

21世纪新概念教辅

高中同步基础训练

数学高二上

(配 人教 B 版)

本书编写组编

必修 5

华东师范大学出版社
齐 鲁 书 社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中同步基础训练. 高二数学/本书编写组编.
—上海: 华东师范大学出版社, 2005
ISBN 7-5617-4288-6

I. 高... II. 本... III. 数学课—高中—习题
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 075745 号

普通高中课程标准实验教科书 (人教 B 版)
高中同步基础训练 数学 (必修 5) 高二用

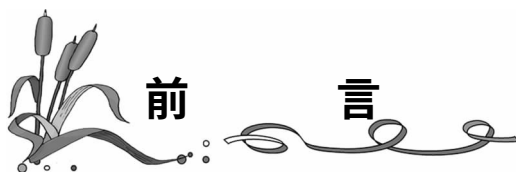
编 者 本书编写组
项目编辑 徐红瑾
组稿编辑 徐惟简
文字编辑 徐 涵
封面设计 郭 颀
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社 齐鲁书社
发 行 山东省新华书店
电 话 021-62865537 0531-82098502
业务传真 021-62860410 0531-82906811
网 址 www.ecnupress.com.cn www.sdpress.com.cn
社 址 上海市中山北路 3663 号 济南市经九路胜利大街 39 号
邮 编 200062 (上海) 250001 (济南)

印 刷
开 本 787×1092 16 开
印 张 5.75
字 数 141 千字
版 次 2006 年 7 月第 2 版
印 次 2006 年 7 月第 1 次
书 号 ISBN 7-5617-4288-6/G·2484
定 价 5.30 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回印刷厂调换)



为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》、《国务院关于基础教育改革与发展的决定》和教育部《普通高中课程方案(实验)》精神,经教育部批准,自2004年秋季起,广东、山东、宁夏、海南作为全国首批省(市、自治区)参加国家普通高中新课程实验。为切实贯彻新课改精神,配合课堂教学,巩固基础知识,培养学生的创新精神和实践能力,我们结合实验区一年来的课改教学经验、教材使用和课程设置情况,特组织教育教学专家和有丰富教学经验的教师编写这套供广大师生教学和练习使用的《高中同步基础训练》。

这套系列图书覆盖高中阶段所有学科的主要版本。作者主要是山东、江苏、广东等省市各学科的教育专家,长期担任该学科教学并有丰富教学经验的特级教师、高级教师。他们把自己先进的教学思想和科学的教学方法融入了这套系列图书之中。

本套书是与现行教材完全同步编写的,其主要目的是注重基础知识的掌握和综合能力的培养。这也是素质教育纲要和新课程标准对我们的要求。

本册以节为单位,大致由学习指导、典型例题、基础训练、拓展提高等四部分组成。

(一) 学习指导 用简明扼要的语言点明本课的重点、难点,根据新课标的要求,指出学生应当掌握的主要内容和学习方法。

(二) 典型例题 作为本节教学内容的补充例题,列举了与本节相关的各类习题,方便学生在实践中把握学习方法,其中的高考直通车选取历年高考题加以分析,让学生对高考的考查要点、考查方法、命题思路有一个切实可感的印象,从而突出该书的实用性特点。

(三) 基础训练 提供与本节知识要求相关的训练题,便于学生巩固所学知识。

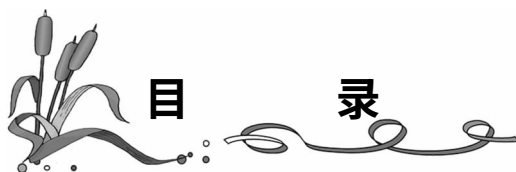
(四) 拓展提高 提供开拓学生视野,培养他们探究意识和发现问题、解决问题的能力的训练。

在选题的典型性、题型的新颖性、能力与素质的渗透性等方面,编者们的确下了一番苦功。我们编辑出版这套书的意图是帮助学生提高学习效率,究竟效果如何,还得通过读者的实践来检验。愿编者们的辛劳,能帮助读者得到真正的收获。

