $n \leq 50.5$,

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*, \therefore n \leq 50 (n \in \mathbf{N}^*).$$

① 当 $1 \leq n \leq 50$ 时, $a_n > 0$, 此时 $b_n = |a_n| = a_n$,

$$\therefore \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n' = 100n - n^2.$$

② 当 $n \geq 51$ 时, $a_n < 0$, 此时 $b_n = |a_n| = -a_n$, 由 $b_{51} + b_{52} + \dots + b_n = -(a_{51} + a_{52} + \dots + a_n) = -(S_n - S_{50}) = S_{50} - S_n$, 得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n' = S_{50} + (S_{50} - S_n) = 2S_{50} - S_n = 2 \times 2500 - (100n - n^2) = 5000 - 100n + n^2$.

由①②得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n' = \begin{cases} 100n - n^2 (n \in \mathbf{N}^*, 1 \leq n \leq 50), \\ 5000 - 100n + n^2 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 51). \end{cases}$$

温馨提示

含有绝对值记号的函数,不等式与数列是高中数学知识网络的重要交汇点,是能力题的重要载体,也是较难掌握的一类题型.解题的关键是根据实数绝对值的定义找到满足 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} < 0, \end{cases}$ 的界值 $n (n \in \mathbf{N}^*)$, 本题常发展为求等差数列的最值,或求可化为等差数列的非基本数列的最值问题.借助本例转化为二次函数的最值且注意 $n \in \mathbf{N}^*$, 即可顺利获解.

的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数.

变式提升 2

已知数列 $\{a_n\}$, 且 $(\frac{10}{9})a_1 + (\frac{10}{9})^2 a_2 + \dots + (\frac{10}{9})^n a_n = \frac{1}{2}(n^2 + 3n)$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

类题演练 3

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 则它的前 $3m$ 项和为 $\dots$ ()
A. 130 B. 170 C. 210 D. 260

变式提升 3

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, $S_n = 80, S_{2n} = 6560$, 且在前 n 项中, 最大的项为 54, 求 n 的值.