

重难点突破专题

专题一 函 数	1
1. 函数的性质及应用	1
2. 函数的图象	7
实战演练	13
专题二 数 列	17
1. 数列的通项与求和	17
2. 数列的综合应用	22
实战演练	28
专题三 三角函数	32
1. 三角函数的图象与性质	32
2. 三角函数的综合应用	38
实战演练	44
专题四 平面向量	48
1. 向量的运算与数量积	48
2. 向量在几何、物理中的应用	52
实战演练	58
专题五 不等式	62
1. 不等式的解法	62
2. 不等式的证明	66
实战演练	70
专题六 逻辑用语、推理证明及算法初步	75
1. 常用逻辑用语	75
2. 推理与证明	78
3. 算法及程序框图	83
实战演练	87
专题七 直线与圆锥曲线	91
1. 直线与圆	91
2. 直线与圆锥曲线	96
实战演练	102
专题八 计数原理、框图及概率	106
1. 流程图与结构图(文)	106
1. 排列 组合与二项式定理(理)	111
2. 概率与统计(理)	115
2. 概率与统计(文)	121
实战演练(理科)	126
实战演练(文科)	129



CONTENTS



专题九 直线、平面及简单几何体	133
1. 直线、平面间的位置关系	133
2. 空间角与距离	138
3. 空间向量及其应用(理)	140
实战演练	150
专题十 导数与复数	155
1. 导数(文)	155
1. 导数的应用(理)	160
2. 复数	166
实战演练	170

数学思想方法专题

专题十一 最值问题	175
1. 函数的最值	175
2. 三角函数的最值	179
实战演练	183
专题十二 应用题、探究题	186
1. 函数应用题	186
2. 数列应用题	191
3. 探究性问题	196
专题十三 数形结合思想	203
专题十四 分类讨论思想	209

解题指导专题

专题十五 怎样解选择题、填空题	215
-----------------------	-----

模拟考场

模拟测试(一)	229
模拟测试(二)	234
模拟测试(三)	239



重难点突破专题

专题一 函数

1. 函数的性质及应用



考什么?



怎么考?



1. 单调函数的性质

(1) 若 $f(x)$ 在区间 M 上是增函数, $x_1, x_2 \in M$, 则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 M 上是减函数, $x_1, x_2 \in M$, 则 $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

2. 函数的单调性与奇偶性有关的综合知识

(1) 若偶函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上单调递减. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递减, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上单调递增.

(2) 若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上也单调递增. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调递减, 则 $f(x)$ 在区间 $[-b, -a]$ 上也单调递减.

3. 奇函数的反函数仍是奇函数; 偶函数在定义域上没有反函数.

【预测考题 1】 2006 山东淄博高三期末, 10 单调增函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 若 $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

A. $(-2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1)$

B. $(-\infty, 2\sqrt{2}-1)$

C. $(0, 2\sqrt{2}-1)$

D. $[2\sqrt{2}-1, +\infty)$

解析: 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$,

特殊化法: 令 $f(x)=x$,

由于 $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$,

$\therefore k \cdot 3^x + 3^x - 9^x - 2 < 0$ 恒成立.

又令 $3^x = t$, 得 $t^2 - (1+k)t + 2 > 0$ 对于 $t > 0$ 恒成立.

设 $f(t) = t^2 - (1+k)t + 2$, 则 $\Delta = (1+k)^2 - 8 < 0$ 或 $\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ 1+k \leq 0, \\ f(0) \geq 0. \end{cases}$

$\therefore k < 2\sqrt{2}-1$.

故选 B.

答案: B

【预测考题 2】 2006 山东诸城等一模, 11 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 若 $f(a) \geq f(2)$, 则 a 的取值范围是 ... ()

A. $a \leq 2$

B. $a \geq -2$

C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$

D. $-2 \leq a \leq 2$

解析: $\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数,

$\therefore f(2) = f(-2)$,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 且 $f(a) \geq f(2)$,

$\therefore f(a) \geq f(-2)$,

$\therefore |a| \leq 2$, 即 $-2 \leq a \leq 2$.

故选 D.

答案: D



一、求函数的解析式,再根据解析式研究函数的有关性质

【例1】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x \geq 0$ 时

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上的单调性;
- (3) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的导函数,问是否存在实数 a , 满足 $a > 1$, 并且使 $g(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上的值域为 $[\frac{1}{a}, 1]$, 若存在, 求出 a ; 若不存在, 说明理由.

思路分析: 求 $f(x)$ 的解析式, 需根据 $f(x)$ 的有关性质(奇偶数、周期性等)用待定系数法进行求解. 对于单调性的研究, 可以利用定义, 也可以利用导数的性质来进行研究. 值域(最值)的研究有时利用函数的单调性比较简单.

解: (1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$. 由题意, 得

$$f(x) = -f(-x) = -(x^2 + \frac{1}{3}x^3).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{3}x^3, & (x \geq 0), \\ -x^2 - \frac{1}{3}x^3, & (x < 0). \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) = -x^2 - \frac{1}{3}x^3$,

$$\therefore f'(x) = -2x - x^2.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -2$.

$\therefore$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数.

在区间 $(-2, 0)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.

(3) 显然 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的导函数是 $f'(x) = 2x - x^2$.

$$\therefore g(x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1.$$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, a]$ 上是减函数, 且 $g(1) = 1$.

$$\therefore g(a) = 2a - a^2 = \frac{1}{a}, \text{ 即 } a^3 - 2a^2 + 1 = 0.$$

$$\therefore (a-1)(a^2 - a - 1) = 0.$$

类题演练 1

已知 $f(x) = a^{x+b}$ ($a > 0, a \neq 1, b$ 为常数) 的图象经过点 $(1, 1)$, 且 $0 < f(0) < 1$, 设 $m = \frac{1}{2}[f^{-1}(x_1) + f^{-1}(x_2)]$, $n = f^{-1}(\frac{x_1 + x_2}{2})$, 其中 x_1, x_2 是两个不相等的正实数, 则 m 与 n 的大小关系是_____.

解析: 由已知 $a^{1+b} = 1, a \neq 1, \therefore b = -1$.

$$\text{又 } f(0) = a^b \in (0, 1), \therefore a > 1.$$

$$\therefore f(x) = a^{x-1}, f^{-1}(x) = 1 + \log_a x.$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}(1 + \log_a x_1 + 1 + \log_a x_2) = 1 + \frac{1}{2} \log_a (x_1 x_2) = 1 + \log_a \sqrt{x_1 x_2}.$$

$$n = 1 + \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2} \quad (x_1 \neq x_2), \therefore m < n.$$

答案: $m < n$

变式提升 1

设 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$, 且 $x \neq \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 且 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$. 如果 $f(x)$ 为奇函数, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3^x$.

(1) 求 $f(\frac{2007}{4})$;

(2) 当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, 求 $f(x)$;

(3) 是否存在这样的正整数 k , 使得当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\log_3 f(x) > x^2 - kx - 2k$ 有解?

解: (1) 由已知可得 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

$$\therefore f(\frac{2007}{4}) = f(500 + \frac{7}{4}) = f(\frac{7}{4})$$

$$= f(\frac{7}{4} - 2) = f(-\frac{1}{4}) = -f(\frac{1}{4}) = -3^{\frac{1}{4}}.$$

$$(2) \because 2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x - 2k < 1, -\frac{1}{2} < x - 2k - 1 < 0, 0 < 2k + 1 - x < \frac{1}{2}.$$

$$\therefore f(2k + 1 - x) = 3^{2k+1-x}.$$

$$\text{又 } f(2k + 1 - x) = f(1 - x) = -f(x - 1) = -f(x + 1) = \frac{1}{f(x)},$$



解得 $a=1$ (舍去) 或 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去) 或 $a=$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ 存在满足题意的实数 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

温馨提示

本题考查函数的奇偶性,运用导数求单调区间的方法,考查综合分析问题的能力.要注意题设条件对答案的影响:如将已知中的奇函数改为偶函数,如何求解解析式?(3)中的定义域改为 $[\frac{1}{2}, a]$ 又如何求解?请同学们认真思考.

二、关于抽象函数及其性质的研究

【例2】定义在 $(0, +\infty)$ 内的函数 $f(x)$, 对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$ 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 当且仅当 $x > 1$ 时 $f(x) > 0$ 成立.

(1) 设 $x, y \in (0, +\infty)$, 求证: $f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x)$;

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1) > f(x_2)$, 试比较 x_1, x_2 的大小;

(3) 解不等式 $f(\sqrt{a^x-1}) > f(a^x-3)$ ($0 < a < 1$).

思路分析: 抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图象, 只给出一些函数符号及其满足的条件的函数, 如函数的定义域、解析递推式、特定点的函数值、特定的运算性质等. 它是高中函数部分的难点, 也是大学高等数学函数部分与中学数学的一个衔接点. 由于抽象函数没有具体的解析表达式作为载体, 因此理解研究起来比较困难. 但由于此类试题既能考查函数的概念和性质, 又能考查学生的思维能力, 所以备受命题者的青睐, 那么怎样求解抽象函数问题呢? 我们可以利用“特殊模型法”“函数性质法”“特殊化方法”“联想类比转化法”等多种方法从多角度、多层次去分析研究抽象函数问题.