本册为《高中同步基础训练·数学高一下(配人教B版必修5)》,由李庆胜、苗斌主编。参加编写的还有纪立孟、殷庆学、耿长菊。如有不当之处,请读者指正。

华东师范大学出版社
齐 鲁 书 社





第一章 解三角形	1
1.1.1 正弦定理	1
1.1.2 余弦定理	5
1.2 应用举例	9
第二章 数列	16
2.1.1 数列	16
2.1.2 数列的递推公式(选学)	21
2.2 等差数列	25
2.2.1 等差数列	25
2.2.2 等差数列的前 n 项和	29
2.3 等比数列	33
2.3.1 等比数列	33
2.3.2 等比数列的前 n 项和	38
第三章 不等式	45
3.1.1 不等关系与不等式	45
3.1.2 不等式的性质	47
3.2 均值不等式	53
3.3 一元二次不等式及其解法	58
3.4 不等式的实际应用	64
3.5.1 二元一次不等式(组)所表示的平面区域	70
3.5.2 简单线性规划	74
巩固训练题	80
参考答案	82





第一章 解三角形

1.1.1 正弦定理

一、学习指导

[重点难点]

重点 正弦定理的表述及其证明,应用正弦定理解三角形的两个类型.

难点 已知两边及其中一边的对角解三角形,应用正弦定理解三角形边角关系问题.

[方法指导]

1. 正弦定理的常见证明方法:

证法 1: 两次求高法

在 $\triangle ABC$ 中,过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D 点,则共有三种情况:

(1) D 与点 A 或 B 重合,如图 1-1, 1-2; (2) D 在点 A 与 B 之间,如图 1-3;

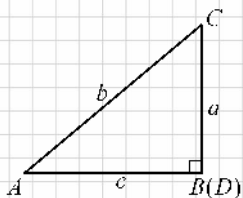


图 1-1

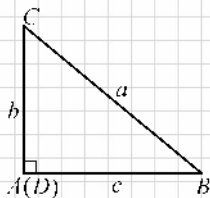


图 1-2

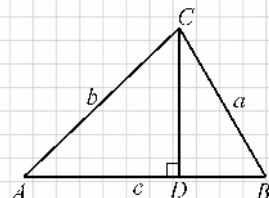


图 1-3

(3) D 在线段 AB 外,如图 1-4, 1-5.

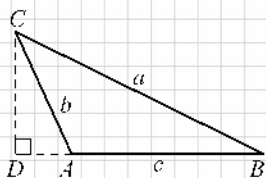


图 1-4

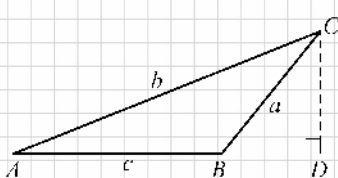


图 1-5

三种情况中,始终有 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 所成的角为 $|90^\circ - A|$, $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 所成的角为 $|90^\circ - B|$,
所以有 $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos |90^\circ - A| = b \sin A$, $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos |90^\circ - B| = a \sin B$.所以
 $a \sin B = b \sin A$,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.同理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.若用向量方



法会更直接: 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, 所以 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$, 即 $0 = |\overrightarrow{CD}| \cdot a \cos |90^\circ - B| - |\overrightarrow{CD}| \cdot b \cos |90^\circ - A|$, 整理得 $a \sin B = b \sin A$.

下面过程同上.

证法 2: 两次求面积法

如证法 1 图, 过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 则有 D 与 A 或 B 重合, D 在点 A 与 B 之间, D 在线段 AB 外三种情况, 且 $CD = b \sin A$.

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ 同理 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

$$\text{所以 } ab \sin C = bc \sin A = ac \sin B, \text{ 于是 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 证毕.}$$

证法 3: 作外接圆法

作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O , 设圆半径为 R , 如图 1-6, 1-7, 1-8.