对于抽象函数的问题, 关键是根据给定的式子进行赋值或进行变量的代换.

有关抽象函数的不等式其实就是研究抽象函数的单调性, 在把抽象函数不等式转化为普通不等式时, 不能忘记抽象函数的定义域要求.

解: (1) $\because$ 对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$ 有, $f(x) + f(y) = f(xy)$,

$$\therefore f(\frac{y}{x}) + f(x) = f(\frac{y}{x} \cdot x) = f(y).$$

$$\therefore f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x).$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{f(2k+1-x)} = 3^{x-2k-1}.$$

$$(3) \because \log_3 f(x) > x^2 - kx - 2k,$$

$$\therefore x - 2k - 1 > x^2 - kx - 2k,$$

$$x^2 - (k+1)x + 1 < 0. \quad (*)$$

$$\Delta = (k+1)^2 - 4 = k^2 + 2k - 3.$$

① 若 $k=1$, 则 $\Delta=0$, (*) 式无解;

② 若 $k>1$, 则 $\Delta>0$, 从而

$$\begin{cases} \frac{k+1-\sqrt{k^2+2k-3}}{2} < x < \frac{k+1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2}, \\ 2k+\frac{1}{2} < x < 2k+1. \end{cases}$$

$$\text{但是 } \frac{k+1+\sqrt{k^2+2k-3}}{2} < \frac{k+1+\sqrt{k^2+2k+1}}{2} = k+1 < 2k+\frac{1}{2},$$

$$\therefore x \in \emptyset.$$

综上所述, 不存在满足条件的整数 k .

类题演练 2

设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 求实数 m 的取值范围.

解: 因为 $f(x)$ 是偶函数,

$$\text{所以 } f(-x) = f(x) = f(|x|),$$

$$\text{所以不等式 } f(1-m) < f(m) \Leftrightarrow f(|1-m|) < f(|m|).$$

又当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 是减函数.

$$\text{所以 } \begin{cases} |1-m| > |m|, \\ -2 \leq 1-m \leq 2, \\ -2 \leq m \leq 2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } -1 \leq m < \frac{1}{2}.$$

变式提升 2

已知定义在区间 $(-m, m)$ ($m>0$) 上, 值域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: ① 当 $0 < x < m$ 时, $f(x) > 0$; ② 对于定义域内任意的实数 a 、

$$b \text{ 均满足: } f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}.$$

(1) 试求 $f(0)$;

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若函数 $f(x)$ 存在反函数 $g(x)$, 当 $n \in \mathbf{N}$ 时, 求证: $g(\frac{1}{7}) +$

$$g(\frac{1}{13}) + \dots + g(\frac{1}{n^2+3n+3}) < g(\frac{1}{2}).$$

$$(1) \text{ 解: 令 } a=0, b=0, \text{ 则有 } f(0) = \frac{f(0)+f(0)}{1-f^2(0)},$$

$$\therefore f(0)=0.$$

$$(2) \text{ 解: 令 } a=x, b=-x, \text{ 得 } f(x) + f(-x) = 0.$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

设任意的 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2 < m$, 则 $m > x_2 - x_1 > 0$,

$$\therefore f(x_2 - x_1) > 0 \text{ 且 } f(x_2)f(x_1) > 0.$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1)$$

$$= f[x_2 + (-x_1)][1 - f(x_2)f(-x_1)]$$

$$= f(x_2 - x_1)[1 + f(x_2)f(x_1)] > 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ ($m>0$) 上单调递增.



$$(2) \because f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > 1 \Leftrightarrow x_1 > x_2, \therefore x_1 > x_2.$$

(3) 由(2)知, $f(x)$ 是在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 于是 $f(\sqrt{a^x-1}) > f(a^x-3)$ 等价于

$$\begin{cases} \sqrt{a^x-1} > 0, \\ a^x-3 > 0, \\ \sqrt{a^x-1} > a^x-3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x-3 > 0, \\ \sqrt{a^x-1} > a^x-3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ a^x-1 > (a^x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ a^{2x}-7a^x+10 < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ (a^x-2)(a^x-5) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x > 3, \\ 2 < a^x < 5, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 < a^x < 5 \Leftrightarrow \log_a 3 > x > \log_a 5.$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(\log_a 5, \log_a 3)$

$(0 < a < 1).$

温馨提示

本题将函数与不等式两大不同的知识块在网络交汇处融为一体, 具有很强的综合性和时代性. 高考试题中, 对于解不等式要求较高, 往往与二次函数、指数函数、对数函数等有关概念和性质密切相关.

从近几年的高考试题来看, 解不等式的内容年年都有, 有的是直接考查解不等式, 有的则是间接考查解不等式(如本例), 其难度系数一般在 0.6 左右. 对不等式的的基本性质以及各种类型的不等式的解法要求熟练掌握, 对思维能力和运算化简能力有较高要求.

三、函数性质的实际应用

【例3】通过研究学生的学习行为, 心理学家发现, 学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间, 讲座开始时, 学生的兴趣激增; 中间有一段不太长的时间, 学生的兴趣保持较理想的状态, 随后学生的注意力开始分散, 分析结果和实验表明, 用 $f(x)$ 表示学生掌握和接受概念的能力($f(x)$ 值越大, 表示接受的能力越强), x 表示提出和讲授概念的时间(单位: 分), 可有以下的公式:

$$f(x) = \begin{cases} -0.1x^2 + 2.6x + 43, & (0 < x \leq 10), \\ 59, & (10 < x \leq 16), \\ -3x + 107, & (16 < x \leq 30). \end{cases}$$

- (1) 开讲后多少分钟, 学生的接受能力最强? 能维持多少时间?
- (2) 开讲后 5 分钟与开讲后 20 分钟比较, 学生的接受能力何时强一些?
- (3) 一个数学难题, 需要 55 的接受能力以及 13 分钟时间, 老师能否及时在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这个难题?

又函数 $f(x)$ 为奇函数且 $f(0)=0$,

因此函数 $f(x)$ 在区间 $(-m, m)$ ($m>0$) 上单调递增.

(3) 证明: $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-m, m)$ ($m>0$) 上单调递增,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 必存在反函数 $g(x)$, 且 $g(x)$ 也为奇函数,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

且当 $x>0$ 时, $m>g(x)>0$.

$$\text{由 } f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)} \text{ 可得: } a+b = g\left[\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}\right],$$

令 $f(a)=x, f(b)=y$, 则 $a=g(x), b=g(y)$, 则上式可改写

为: $g(x)+g(y) = g\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ 都成立.

$$\therefore \frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+2)+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2}},$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right) = g\left(\frac{1}{n+1}\right) + g\left(-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= g\left(\frac{1}{n+1}\right) - g\left(\frac{1}{n+2}\right);$$

$$g\left(\frac{1}{7}\right) + g\left(\frac{1}{13}\right) + g\left(\frac{1}{21}\right) + \cdots + g\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$$

$$= \left[g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{3}\right)\right] + \left[g\left(\frac{1}{3}\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \cdots + \left[g\left(\frac{1}{n+1}\right) -$$

$$g\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{n+2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right).$$

类题演练 3

能源紧缺是一个社会问题, 为合理用电, 缓解电力紧张, 某市将试行“峰谷电价”计费方法, 在高峰用电时段, 即居民户每日 8 时至 22 时, 电价为每千瓦时 0.56 元, 其余时段电价为每千瓦时 0.28 元. 而目前没有实行“峰谷电价”的居民户电价为每千瓦时 0.53 元, 若总用电量为 S 千瓦时, 设高峰时段用电量为 x 千瓦时.

(1) 写出实行“峰谷电价”的电费 $y_1 = g_1(x)$ 及现行电价的电费 $y_2 = g_2(S)$ 的函数解析式及电费总差额 $f(x) = y_2 - y_1$ 的解析式;

(2) 对于用电量按时均等的电器(在任何相同的时间内, 用电量相同), 采用峰谷电价的计费方法后是否能省钱?

(3) 若每户实行“峰谷电价”的居民需缴纳安装“分时段电能计量表”的成本费 100 元. 在用电量按时均等的条件下, 一户居民要在一年内收回安装“分时段电能计量表”的成本费, 每户每月用电至少要不低多少千瓦时(结果取整数)?

解: (1) 若总用电量为 S 千瓦时, 设高峰时段用电量为 x 千瓦时, 则低谷时段用电量为 $(S-x)$ 千瓦时, $y_1 = 0.56x + (S-x) \times 0.28 = 0.28S + 0.28x, y_2 = 0.53S$.