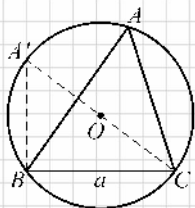


图 1-6

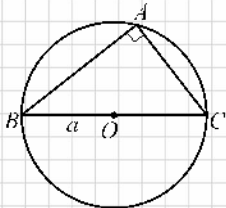


图 1-7

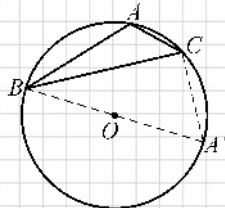


图 1-8

当 A 为锐角时, 连结 CO 并延长, 设与圆 O 交于 A' , 连结 $A'B$, 则 $\angle A' = \angle A$, $\angle A'BC = 90^\circ$, 所以在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中, $a = BC = A'C \cdot \sin A = 2R \sin A$. 则 $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 当

A 为直角时, $a = 2R = 2R \sin A$, 则 $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 当 A 为钝角时, 连结 BO 并延长, 设与圆 O 交

于 A' , 连结 CA' , 则 $\angle A' = \pi - \angle A$, 所以在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中, $a = BC = BA' \cdot \sin A' = 2R \sin(\pi - A) = 2R \sin A$, 则 $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 综上所述, $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 同理, $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} =$

$$2R. \text{ 所以 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

2. 正弦定理的变形:

$$(1) a \sin B = b \sin A; a \sin C = c \sin A; b \sin C = c \sin B.$$

$$(2) a = 2R \sin A; b = 2R \sin B; c = 2R \sin C.$$

$$(3) \sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}.$$

$$(4) a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

$$(5) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

3. 三角形面积公式:

$$(1) S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$



$$(3) S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R}.$$

$$(4) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ 其中 } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

4. 已知两边和其中一边的对角, 解三角形时, 可根据:

$$A \vee B \Leftrightarrow a \vee b \Leftrightarrow 2R \sin A \vee 2R \sin B \Leftrightarrow \sin A \vee \sin B \text{ (“} \vee \text{”为大小关系)}.$$

求出三角形内角的正弦值, 正弦较大的角可能为锐角或钝角, 正弦较小的角必为锐角.

二、典型例题

【例 1】 在 $\triangle ABC$ 中, $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, $c=10$. 解这个三角形. (保留两位有效数字).

【解】 $B = 180^\circ - A - C$, 由 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ 可分别求出 b , a .

【答案】 $B=105^\circ$, $b \approx 19$, $a \approx 14$.

【例 2】 在 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$. 求 A , C 和 c .

【解】 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, 得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $a > b$, 所以 $A > B = 45^\circ$, 所以 $A=60^\circ$ 或 120° .

$$\text{当 } A = 60^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

【例 3】 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a \cos A = b \cos B$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【解】 由正弦定理知 $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, 代入 $a \cos A = b \cos B$ 得 $2R \sin A \cos A = 2R \sin B \cos B$, 所以 $\sin 2A = \sin 2B$.

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A + 2B = \pi, \text{ 即 } A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

【例 4】 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$.

【证明】 (方法 1) 边化角.

左边 $= 2R \sin A (\sin B - \sin C) + 2R \sin B (\sin C - \sin A) + 2R \sin C (\sin A - \sin B) = 2R (\sin A \sin B - \sin A \sin C + \sin B \sin C - \sin B \sin A + \sin C \sin A - \sin C \sin B) = 0 = \text{右边}$, 命题得证.

(方法 2) 角化边.

$$\text{左边} = a \left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R} \right) + b \left(\frac{c}{2R} - \frac{a}{2R} \right) + c \left(\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R} \right) = 0 = \text{右边}.$$

高考直通车

正弦、余弦定理与三角变换的综合运用在高考中时有出现, 既可能是纯数字问题, 也可能是应用题. 如

1. (2005 年辽宁) 若钝角三角形的三内角成等差数列, 且最大边长与最小边长的比值为 m , 则 m 的取值是 ().

(A) $(1, 2)$

(B) $(2, +\infty)$

(C) $[3, +\infty)$

(D) $(3, +\infty)$



【解】 设该钝角三角形为 $\triangle ABC$,不妨设 $A < B < C, C > \frac{\pi}{2}$.

由 A, B, C 成等差数列知 $B = 60^\circ. \therefore A + B < \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < A < \frac{\pi}{6}$. 由正弦定理知

$$m = \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(A + \frac{\pi}{3})}{\sin A} = \frac{\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A}{\sin A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot A.$$

$y = \cot A$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数,而 $0 < A < 30^\circ$,故 $\cot A \in (\sqrt{3}, +\infty)$,

故 $m \in (2, +\infty)$,选(B).

2. (2005 年江苏) $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}, BC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为().