思路分析:高考中,借助函数知识解应用题一直是考查的重点,而且背景越来越广泛.解应用题的关键是如何把实际问题转化为数学问题.因而审题时要着重弄清楚题目中涉及到哪些量,这些量之间存在哪些联系,如何建立函数关系式等.本例已给出解析式,重点是要明白解析式中两变量的实际意义.

解:(1)当 $0 < x \leq 10$ 时,

$f(x) = -0.1x^2 + 2.6x + 43 = -0.1 \times (x - 13)^2 + 59.9$,故 $f(x)$ 递增,

最大值为 $f(10) = -0.1 \times (-3)^2 + 59.9 = 59$;

当 $16 < x \leq 30$ 时, $f(x)$ 递减,

$f(x) < -3 \times 16 + 107 = 59$.

因此,开讲后 10 分钟,学生达到最高的接受能力(值为 59),并维持 6 分钟.

(2) $f(5) = -0.1 \times (5 - 13)^2 + 59.9 = 59.9 - 6.4 = 53.5$, $f(20) = -3 \times 20 + 107 = 47 < 53.5$.

因此开讲后 5 分钟,学生的接受能力比开讲 20 分钟强一些.

(3)当 $0 < x \leq 10$ 时,令 $f(x) = 55$,

则 $-0.1 \times (x - 13)^2 = -4.9$,

$(x - 13)^2 = 49$,所以 $x = 20$ 或 6,但 $0 < x \leq 10$,故 $x = 6$.

则 $16 < x \leq 30$ 时,令 $f(x) = 55$,

则 $-3x + 107 = 55$,所以 $x = 17 \frac{1}{3}$.

因此学生达到(或超过)55 的接受能力的时间为 $17 \frac{1}{3} - 6 = 11 \frac{1}{3} < 13$ (分钟),老师来不及在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这道难题.

温馨提示

此题是一道分段函数、二次函数性质的题目,通过方程、不等式的互相转化,使问题得以解决.同时也考查了基本计算能力和理解能力.

电费总差额

$f(x) = y_2 - y_1 = 0.25S - 0.28x$ ($0 \leq x \leq S$).

(2)可以省钱.

令 $f(x) > 0$,即 $0.25S - 0.28x > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{S} < \frac{25}{28}$.

对于用电量按时均等的电器而言,高峰用电时段的时间与总时间的比为 $\frac{14}{24} = \frac{7}{12} < \frac{25}{28}$,能保证 $f(x) > 0$,即 $y_1 < y_2$.

所以用电量按时均等的电器采用“峰谷电价”的计费方法后能省钱.

(3)由(2)知,根据按时均等用电可知: $\frac{x}{S} = \frac{7}{12}$,即 $x = \frac{7}{12}S$.

令 $f(x) = 0.25S - 0.28x \geq 100$,即 $0.25S - 0.28 \times \frac{7}{12}S \geq 100$,

得 $S \geq 1154$.

答:每月用电量至少不低于 97 千瓦时,才能在一年内收回成本.

变式提升 3

现代社会对破译密码的要求越来越高,有一种密码把英文的明文(真实文)按字母分解,其中英文字母按顺序 $a, b, c, \dots, x, y, z$ (不分大小写)依次对应 $1, 2, 3, 4, \dots, 25, 26$ 这 26 个自然数.给出如下变换公式:

$$x' = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & (x \in \mathbf{N}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 不能被 } 2 \text{ 整除}), \\ \frac{x}{2} + 13, & (x \in \mathbf{N}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 能被 } 2 \text{ 整除}). \end{cases}$$

将明文转换为密文,如 $8 \rightarrow \frac{8}{2} + 13 = 17$,即 h 变为 q ; $5 \rightarrow \frac{5+1}{2} = 3$,即 e 变为 c .按上述规定,将明文 *good* 译成密文是_____.

解析: $g \rightarrow 7 \rightarrow \frac{7+1}{2} = 4 \rightarrow d$, $o \rightarrow 15 \rightarrow \frac{15+1}{2} = 8 \rightarrow h$, $d \rightarrow 4 \rightarrow \frac{4}{2} + 13 = 15 \rightarrow o$.

答案: *dhho*



决胜新高考

基础过关

1 若函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$,则 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 _____ ()

A. $[0, \frac{5}{2}]$

B. $[-1, 4]$

C. $[-5, 5]$

D. $[-3, 7]$

解析: $\because x \in [-2, 3], \therefore x+1 \in [-1, 4]$,令 $-1 \leq 2x-1 \leq 4$,解得 $x \in [0, \frac{5}{2}]$.

答案: A

2 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数 $y = f(x)$ 又是减函数,且 $f(a-3) + f(9-a^2) < 0$,则 a 的取值范围是 _____ ()



- A. $(2\sqrt{2}, 3)$ B. $(3, \sqrt{10})$
C. $(2\sqrt{2}, 4)$ D. $(-2, 3)$

解析: $\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数又是减函数, 且 $f(a-3) + f(9-a^2) < 0, \therefore f(a-3) < f(a^2-9),$

$$\therefore \begin{cases} -1 < a-3 < 1, \\ -1 < a^2-9 < 1, \\ a-3 > a^2-9. \end{cases} \therefore a \in (2\sqrt{2}, 3).$$

答案:A

- 3 若 $a > 1$ 且 $a^{-x} + \log_a y < a^{-y} + \log_a x$, 则 x, y 之间的关系为 ()

- A. $x > y > 0$ B. $x = y = 0$
C. $y > x > 0$ D. 不能确定, 与 a 取值有关

解析: 构造函数 $f(x) = \log_a x - a^{-x}$. $\because a > 1, \therefore f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数. 由 $a^{-x} + \log_a y < a^{-y} + \log_a x \Leftrightarrow \log_a x - a^{-x} > \log_a y - a^{-y}, \therefore x > y > 0.$

答案:A

- 4 已知当 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 时, $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $x_1, x_2, \dots, x_{2006} \in \mathbf{R}^+$, 且 $f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2006}) = 8$, 则 $f(x_1^2) + f(x_2^2) + \dots + f(x_{2006}^2)$ 的值为

解析: 由已知可得 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2006}) = 8$, 又 $f(x_1^2) + f(x_2^2) + \dots + f(x_{2006}^2) = 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2006})] = 2 \times 8 = 16.$

答案:16

- 5 2006 广东汕头模拟, 12 给定实数 x , 定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, $\{x\}$ 为 x 的小数部分, 且 $x = [x] + \{x\}$, 则下列结论: ① $x-1 < [x] \leq x$; ② $x - [x]$ 是周期函数; ③ $x - [x]$ 是偶函数; ④ $-1 < \{x\} < 1$.

其中不正确的是

解析: 由 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 可得 $x-1 < [x] \leq x$, 即①正确; 又 $(x+1) - [x+1] = x - [x]$, 即 $x - [x]$ 是周期函数, 即②正确; 而 $2.2 - [2.2] = 0.2, -2.2 - [-2.2] = -2.2 + 3 = 0.8$, 即 $x - [x]$ 不是偶函数, ③不正确; 由 $x = [x] + \{x\}$, 即 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 可得 $0 \leq \{x\} < 1$, 即④不正确. 故应填③④.

答案:③④

- 6 设函数 $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x} - 1$ (a 为实数).

(1) 若 $a < 0$, 用函数单调性定义证明: $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 若 $a = 0, y = g(x)$ 的图象与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 求函数 $y = g(x)$ 的解析式.

(1) 证明: 设任意实数 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = (2^{x_1} + a \cdot 2^{-x_1} - 1) - (2^{x_2} + a \cdot 2^{-x_2} - 1)$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) + a(2^{-x_1} - 2^{-x_2}) = (2^{x_1} - 2^{x_2}) \cdot$$

$$\frac{2^{x_1+x_2}-a}{2^{x_1+x_2}}.$$

$$\because x_1 < x_2, \therefore 2^{x_1} < 2^{x_2}, \therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0;$$

$$\because a < 0, \therefore 2^{x_1+x_2} - a > 0.$$

又 $2^{x_1+x_2} > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x)$ 是增

函数.

(2) 解析: 当 $a = 0$ 时, $y = f(x) = 2^x - 1, \therefore 2^x = y + 1,$
 $\therefore x = \log_2(y+1), y = g(x) = \log_2(x+1).$

能力提升

- 7 2006 山东高三综合测试(一), 13 二次函数 $f_1(x),$

$f_2(x)$ 满足条件: (1) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增; (2) $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 对任意实数

$x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 都有 $\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} < g(\frac{x_1 + x_2}{2})$, 则

$f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}}, f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$ (写出符合条件的一组即可)

解析: 由二次函数 $f_1(x), f_2(x)$ 满足条件: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增可得, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 必为一次函数, 且一次项系数为正, 两个二次函

数的二次项系数互为相反数; 又由 $\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} <$

$g(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 可得二次函数 $g(x)$ 开口向下, 由此可得二次

函数 $f_1(x)$ 二次项系数为负, $f_2(x)$ 二次项系数为正. 故可得答案 $f_1(x) = -x^2 + x, f_2(x) = x^2.$ (写出任意一组符合上述条件的二次函数都可以)

答案: $-x^2 + x \quad x^2$

- 8 设函数 $f(x) = \frac{mx+2}{x-1}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

(1) 求 m 的值, 并用定义判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若直线 $y = a (a \in \mathbf{R})$ 与 $f(x)$ 的图象无公共点, 且

$$f(|t-2| + \frac{3}{2}) < 2a + f(4a), \text{ 求实数 } t \text{ 的取值范围.}$$

解: 由 $y = \frac{mx+2}{x-1}$ 得 $x = \frac{y+2}{y-m}, \therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-m}.$

(1) 由已知得, $f(x) = f^{-1}(x),$

$$\therefore m = 1. \text{ 从而 } f(x) = \frac{x+2}{x-1}.$$

对任意 $1 < x_1 < x_2$, 则

$$x_2 - x_1 > 0, x_2 - 1 > 0, x_1 - 1 > 0.$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1+2}{x_1-1} - \frac{x_2+2}{x_2-1} =$$

$$\frac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0,$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2).$$

$\therefore$ 由定义得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数.

(2) 由(1)知, $f(x) = 1 + \frac{3}{x-1} \neq 1$, 即 $f(x)$ 值域为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

$\therefore$ 由已知得: $a = 1,$

$$\text{于是, } f(|t-2| + \frac{3}{2}) < 2a + f(4a) \Leftrightarrow f(|t-2| + \frac{3}{2}) < 2 + f(4) = 4 = f(2).$$

$$\frac{3}{2} < 2 + f(4) = 4 = f(2).$$

$$\text{由①可得: } |t-2| + \frac{3}{2} > 2, \text{ 即 } |t-2| > \frac{1}{2},$$

$$\therefore t < \frac{3}{2} \text{ 或 } t > \frac{5}{2}.$$

挑战高分

9 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 为实数) $x \in \mathbf{R}, F(x)$

$$= \begin{cases} f(x), & (x > 0), \\ -f(x), & (x < 0). \end{cases}$$

(1) 若 $f(-1) = 0$, 且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 $F(x)$ 的表达式;

(2) 在(1)的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围;

(3) 设 $m \cdot n < 0, m + n > 0, a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 判断 $F(m) + F(n)$ 能否大于零?

解: (1) $\because f(-1) = 0, \therefore a - b + 1 = 0.$

又 $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore \begin{cases} a > 0, \\ \Delta = b^2 - 4a \leq 0, \end{cases} \therefore b^2 - 4(b - 1) \leq 0, b = 2, a = 1.$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} (x + 1)^2, & (x > 0), \\ -(x + 1)^2, & (x < 0). \end{cases}$$

$$(2) g(x) = f(x) - kx = x^2 + 2x + 1 - kx = x^2 + (2 - k)x + 1 = (x + \frac{2 - k}{2})^2 + 1 - \frac{(2 - k)^2}{4},$$

$$\text{当 } \frac{k - 2}{2} \geq 2 \text{ 或 } \frac{k - 2}{2} \leq -2 \text{ 时,}$$

即 $k \geq 6$ 或 $k \leq -2$ 时, $g(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是单调函数.

(3) $\because f(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(x) = ax^2 + 1, F(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & (x > 0), \\ -ax^2 - 1, & (x < 0). \end{cases}$$

$\because m \cdot n < 0$, 设 $m > n$, 则 $n < 0$.

又 $m + n > 0, m > -n > 0, \therefore |m| > |-n|.$

$$F(m) + F(n) = f(m) - f(n)$$

$$= (am^2 + 1) - (an^2 - 1) = a(m^2 - n^2) > 0,$$

$\therefore F(m) + F(n)$ 能大于零.

2. 函数的图象



考什么?



怎么考?



1. 奇函数的图象关于原点对称; 偶函数的图象关于 y 轴对称.

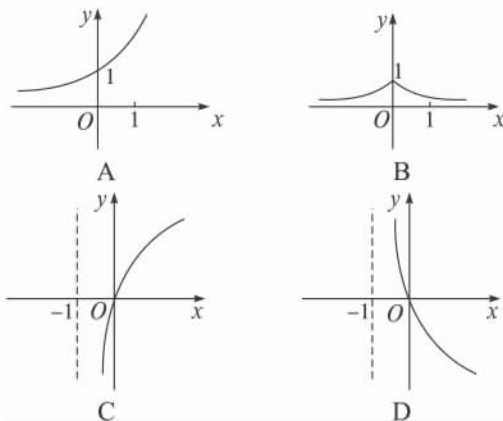
2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

3. 若函数 $f(x)$ 在定义域内有 $f(x) = f(a - x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a}{2}$ 对称.

4. 函数 $f(x)$ 与反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

5. 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(x)$ 的图象关于 x 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(-x)$ 的图象关于原点对称.

【预测考题 1】2006 广东中山月考, 8 设 $a > 1$, 实数 x, y 满足 $|x| - \log_a \frac{1}{y} = 0$, 则 y 关于 x 的函数的图象形状大致是 ()



解析: $\because |x| = \log_a \frac{1}{y}, \therefore |x| = -\log_a y, y = a^{-|x|} (a > 1), x \in \mathbf{R}, y > 0$. 故 C、D

均为错误, 令 $x = 1$, 则 $y = a^{-1} = \frac{1}{a} < 1$, 选 B.



6. 若函数 $f(x)$ 在定义域内满足 $f(x) = f(a+x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象向左或向右平移 $|a|$ 个单位后, 能与原来的图象完全重合.

答案: B

【预测考题 2】2006 山东烟台期末, 21 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \in \mathbf{Z})$ 为偶函数, 对于 $x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 1$ 恒成立, 且 $f(1) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $F(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)}, & (0 \leq x \leq 1), \\ -\sqrt{f(x)}, & (-1 \leq x < 0), \end{cases}$ 求 $F(x) + \sqrt{3}x$ 的取值范围;

解: (1) $\because f(-x) = f(x), \therefore b = 0$.

$\because f(1) = 0, \therefore a + c = 0$.

又 $\because f(x) = ax^2 + c \leq 1$ 恒成立, $\therefore a < 0, c \leq 1. \therefore 0 > a \geq -1$.

由 $a \in \mathbf{Z}$, 得 $a = -1, c = 1, f(x) = 1 - x^2$.

(2) $F(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & (0 \leq x \leq 1), \\ -\sqrt{1-x^2} & (-1 \leq x < 0). \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $F(x) + \sqrt{3}x = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x \in [1, 2]$.

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $F(x) + \sqrt{3}x = -\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x = -F(-x) + \sqrt{3}x \in [-2, -1]$.

$\therefore F(x) + \sqrt{3}x$ 的取值范围是 $[-2, -1] \cup [1, 2]$.



巧做新高考



三点新释

一、函数的图象关于点或直线对称或利用对称性解题

【例 1】已知函数 $f(x) = -\frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}} (a > 0, a \neq 1)$.

(1) 证明函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称;

(2) 求 $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ 的值.

思路分析: 如何证明函数的图象关于点或直线对称? 即在图象上任取一点 $A(x, y)$, 并设点 A 关于点或直线的对称点为 $B(x_0, y_0)$, 再证明点 B 也在函数的图象上即可. 根据这种对称性, 可以研究某些函数值之间的关系.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数, 任取一点 (x, y) , 它关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称的点的坐标为 $(1-x, -1-y)$. 由已知, $y = -\frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}}$,

$$\text{则 } -1-y = -1 + \frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}} = -\frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}},$$

$$f(1-x) = -\frac{\sqrt{a}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{a}}{\frac{a}{a^x} + \sqrt{a}}$$

类题演练 1

函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+4| + |x-3|}$ 的图象关于 ()

A. x 轴对称

B. 直线 $y = x$ 对称

C. 原点对称

D. y 轴对称

解析: 由 $1-x^2 \geq 0, |x| \leq 1; x+4 > 0, x-3 < 0, \therefore$ 函数 $y =$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+4+3-x}, \text{ 即 } y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{7}. \text{ 故选 D.}$$

答案: D

变式提升 1

设函数 $f(x)$ 满足:

① 对任意实数 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1)f(x_2)$;

② 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称;

③ $f(x)$ 不恒为零, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) < 1$.

(1) 求证: $f(x)$ 为偶函数;

(2) 求证: $f(x)$ 是周期函数;

(3) 求 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(\frac{6}{3}) + \dots + f(\frac{2005}{3})$.

(1) 证明: 因 $f(x)$ 不恒为零, 故存在 x_0 , 使得 $f(x_0) \neq 0$. 令 $x_1 = x_0, x_2 = 0$, 由条件①得 $f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)f(0)$, 即 $2f(x_0)$

$$= -\frac{\sqrt{a} \cdot a^x}{a + \sqrt{a} \cdot a^x} = -\frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}},$$

$$\therefore -1 - y = f(1 - x).$$

即函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 对称.