- (A) $4\sqrt{3}\sin(B + \frac{\pi}{3}) + 3$ (B) $4\sqrt{3}\sin(B + \frac{\pi}{6}) + 3$
(C) $6\sin(B + \frac{\pi}{3}) + 3$ (D) $6\sin(B + \frac{\pi}{6}) + 3$

【解】 由正弦定理知 $\frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin(B + \frac{\pi}{3})} = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$,

故 $CA = 2\sqrt{3}\sin B, AB = 2\sqrt{3}\sin(B + \frac{\pi}{3})$.

$$\begin{aligned} \therefore AB + AC &= 2\sqrt{3}\left[\sin(B + \frac{\pi}{3}) + \sin B\right] = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) \\ &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B + \frac{1}{2}\cos B\right) = 6\sin(B + \frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$

$\therefore AB + BC + CA = 6\sin(B + \frac{\pi}{6}) + 3$, 故选(D).

三、基础训练

- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 120^\circ, \angle B = 45^\circ, b = 4\sqrt{6}$, 那么 $a =$ ().
(A) 4 (B) $12\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12
- 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, A = 30^\circ, B = 120^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为().
(A) 9 (B) 18 (C) $9\sqrt{3}$ (D) $18\sqrt{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 2a\sin B$, 则 $A =$ ().
(A) 30° 或 60° (B) 45° 或 60° (C) 60° 或 120° (D) 30° 或 150°
- 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 且已知 $AB = 4, C = 45^\circ$. 则 R 为().
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A = 60^\circ, a = 4\sqrt{3}, b = 4\sqrt{2}$, 则 $\angle B$ 的度数是().
(A) 45° 或 135° (B) 135° (C) 45° (D) 以上答案都不对
- $\triangle ABC$ 三边分别是 a, b, c , 其对角分别是 A, B, C , 下列各组命题中正确的是().
(A) $A = 30^\circ, b = 6, a = 2.5$, 此三角形有两解
(B) $A = 30^\circ, b = 6, a = 3$, 此三角形无解



(C) $A = 30^\circ, b = 6, a = 7$, 此三角形无解

(D) $A = 30^\circ, b = 6, a = 4$, 此三角形有两解

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $a : b : c = 3 : 8 : 10$, 则 $\frac{2\sin A - \sin B}{\sin C} =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{6}, b = 2, A = 60^\circ$, 这样的三角形有 _____ 个.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2b, A = 30^\circ$, 则 $B =$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ, AB = 2\sqrt{3}, AC = 2$. 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

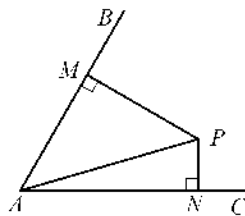
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\lg a - \lg c = \lg \sin B = -\lg \sqrt{2}$, 且 B 为锐角, 试判断此三角形的形状.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan B = \sqrt{3}, \cos C = \frac{1}{3}, AC = 3\sqrt{6}$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

四、拓展提高

13. 如图, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAC$ 内一点 P 到两边 AB, AC 的距离分别为 5、2, 求 AP 的长.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c = 10$. 又知 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 求 a, b 及 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径.



(第 13 题)

1.1.2 余弦定理

一、学习指导

[重点难点]

重点 余弦定理的两种表述及其证明, 应用余弦定理理解三角形的几个类型.

难点 应用余弦定理理解三角形边角关系问题.

[方法指导]

1. 余弦定理的推导除课本上的方法外, 还有以下几种常见推导方法.

(方法 1) 向量法

如图 1-9, $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, 则 $AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - C) = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. 同理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

(方法 2) 解析法

图 1-10 中, 以 C 为原点, CA 为 x 轴, 建立直角坐标系, 则 $C(0, 0), A(b, 0), B(a\cos C, a\sin C)$.

所以 $AB^2 = (a\cos C - b)^2 + (a\sin C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, 即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

同理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

(方法 3) 射影法

(1) 应用射影长公式.