(2) 解: 由 (1) 有 $-1 - f(x) = f(1 - x)$.

$$\text{即 } f(x) + f(1 - x) = -1.$$

$$\therefore f(-2) + f(3) = -1,$$

$$f(-1) + f(2) = -1.$$

$$f(0) + f(1) = -1.$$

$$\text{则 } f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = -3.$$

温馨提示

这是证明对称性的一般方法. 如果没有 (1), 只有 (2), 则必须先研究对称性才能从中找到规律即自变量和为 1 的两个函数值之间的关系. 请同学们从这道例题总结类似问题的解法.

二、关于二次函数的问题

【例2】已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2x + x^2$.

(1) 求 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在这样的正数 a, b , 当 $x \in [a, b]$ 时

$g(x) = f(x)$, 且 $g(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$? 若存

在, 求出所有的 a, b 的值; 若不存在, 请说明理由.

思路分析: 二次函数在高中数学和大学数学中是极其重要的内容, 应用相当广泛, 借助于图象可与一元二次方程, 一元二次不等式有机地联系起来. 给定定义域求值域, 常常带有字母参数, 这时关于定义域与对称轴位置关系的讨论就是一个重要的考查点. 借助于函数的图象, 研究一元二次方程根的分布也是一个重要考点.

解: (1) 任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

$$\therefore f(-x) = -2x + (-x)^2.$$

对 $f(x)$ 是奇函数, $-f(x) = -2x + x^2$,

$$\text{即 } f(x) = 2x - x^2 (x > 0).$$

(2) 分下述三种情况:

① 当 $0 < a < b \leq 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 即当 $x > 0$ 时,

$\times [f(0) - 1] = 0$, 因 $f(x_0) \neq 0$, 故 $f(0) = 1$.

再令 $x_1 = 0, x_2 = x$, 由条件①得 $f(x) + f(-x) = 2f(0) \cdot f(x) = 2f(x)$, 故 $f(x) = f(-x)$, 从而 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 证明: 由条件②有: $f(1+x) = f(1-x)$, 即 $f(x) = f(2-x)$, 也即 $f(-x) = f(2+x)$, 又 $f(x)$ 为偶函数, 故有 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x+2) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

(3) 解: $\because f(x)$ 是周期为 2 的函数, $\therefore f(2) = f(0) = 1$, 令 $x_1 = x_2 = 1$, 由条件①得 $f(2) + f(0) = 2f^2(1)$, $\therefore f^2(1) = 1$.

又因 $f(1) < 1$, 故 $f(1) = -1$.

又令 $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$, 由条件①得

$$f(\frac{2}{3}) + f(0) = 2f^2(\frac{1}{3}). \quad (*)$$

令 $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$, 由条件①得

$$f(1) + f(\frac{1}{3}) = 2f(\frac{2}{3}) \cdot f(\frac{1}{3}). \quad (**)$$

由 $(*)$ $(**)$ 联立求得 $f(\frac{1}{3}) = -1$ 或 $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$.

若 $f(\frac{1}{3}) = -1$, 由 $(*)$ 得 $f(\frac{2}{3}) = 1$, 不满足条件③, 从而 $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}, f(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}$.

又由条件②有 $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{5}{3}), f(\frac{4}{3}) = f(\frac{2}{3})$, 故 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(\frac{6}{3}) = 0$.

又由于 $f(x)$ 的周期为 2,

$$\text{故原式} = 334 \times 0 + f(\frac{2005}{3}) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}.$$

类题演练 2

已知关于 x 的方程 $x^2 + (\frac{1}{2} - 2m)x + m^2 - 1 = 0$ (m 是与 x 无关的实数) 的两个实根在区间 $[0, 2]$ 内, 求 m 的取值范围.

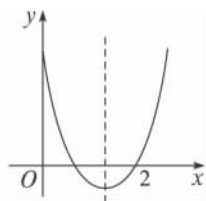
解: 设函数 $f(x) = x^2 + (\frac{1}{2} - 2m)x + m^2 - 1$,

由右图知, 方程的两根都在区间 $[0, 2]$ 内的充要条件为

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} - 2m)^2 - 4(m^2 - 1) \geq 0, \\ 0 < -\frac{\frac{1}{2} - 2m}{2} < 2, \\ f(0) = m^2 - 1 \geq 0, \\ f(2) = 4 + 2(\frac{1}{2} - 2m) + m^2 - 1 \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m \leq \frac{17}{8}, \\ \frac{1}{4} < m < \frac{9}{4}, \\ m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 1, \\ (m-2)^2 \geq 0. \end{cases}$$

故 m 的取值范围为 $[1, \frac{17}{8}]$.





$f(x)$ 的最大值为 1, 故此时不可能使 $g(x)=f(x)$.

②若 $0 < a < 1 < b$ 时, 此时若 $g(x)=f(x)$, 则 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=f(1)=1$ 而 $\frac{1}{a}=1$ 得 $a=1$, 这与 $0 < a < 1 < b$ 矛盾.

③若 $1 \leq a < b$, 因为当 $x \geq 1$ 时, $f(x)$ 是减函数, 则 $f(x)=g(x)=2x-x^2$, 于是有

$$\begin{cases} \frac{1}{b}=g(b)=-b^2+2b \\ \frac{1}{a}=g(a)=-a^2+2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a^2-a-1)=0, \\ (b-1)(b^2-b-1)=0. \end{cases}$$

当注意到 $1 \leq a < b$ 时, 解得 $a=1, b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 故当 $a=1, b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时满足题意.

温馨提示

本例对称轴 $x=1$ 是固定的, 讨论定义域 $[a, b]$ 与对称轴 $x=1$ 的位置关系就分三种情况, 需要结合图象帮助分析, 以寻找最大值和最小值的位置.

三、利用函数图象解题

【例3】求函数 $u=\sqrt{2t+4}+\sqrt{6-t}$ 的最值.

思路分析: 本例带有两个根式, 如何去掉根号是关键. 显然需要用换元法, 只换一个根号, 如令 $x=\sqrt{2t+4}$, 则增加了一个新元且仍有一个根号, 不合适. 因此需要把两个根号全换元. 换元的过程需要注意新元的取值范围.

解: 令 $x=\sqrt{2t+4}, y=\sqrt{6-t}$,

则 $x^2+2y^2=16 (0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\sqrt{2})$

所给函数化为以 u 为

参数的直线系 $y=-x+u$

u , 它与椭圆 $x^2+2y^2=16$

在第一象限的部分 (包括

端点) 有公共点, 如右图所

示, $u_{\min}=2\sqrt{2}$, 相切于第

一象限时 $u_{\max}$, 此时由方程组: $\begin{cases} y=-x+u, \\ x^2+2y^2=16. \end{cases}$

得 $3x^2-4ux+2u^2-16=0$.

解 $\Delta=0$, 得 $u=\pm 2\sqrt{6}$,

又直线在第一象限, 故 $u_{\max}=2\sqrt{6}$.

温馨提示

该题若用常规法较难求解, 但换元以后可借助线性归划的思想, 再运用数形结合则起到了事半功倍的效果. 考查了逻辑思维, 计算与迁移能力, 以及化归与转化的思想.

变式提升 2

已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0, a \in \mathbb{N}^*$, 问 a 为何值时, 方程至少有一个整数解?

解: 将原方程化为 $a(x+2)^2=2x+7$, 显然 $x \neq -2$,

$$\therefore a = \frac{2x+7}{(x+2)^2} (x \neq -2).$$

$$\therefore a \in \mathbb{N}^*,$$

$$\therefore 2x+7 \geq (x+2)^2, \text{ 解得:}$$

$$-3 \leq x \leq 1, \text{ 且 } x \in \mathbb{Z}, x \neq -2,$$

$$\therefore x \text{ 只能在 } -3, -1, 0, 1 \text{ 中取值.}$$

验证得: 仅当 $x=-3, x=-1$ 时 a 为正整数, 代入求得 $a=1$ 或 $a=5$.

类题演练 3

已知函数 $f(x)=|x^2+2x|$, 若关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同的实数解, 则 b, c 的大小关系为 ()

A. $b > c$

B. $b \geq c$ 与 $b \leq c$ 中至少有一个正确

C. $b < c$

D. 不能判定

解析: 令 $f(x)=t$, 则 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ ① 变为 $t^2+bt+c=0$ ②, 要使 ① 有

7 个解, 即 ② 必须有两解, 即 $f(x)=$

$|x^2+2x|$ 与 $f(x)=t$ 有 7 个交点 (如

右图), 所以方程 ② 必有两个解, 而

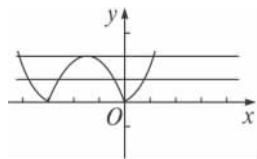
$f(x)=t$ 中的一条直线必过 $f(x)=x^2+2x$ 的顶点, 故 ② 式有一

解为 $t_1=1$, 另一直线与 $f(x)=|x^2+2x|$ 的图象有 4 个交点, 故

② 式的另一解 t_2 必在 $(0, 1)$ 上, 所以 $t_1+t_2=-b > 0 \Rightarrow b < 0, t_1t_2$

$=c > 0$, 所以 $b < c$, 故选 C.