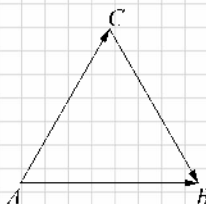


图 1-9

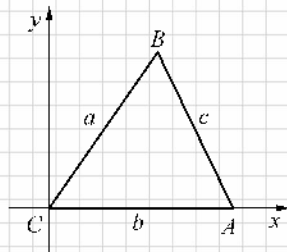


图 1-10



图 1-11 中, 线段 $AB=l$, 直线 AB 与直线 m 的夹角为 α , 则线段 AB 在直线 m 上的射影长 $A'B'=l\cos\alpha$.

(2) 应用 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影的数量公式.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影的数量为

$$|\vec{a}| \cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

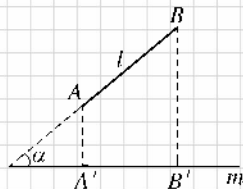


图 1-11

(3) 应用三角形中的射影定理.

$a = b\cos C + c\cos B$; ① $b = a\cos C + c\cos A$; ② $c = a\cos B + b\cos A$. ③

① $\times a$ - ② $\times b$ 得 $a^2 - b^2 = ac\cos B - bc\cos A$. ④

③ $\times c$ - ④ 得 $c^2 - a^2 + b^2 = 2bc\cos A$. 即 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

2. 余弦定理的另一种形式:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

当已知三角形三边长时, 可用其求角.

A 是锐角 $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0$; A 是直角 $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$; A 是钝角 $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0$.

利用上述充要条件可判断三角形的类型.

3. 解三角形的边角关系问题的关键在于实现边角的转化, 如 $a = 2R\sin A$, $\sin A = \frac{a}{2R}$,

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 的应用.

4. 利用余弦定理解三角形的常见类型.

(1) 已知两边和它们的夹角 (S. A. S): 先由余弦定理求出第三边; 再由正弦定理或余弦定理求第二个角, 为避免讨论, 应只求两个角中的较小角 (一定为锐角); 最后由 $A+B+C=\pi$ 求第三个角.

(2) 已知三边, 求三角 (S. S. S): 为避免讨论, 先求最大角, 余下两角可用一次正弦定理, 一次三角形内角和定理.

(3) 已知两边及其中一边对角, 求第三边: 可先用正弦定理求两边中另一边所对角, 继而求出第三角和第三边, 注意讨论解的个数. 也可直接用余弦定理, 用方程思想来求.

二、典型例题

【例 1】在 $\triangle ABC$ 中, $a=7$, $b=3$, $c=5$, 求最大角和 $\sin C$.

【解】 $\because a > c > b$, $\therefore A$ 为最大角.

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 25 - 49}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}, \therefore A = 120^\circ.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中, $b\cos A = a\cos B$, 试判断三角形的形状.

$$\text{【解】 (方法 1) } \because b\cos A = a\cos B, \therefore b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + c^2 - b^2, \therefore a^2 = b^2, \therefore a = b.$$

$\therefore$ 此三角形为等腰三角形.



(方法2) $\because b \cos A = a \cos B, \therefore 2R \sin B \cos A = 2R \sin A \cos B.$

$\therefore \sin B \cos A = \sin A \cos B, \therefore \sin B \cos A - \sin A \cos B = \sin(B-A) = 0, \therefore A = B.$

$\therefore$ 此三角形为等腰三角形.

【说明】在判断三角形的形状时,可将所给的边角关系利用正余弦定理化角为边或化边为角,前者一般是代数化,后者一般是三角化.

【例3】在 $\triangle ABC$ 中,求证: $b^2 - c^2 = a(bc \cos C - c \cos B).$

【证明】右边 $= a(bc \cos C - c \cos B) = a \cdot \left(b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) = a \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) = a \cdot \frac{2b^2 - 2c^2}{2a} = b^2 - c^2 =$ 左边,故等式成立.

【例4】在 $\triangle ABC$ 中,已知 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$,且 $\sin A = 2 \sin B \cos C$,判断三角形的形状.

【解】由 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$,得 $(b+c)^2 - a^2 = 3bc$. 即 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

由余弦定理得 $\cos A = \frac{1}{2}$,所以 $A = 60^\circ$.

由 $\sin A = 2 \sin B \cos C$ 得 $\sin(B+C) = 2 \sin B \cos C$,展开整理得 $\sin(B-C) = 0$,得 $B = C$. 由 $A = 60^\circ, B = C$ 得 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

【例5】 $\triangle ABC$ 中,求证 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

【证明】 $a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = 2(b^2 + c^2) - 2bc(\sqrt{3} \sin A + \cos A) = 2(b^2 + c^2) - 4bc \sin(A + 30^\circ) \geq 2(b^2 + c^2) - 4bc = 2(b-c)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

高考直通车

利用正、余弦定理解三角形的题目近年来有所加强,题目类型既有客观题,也有综合题,以中低档题为主. 如

1. (2004年全国) $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边,如果 $2b = a + c, \angle B = 30^\circ, \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则 $b =$ ().

(A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B) $1+\sqrt{3}$ (C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D) $2+\sqrt{3}$

【解】由 a, b, c 成等差数列,可设 $a = b-d, c = b+d$.

由 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}(b^2 - d^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,故 $b^2 - d^2 = 6$. ①

又由余弦定理知 $b^2 = (b-d)^2 + (b+d)^2 - 2(b-d)(b+d) \cdot \cos 30^\circ$,

即 $b^2 = 2b^2 + 2d^2 - \sqrt{3}(b^2 - d^2)$, 即 $(\sqrt{3}-1)b^2 = (2+\sqrt{3})d^2$. ②

由①②得 $(\sqrt{3}-1)(d^2 + 6) = (2+\sqrt{3})d^2$, 故 $d^2 = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{3} = 2(\sqrt{3}-1)$.

$b^2 = d^2 + 6 = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$, 故 $b = \sqrt{3}+1$.

【答案】(B).

2. (2005年天津)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c , 设 a, b, c 满



足条件 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 和 $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$, 求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

【解】 (方法 1) 由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 因此 $\angle A = 60^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 120^\circ - \angle B$, 由已知条件和正弦定理, $\frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{c}{b}$
 $= \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \frac{\sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot B + \frac{1}{2}$,

解得 $\cot B = 2$, 从而 $\tan B = \frac{1}{2}$.

(方法 2) 由余弦定理, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 因此 $\angle A = 60^\circ$.

由 $b^2 + c^2 - bc = a^2$, 得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b} = 1 + \frac{1}{4} + \sqrt{3} + 3 - \frac{1}{2} - \sqrt{3} = \frac{15}{4}$.

所以 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2}$. ① 由正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

由①式知 $a > b$, 故 $\angle B < \angle A$. 因此 $\angle B$ 为锐角, 于是 $\cos B = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

从而 $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{1}{2}$.

三、基础训练

1. $\triangle ABC$ 中, 若 $a \cos A - b \cos B = 0$, 则三角形形状是().
 (A) 等腰三角形 (B) 直角三角形
 (C) 等腰直角三角形 (D) 等腰三角形或直角三角形
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2 \cos B \sin A = \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().
 (A) 等腰直角三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰三角形 (D) 等边三角形
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 4$, $C = 120^\circ$. 则 $\sin B$ 的值为().
 (A) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ (B) $\frac{\sqrt{57}}{19}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{38}$ (D) $-\frac{\sqrt{57}}{19}$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$. 则 $C =$ ().
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 45° 或 135°
5. $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$, 则 $\angle A$ 等于().
 (A) 60° (B) 120° (C) 135° (D) 150°
6. 已知一个三角形的三边长分别为 a 、 b 、 $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, 则此三角形中的最大角为().
 (A) 30° (B) 120° (C) 60° (D) 150°
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $AC = 16$, $S_{\triangle ABC} = 20\sqrt{3}$, 则 $BC =$ _____.
8. 若 $\triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c , 它的面积为 $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$. 则 $\angle C =$ _____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 7$, $b = 8$, $\cos C = \frac{13}{14}$, 则最大角的余弦值为 _____.



10. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 12$, $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$, 则 $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{a + b + c} =$ _____.
11. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $a - b = c(\cos B - \cos A)$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状?
12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B = 45^\circ$, D 是 BC 上一点, $AD = 5$, $AC = 7$, $DC = 3$, 求 AB .
13. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边, 已知 a 、 b 、 c 成等比数列, 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$, 求 $\angle A$ 的大小及 $\frac{b \sin B}{c}$ 的值.