答案: C



变式提升 3

设 $y=(\log_2 x)^2+(t-2)\log_2 x-t+1$, 若 t 在 $[-2, 2]$ 上变化时, y 恒取正值, 求实数 x 的取值范围.

解: 设 $y=f(t)=(\log_2 x-1)t+[(\log_2 x)^2-2\log_2 x+1]$, 则 $f(t)$ 为一次函数. 当 $t \in [-2, 2]$ 时, $f(t) > 0$ 恒成立,

$$\text{则 } \begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(2) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 > 0, \\ (\log_2 x)^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

$$\therefore \log_2 x < -1 \text{ 或 } \log_2 x > 3, \therefore 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 8.$$

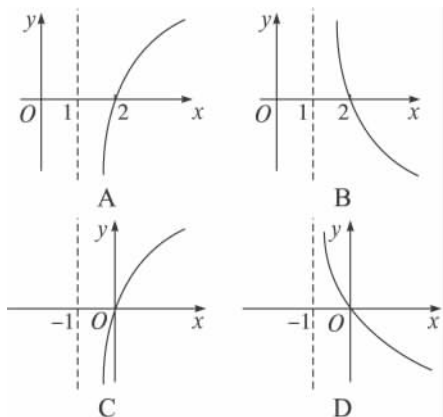
故 x 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}) \cup (8, +\infty)$.



决胜新高考

基础过关

- 1 若奇函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 那么 $g(x) = \log_a(x+k)$ 的大致图象是 ()



解析: $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x).$$

$$\therefore ka^{-x} - a^x = a^{-x} - ka^x.$$

$$\therefore k = 1.$$

又 $f(x)$ 为增函数,

$$\therefore f(x) = a^x - a^{-x} \text{ 为增函数,}$$

$$\text{则 } a > 1 \text{ 即 } g(x) = \log_a(x+1) \text{ (} a > 1 \text{).}$$

$\therefore$ 图象为 C.

答案: C

- 2 设二次函数 $f(x) = x^2 - x + a$ ($a > 0$), 若 $f(m) < 0$, 则 $f(m-1)$ 的值为 ()
- A. 正数
B. 负数
C. 非负数
D. 正数、负数和零都有可能

解析: $\because f(x) = x^2 - x + a$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$, 且 $f(1) > 0$,

$$f(0) > 0, \text{ 而 } f(m) < 0,$$

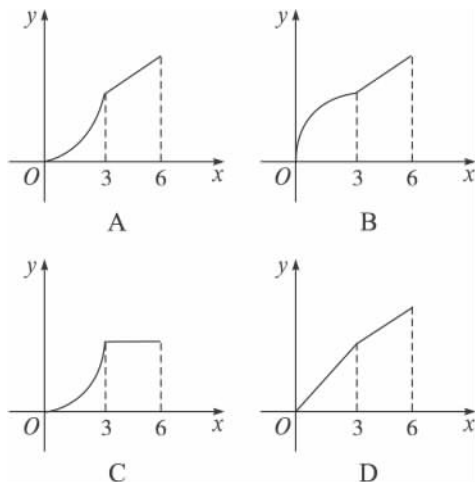
$$\therefore m \in (0, 1),$$

$$\therefore m-1 < 0,$$

$$\therefore f(m-1) > 0.$$

答案: A

- 3 某工厂六年来生产某种产品的情况是: 前三年年产量的增长速度越来越快, 后三年年产量保持不变, 则该厂六年来这种产品的总产量与时间 t 的函数关系可用图象表示的是 ()



解析: 前三年年产量的增长速度越来越快, 总产量 C 与时间 t (年) 的函数关系, 在图上反映出来, 当 $t \in [0, 3]$ 时是选项 A、C 中的形状; 又后三年年产量保持不变, 总产量 C 与时间 t (年) 的函数关系应如选项 A 所示. 于是选 A.

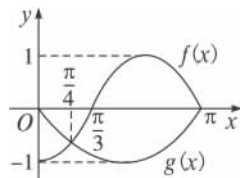
答案: A

- 4 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} & (x \neq 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 3 个不同的实数解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 等于

解析: 关于 $f(x)$ 的方程有两个重根 1 或有一根 1 和一非正根, x_1, x_2, x_3 为 $f(x) = 1$ 的三个根, 三根分别为 0, 1, 2, 故 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

答案: 5

- 5 已知函数 $y = f(x)$ 是偶函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 它们的定义域为 $[-\pi, \pi]$, 且它们在 $x \in [0, \pi]$ 上的图象如右图所示, 则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 的解集为



解析: 由已知画出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象, 根据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同号, 得到答案: $(-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (0, \frac{\pi}{3})$.

答案: $(-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (0, \frac{\pi}{3})$

- 6 已知函数 $f(x) = kx + b$ 的图象与 x 、 y 轴分别相交于点 A 、 B , $\vec{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ($\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 分别是与 x 、 y 轴正半轴同方向的单位向量), 函数 $g(x) = x^2 - x - 6$.

(1) 求 k 、 b 的值;

(2) 当 x 满足 $f(x) \geq g(x)$ 时, 若 $g(x) \geq -5x + m$ 恒成



立,求 m 的取值范围.

解:(1)由已知得 $A(-\frac{b}{k}, 0), B(0, b)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (\frac{b}{k}, b)$,

于是 $\frac{b}{k} = 2, b = 2$.

$\therefore k = 1, b = 2$.

(2)由 $f(x) \geq g(x)$, 得 $x + 2 \geq x^2 - x - 6$, 即 $(x + 2)(x - 4) \leq 0$, 得 $-2 \leq x \leq 4$,

由题意, 得: $x^2 - x + 6 \geq -5x + m$ 对任意的 $x \in [-2, 4]$ 恒成立.

记 $h(x) = x^2 + 4x + 6 - m$, 其对称轴方程为: $x = -2$.

$\therefore h(x)$ 在 $x \in [-2, 4]$ 是单调递增函数.

$\therefore h(x)_{\min} = h(-2) = 2 - m$.

由 $x^2 - x + 6 \geq -5x + m$ 对任意的 $x \in [-2, 4]$ 恒成立, 得 $2 - m \geq 0$, 解得: $m \leq 2$.

能力提升

7 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2$ 的公共点的个数为

解析: 根据函数的定义, 对于每一个 x 的值, 都有唯一的 y 的值和它相对应. 由于定义域未知, 故答案为 0 个或 1 个.

答案: 0 个或 1 个

8 2006 广东湛江测试(二), 19 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = g(2 - x)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时 $g(x) = 2a(x - 2) - 4(x - 2)^3$.

(1)求 $f(x)$ 的表达式;

(2)是否存在正实数 $a(a > 6)$, 使函数 $f(x)$ 的图象的最高点在直线 $y = 12$ 上? 若存在, 求出正实数 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

解:(1)当 $x \in [-1, 0]$ 时, $2 - x \in [2, 3]$,

$f(x) = g(2 - x) = 2a(-x) - 4(-x)^3 = 4x^3 - 2ax$, 得 $f(x) = 4x^3 - 2ax (x \in [-1, 0])$.

$\therefore y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数,

$\therefore$ 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = f(-x) = -4x^3 + 2ax$,

$\therefore f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2ax, & -1 \leq x < 0, \\ -4x^3 + 2ax, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

(2)命题条件等价于 $[f(x)]_{\max} = 12$, 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情况.

$f'(x) = -12x^2 + 2a (0 \leq x \leq 1, a > 6)$,

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{\frac{a}{6}}$ 或 $x = -\sqrt{\frac{a}{6}}$ (舍).

$\therefore \sqrt{\frac{a}{6}} > 1$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在

$[0, 1]$ 上单调递增.

$\therefore [f(x)]_{\max} = f(1) = 12, \therefore a = 8$.

综上, 存在 $a = 8$ 使得 $f(x)$ 的图象的最高点在直线 $y = 12$ 上.

挑战高分

9 已知 $f(x) = \log_4(4^x + 1) + kx (k \in \mathbf{R})$ 是偶函数.

(1)求 k 的值;

(2)证明: 对任意实数 b , 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 最多只有一个交点;

(3)设 $g(x) = \log_4(a \cdot 2^x - \frac{4}{3}a)$, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围.