四、拓展提高

14. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 2$, $BC = 6$, $CD = DA = 4$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a > b > c$, 且 $\angle A = 2\angle C$, $b = 4$, $a + c = 8$. 求 a 、 c .

1.2 应用举例

一、学习指导

[重点难点]

重点 应用解三角形的知识解决测高、测距问题和其它物理、工程等实际问题.

难点 将实际问题概括抽象为解三角形的问题.

[方法指导]

1. 测量中常用的术语

仰角: 向上(下)的视线与水平方向的夹角.

视角: 视线所夹的角.

坡角: 坡面与水平面的夹角.

坡度: 把坡面的垂直高度和水平长度的比叫做坡度(或称坡比), 其比值为坡角的正切.

方位角: 从正北方向旋转到该方向所经过的最小正角.

2. 常见问题

测高

(1) 底部可达.

如图 1-12 中, 测量仪高度为 i , 测得 $BD = a$, $\angle ADB = \alpha$, 则高度 $AF = AB + BF = a \tan \alpha + i$.

(2) 底部不可达.

(方法 1) 如图 1-13, 在 AF 以外可到达处选取 C 点及 D 点. 测得仪器高度 $CE = BF = i$, $CD = a$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle BDC = \gamma$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \gamma} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$,

所以 $BC = \frac{CD \cdot \sin \gamma}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{CD \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.

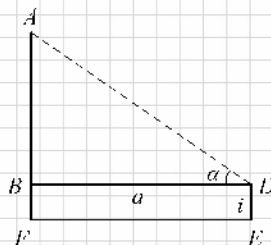


图 1-12

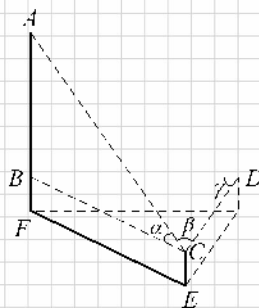


图 1-13



在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC \cdot \tan \alpha = \frac{CD \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \cdot \tan \alpha$,

所以 $AF = AB + BF = \frac{CD \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \cdot \tan \alpha + i$.

(方法 2) 如图 1-14, 在 AF 以外可到达处选取 C 点, 并在 BC 延长线上继续选取 D 点, 测得仪器高 $DE = CG = i$, 测得 $GE = CD = a$, $\angle ADB = \alpha$, $\angle ACB = \beta$.

在 $\triangle ADC$ 中, $AC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$.

在 $\triangle ACB$ 中, $AB = AC \cdot \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$.

所以 $AF = AB + BF = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} + i$.

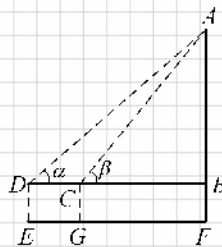


图 1-14

测量两点间的距离

(1) 两点都可以到达, 即山两侧问题, 如图 1-15 中 A 、 B 两点.

取 C 点, 测得 $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \theta$.

所以在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$.

(2) 只有一点可以到达, 即河对岸问题, 如图 1-16 中 A 、 B 两点.

设 A 点可达, 取 C 点, 测得 $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$.

所以在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $AB = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

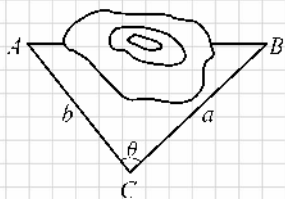


图 1-15

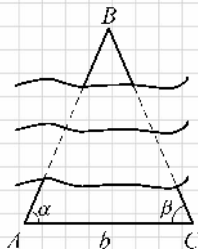


图 1-16

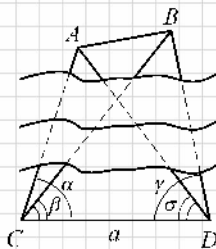


图 1-17

(3) 两点都不能到达, 即河对岸问题, 如图 1-17 中 A 、 B 两点.

取 C 、 D 两点, 测得 $CD = a$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle BDC = \gamma$, $\angle ADC = \sigma$, 则先河两岸再山两侧.

① 测算出 AC 、 BC (河两岸).

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得 $AC = \frac{a \sin \sigma}{\sin(\alpha + \sigma)}$.

在 $\triangle BDC$ 中, 由正弦定理可得 $BC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\gamma + \beta)}$.