(1)解: $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(-1) = f(1) \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$f(x) = \log_4(4^x + 1) - \frac{1}{2}x$;

(2)证法一: $f(x) = \frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow 4^x + 1 = 4^{x+b}$. 假定存在 x_1, x_2

$\in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $4^{x_1} + 1 = 4^{x_1+b}, 4^{x_2} + 1 = 4^{x_2+b}$, 则两式相减得 $4^{x_1} - 4^{x_2} = 4^b(4^{x_1} - 4^{x_2}) \Rightarrow b = 0$, 但当 $b = 0$ 时, $4^x + 1 = 4^x$ 是不可能成立的, 故假定为假, 命题为真;

证法二: $f(x) = \frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow b = \log_4(4^x + 1) - x$. ①

令 $g(x) = \log_4(4^x + 1) - x$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{4^x + 1} < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 因此, 对任意实数 b , 方程①最多只有一个实数解, 亦即函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 最多只有一个交点;

(3)解析: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^x + 1 = a(4^x - \frac{4}{3} \cdot 2^x)$. 令 $2^x = t > 0$, 则原问题等价于关于 t 的方程 $(a - 1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1 = 0$ 只有一个正实根, 从而有:

①若 $a - 1 = 0$, 即 $a = 1$, 则 $t = -\frac{3}{4}$, 不合题意, 舍去;

②若 $\Delta = \frac{16}{9}a^2 + 4(a - 1) = 0$, 即 $a = \frac{3}{4}$ 或 $a = -3$, 经检验, $a = -3$ 符合题意;

③方程有一个正根和一个负根, 即 $\frac{-1}{a - 1} < 0$, 即 $a > 1$ 符合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{-3\} \cup (1, +\infty)$.

实战演练

一、选择题

- 1 由下列各组命题构成“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”形式的复合命题,其中“ p 或 q ”为真,“ p 且 q ”为假,“非 p ”为真的是 …………… ()

A. $p:3$ 是偶数, $q:4$ 是奇数
B. $p:3+2=6,q:5>3$
C. $p:a\in\{a,b\},q:\{a\}\subseteq\{a,b\}$
D. $p:\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R},q:\mathbf{N}=\{\text{正整数}\}$

解析:由题意得 p 假 q 真,故选 B.

答案:B

- 2 设 $f:x\rightarrow x^2$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果 $B=\{1,2\}$,则 $A\cap B$ 一定是 …………… ()

A. $\emptyset$ B. $\emptyset$ 或 $\{1\}$ C. $\{1\}$ D. $\emptyset$ 或 $\{2\}$
解析:由 $f:x\rightarrow x^2$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果 $B=\{1,2\}$,则 $A=\{-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{-1,1,\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{-1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{1,\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{1,-\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{-1,\sqrt{2}\}$ 或 $A=\{-1,-\sqrt{2}\}$,所以 $A\cap B=\emptyset$ 或 $\{1\}$.

答案:B

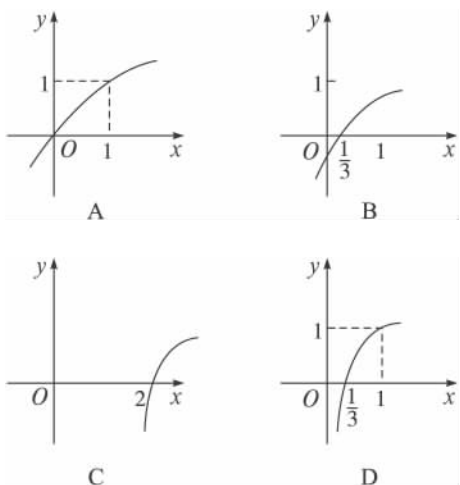
- 3 已知函数 $f(x)=2x^2-mx+3$,当 $x\in(-2,+\infty)$ 时是增函数,当 $x\in(-\infty,-2)$ 时是减函数,则 $f(1)$ 等于… …………… ()

A. -3 B. 13
C. 7 D. 含有 m 的变量

解析: $\because f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上是增函数,在 $(-\infty,-2)$ 上是减函数, $\therefore f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{m}{4}=-2$, $\therefore m=-8$. 这时 $f(x)=2x^2+8x+3$, $\therefore f(1)=13$. 故选 B.

答案:B

- 4 已知函数 $f(x)=3^{x-1}$,则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是 …………… ()



解析:反函数 $f^{-1}(x)=1+\log_3 x$,根据 $f^{-1}(x)$ 的定义域及值域观察可得 D.

答案:D

- 5 2006 河南郑州质检(一),7 已知函数 $f(x)=$

$\begin{cases} x^2 & 0\leq x\leq 1, \\ -x+2 & 1< x\leq 2, \end{cases}$ 是周期为 4 的偶函数,则 $f(6.6)$ 等于 …………… ()

A. 0.36 B. 0.4 C. 0.24 D. 0.6

解析: $f(6.6)=f(6.6-8)=f(-1.4)=f(1.4)=-1.4+2=0.6$.

答案:D

- 6 已知函数 $f(x)=\log_{\sin 1}(x^2-6x+5)$ 在 $(a,+\infty)$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围为 …………… ()

A. $(5,+\infty)$ B. $(3,+\infty)$
C. $(-\infty,3)$ D. $[5,+\infty)$

解析:定义域为 $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$. 而函数 x^2-6x+5 在 $x\geq 3$ 时为增函数,故 $f(x)$ 的单调减区间为 $(5,+\infty)$,从而 $a\geq 5$.

答案:D

- 7 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x+4)=f(x)$. 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立,如果当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=2^x$,则 $f(\log_{\frac{1}{2}} 23)$ 的值是 …………… ()

A. 23 B. $-\frac{23}{16}$
C. $\frac{23}{16}$ D. $-\frac{16}{23}$

解析:利用 $f(-x)=-f(x)$,以及 $f(x)$ 以 4 为周期可求出.

答案:B

- 8 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 不恒为零,同时满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$,且当 $x>0$ 时, $f(x)>1$,则当 $x<0$ 时,一定有 …………… ()

A. $f(x)<-1$ B. $-1<f(x)<0$
C. $f(x)>1$ D. $0<f(x)<1$

解析:显然 $f(x)=2^x$ 满足条件,当 $x<0$ 时,有 $0<2^x<1$,故选 D.

答案:D

- 9 若一系列函数的解析式相同,值域相同,但其定义域不同,则称这些函数为“同族函数”,那么函数解析式为 $y=x^2$,值域为 $\{1,4\}$ 的“同族函数”共有 …………… ()

A. 7 个 B. 8 个
C. 9 个 D. 10 个

解析:定义域分别是 $\{1,2\}\{1,-2\}\{-1,2\}\{-1,-2\}\{1,-1,2\}\{1,-1,-2\}\{1,2,-2\}\{-1,2,-2\}\{1,-1,-2,-2\}$ 的函数 $y=x^2$.



答案:C

- 10 2006 江苏无锡模拟,7 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x+b|+|x-c|}$,

($0 < a < b < c$) 的图象关于 ()

- A. x 轴对称 B. y 轴对称
C. 原点对称 D. 直线 $y=x$ 对称

解析:由已知函数的定义域是 $\begin{cases} a^2-x^2 \geq 0 \\ |x+b|+|x-c| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ |x+b|+|x-c| \neq 0. \end{cases}$$

则 $|x+b|+|x-c|=x+b+c-x=b+c$,

$f(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b+c}$, 则 $f(-x) = f(x)$, 函数 $f(x)$ 是

偶函数, 图象关于 y 轴对称.

答案:B

- 11 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $2^x + 3^y \leq 2^{-y} + 3^{-x}$, 则 x, y 满足 ... ()

- A. $x+y \geq 0$ B. $x+y \leq 0$
C. $x-y \geq 0$ D. $x-y \leq 0$

解析: $2^x + 3^y \leq 2^{-y} + 3^{-x} \Rightarrow 2^x - 3^{-x} \leq 2^{-y} - 3^y$, 构造函数 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$, 则不等式即 $f(x) \leq f(-y)$, 显然该函数是增函数, 从而 $x \leq -y$, 即 $x+y \leq 0$.

答案:B

- 12 若关于 x 的方程 $9^x + (4+a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$
B. $(-\infty, -4)$
C. $[-8, 4)$
D. $(-\infty, -8]$

解析:令 $3^x = t (t > 0)$, 则 $a = -\frac{t^2+4}{t} - 4 \leq -8$.

答案:D

二、填空题

- 13 函数 $f(x) = 3ax + 2b - 2 - a, x \in [-1, 1]$, 若 $f(x) \geq 1$ 恒成立, 则 b 的最小值为 _____.

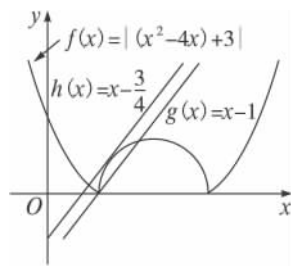
解析:函数 $f(x)$ 是一次函数, 故由题意得

$$\begin{cases} f(-1) \geq 1, \\ f(1) \geq 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -4a + 2b - 3 \geq 0, \\ 2a + 2b - 3 \geq 0. \end{cases} \text{ 消去 } a, \text{ 得 } b \geq \frac{3}{2}.$$

答案: $\frac{3}{2}$

- 14 关于 x 的方程 $|x^2 - 4x + 3| - a = x$ 有三个不相等的实数根, 则实数 a 的值是 _____.

解析:如下图所示, 要使关于 x 的方程 $|x^2 - 4x + 3| - a = x$ 有三个不相等的实数根, 则 $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ 与 $y = x + a$ 的图象必有三个不同的交点, 所以 $y = x + a$ 的图象经过 $(1, 0)$ 或者 $y = x + a$ 的图象与 $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ 的图象相切. 从而可得实数 $a = -1$ 或 $a = -\frac{3}{4}$.



答案: -1 或 $-\frac{3}{4}$

- 15 在经济学中, 定义 $Mf(x) = f(x+1) - f(x)$, 称 $Mf(x)$ 为函数 $f(x)$ 的边际函数, 某企业的一种产品的利润函数 $P(x) = -x^3 + 30x^2 + 1\,000 (x \in [10, 25] \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*)$, 则它的边际函数 $MP(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (注: 用多项式表示)

解析: $MP(x) = -(x+1)^3 + 30(x+1)^2 + 1\,000 - (-x^3 + 30x^2 + 1\,000) = -3x^2 + 57x + 29$.

由 $x \in [10, 25], x+1 \in [10, 25]$ 且 $x \in \mathbf{N}^*$, 得 $x \in [10, 24]$ 且 $x \in \mathbf{N}^*$.

答案: $-3x^2 + 57x + 29 (x \in [10, 24] \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*)$

- 16 已知函数 $f(x) = |x^2 - 2ax + b| (x \in \mathbf{R})$. 给出下列命题:

- ① $f(x)$ 必是偶函数;
② 当 $f(0) = f(2)$ 时, $f(x)$ 的图象必关于直线 $x = 1$ 对称;
③ 若 $a^2 - b \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是增函数;
④ $f(x)$ 有最大值 $|a^2 - b|$.

其中正确命题的序号是 _____.

解析: 当 $a^2 - b \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + b$, 图象的对称轴为 $x = a$, 开口向上, ③对.

答案: ③

三、解答题

- 17 2006 上海奉贤高三期末, 22 函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 满足 $f(x+1) = af(x), a$ 是不为 0 的常数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$,

- (1) 若函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 是周期函数, 写出符合条件 a 的值;
(2) 若 $n \leq x \leq n+1 (n \geq 0, n \in \mathbf{Z})$ 时, 求 $y = f(x)$ 的表达式 $y = f_n(x)$;
(3) 若函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域是闭区间, 求 a 的取值范围;

解析: (1) 当 $a = 1$ 时, $T = 1$. $a = -1$ 时, $T = 2$.

(2) $n \leq x \leq n+1 (n \geq 0, n \in \mathbf{Z})$ 时

$$f_n(x) = af_{n-1}(x-1) = a^2 f_{n-1}(x-2) = \cdots = a^n f_1(x-n)$$

$$\therefore f_n(x) = a^n (x-n)(n+1-x).$$

$$(3) \because f_n(x) = a^n (x-n)(n+1-x),$$

$$\therefore -\frac{1}{4} |a|^n \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4} |a|^n$$

当 $|a| > 1$ 时, $f(x) \in (-\infty, +\infty)$ 舍去;

当 $a=1$ 时 $f(x) \in [0, \frac{1}{4}]$ 符合;

当 $a=-1$ 时 $f(x) \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 符合;

当 $0 < a < 1$ 时 $f(x) \in [0, \frac{1}{4}]$ 符合;

当 $-1 < a < 0$ 时 $f(x) \in [0, \frac{1}{4}]$ 符合;

$\therefore a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

- 18 2006 山东青州一模, 20 因居民住房拆迁的需要, 准备在某小区建造总面积为 $40\ 000\text{ m}^2$ 完全相同的住房若干栋. 已知面积为 M 的一栋房子, 其造价是由地面部分造价和基础部分造价组成, 地面部分的造价与 $M\sqrt{M}$ 成正比, 基础部分的造价与 $\sqrt{M}$ 成正比. 据统计, 一栋面积为 $1\ 600\text{ m}^2$ 的住房造价是 176.8 万元, 其中地面部分的费用是基础部分的 36%, 试确定: 建造多少栋房子, 可使总费用最少? 并求出总费用.

解: 设建造 n 栋房子, 可使总费用最少.

$$\text{则 } M = \frac{40\ 000}{n}.$$

设面积为 M 的一栋房子的造价为

$$y = k_1 M \sqrt{M} + k_2 \sqrt{M},$$

$$\therefore \begin{cases} 176.8 = k_1 \times 1\ 600 \times 40 + 40k_2, \\ 1\ 600k_1 \times 40 = 40k_2 \times 36\%. \end{cases}$$

$$\therefore k_2 = \frac{13}{4}.$$

$$\text{则总造价 } W = ny = \frac{40\ 000}{M} \cdot y = 40\ 000 \left(\frac{M\sqrt{M}k_1}{M} + \right.$$

$$\left. \frac{k_2\sqrt{M}}{M} \right) = 40\ 000 \left(\sqrt{M}k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{M}} \right) \geq 2 \times 40\ 000 \sqrt{k_1 k_2},$$

$$\text{当且仅当 } M = \frac{k_2}{k_1} \text{ 时取最小值, 即 } \frac{40\ 000}{n} = \frac{40\ 000}{9}.$$

$$\therefore n = 9 \text{ 时, } W \text{ 取最小值.}$$

$$\text{又 } k_1 k_2 = (k_2)^2 \times \frac{36}{160\ 000},$$

$$\therefore W_{\min} = 2 \times 40\ 000 \times \frac{13}{4} \times \frac{6}{400} = 3\ 900.$$

$\therefore$ 当建造 9 栋房子时, 总费用最少为 3 900 万元.

- 19 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x, y \in (-1, 1)$

$$\text{都有 } f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 是奇函数;

(2) 如果当 $x \in (-1, 0)$ 时, 有 $f(x) > 0$, 求证: $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是单调递减函数;

(3) 在 (2) 的条件下解不等式: $f(x + \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{1-x}) > 0$.

(1) 证明: 令 $x=y=0$, 则 $f(0) + f(0) = f(0)$, 故 $f(0) = 0$.

$$\text{令 } y = -x, \text{ 则 } f(x) + f(-x) = f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right) = f(0) = 0.$$

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

即函数 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 证明: 设 $x_1 < x_2 \in (-1, 1)$, 则 $f(x_1) - f(x_2) =$

$$f(x_1) + f(-x_2) = f\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right).$$

$$\because x_1 < x_2 \in (-1, 1),$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, -1 < x_1 x_2 < 1.$$

$$\text{因此 } -1 < \frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2} < 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数.

(3) 解: 不等式 $f(x + \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{1-x}) > 0$, 化为

$$f(x + \frac{1}{2}) > f(\frac{1}{x-1}).$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数,

$$\therefore \begin{cases} -1 < x + \frac{1}{2} < 1, \\ -1 < \frac{1}{x-1} < 1, \end{cases} \text{ 解得: } -\frac{3}{2} < x < -1.$$

$$\therefore \text{原不等式的解集为 } \{x \mid -\frac{3}{2} < x < -1\}.$$

- 20 函数 $f(x) = \log_a(x-3a)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当点 $P(x, y)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上的点时, $Q(x-2a, -y)$ 是函数 $y = g(x)$ 图象上的点.

(1) 写出函数 $y = g(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in [a+2, a+3]$ 时, 恒有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 试确定 a 的取值范围.

解: (1) 设 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图象上的点, $Q(x, y)$ 是 $y = g(x)$ 图象上的点, 则

$$\begin{cases} x = x_0 - 2a, \\ y = -y_0. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = x + 2a, \\ y_0 = -y. \end{cases}$$

$$\therefore -y = \log_a(x + 2a - 3a),$$

$$\therefore y = g(x) = \log_a \frac{1}{x-a} (x > a).$$

$$(2) \begin{cases} x-3a > 0, \\ x-a > 0. \end{cases}$$

$$\therefore x > 3a.$$

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上有意义,

$$\therefore 3a < a+2, \therefore 0 < a < 1.$$

$$\therefore |f(x) - g(x)| \leq 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore |\log_a(x-3a)(x-a)| \leq 1 \text{ 恒成立.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \log_a[(x-2a)^2 - a^2] \leq 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \leq (x-2a)^2 - a^2 \leq \frac{1}{a}.$$

对 $x \in [a+2, a+3]$ 上恒成立, 令 $h(x) = (x-2a)^2 - a^2$, 其对称轴 $x = 2a$, $2a < 2, 2 < a+2$,

$\therefore$ 当 $x \in [a+2, a+3]$ 时, $h(x)_{\min} = h(a+2)$, $h(x)_{\max} = h(a+3)$.