② 测算出 AB (山两侧).

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\alpha - \beta)}$.



二、典型例题

【例 1】在塔底的水平面上某点测得塔顶的仰角为 θ , 由此点向塔底沿直线走 30 m, 测得

塔顶的倾角为 2θ , 再向前走 $10\sqrt{3}$ m, 又测得塔顶的仰角为 4θ , 则塔高是_____.

注: 视线与水平线所成角中, 视线在水平线上的称为仰角, 在水平线下的称为俯角.

方位角: 从正北方向顺时针转到目标为方向线的水平转角.

【解】 如图 1-18 所示.

(方法 1) 由题意知在 $\triangle ACD$ 中, $AC = BC = 30$, $AD = CD = 10\sqrt{3}$, $\angle ADC = 180^\circ - 4\theta$, 所以

$$\frac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta} = \frac{30}{\sin(180^\circ - 4\theta)}.$$

因为 $\sin 4\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$, 所以 $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $\theta = 15^\circ$,

所以在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AE = AD \sin 60^\circ = 15$.

(方法 2) 设 $DE = x$, $AE = h$, 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $(10\sqrt{3} + x)^2 + h^2 = 30^2$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $x^2 + h^2 = (10\sqrt{3})^2$. 两式相减得 $x = 5\sqrt{3}$, 故 $h = 15$.

【答案】 15 m.

【例 2】 如图 1-19, 隔河看两目标 A 、 B 但不能到达, 在岸边选取相距 $\sqrt{3}$ 千米的 C 、 D 两点, 并测得 $\angle ACB = 75^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$ (A 、 B 、 C 、 D 在同一平面内), 求两目标 A 、 B 之间的距离.

【解】 在 $\triangle ACD$ 中, 因为 $\angle ADC = 30^\circ$, $\angle ACD = 120^\circ$, 所以 $\angle CAD = 30^\circ$, 所以 $AC = CD = \sqrt{3}$. 在 $\triangle BDC$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

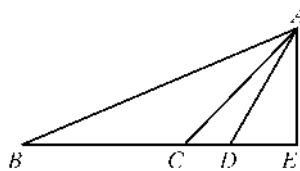


图 1-18

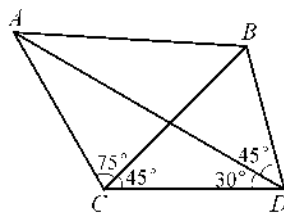


图 1-19

(方法 1) 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin 120^\circ} = \frac{CD}{\sin 30^\circ}$, 即 $AD = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 3$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 60^\circ}$, 即 $BD = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB \\ &= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 5, \text{ 所以 } AB = \sqrt{5} \text{ (千米)}. \end{aligned}$$

(方法 2) 由正弦定理, 可得 $BC = \frac{\sqrt{3} \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

由余弦定理, 可得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle BCA = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cos 75^\circ = 5$, 所以 $AB = \sqrt{5}$ (千米).

【说明】 本题应用正弦定理及余弦定理解三角形, 关系比较复杂, 须通过认真分析已知条件, 发现内在联系, 寻找解题的方向与突破口.

【例 3】 如图 1-20, 一渔船在海上由西向东航行, 在 A 处

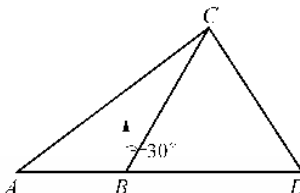


图 1-20



望见灯塔 C 在船的东北方向, 半小时后在 B 处望见灯塔在船的北偏东 30° , 若船速每小时 30 海里, 当船行至 D 处望见灯塔 C 在船的西北方向时, 求 AD 两点间的距离. (精确到 0.1, 提供数据 $\sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732$)

【解】 在 $\triangle ABC$ 中, 由题设条件知 $\angle A = 45^\circ, \angle ABC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ, AB = 30 \times \frac{1}{2} = 15$ (海里), $\angle ACB = 180^\circ - (\angle A + \angle ABC) = 15^\circ$, 于是根据正弦定理得 $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 15^\circ}$, 所以

$$AC = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} \times AB = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \times 15 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times 15 = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \times 15 \approx 50.2 \text{ (海里)}.$$

在 $\triangle ACD$ 中, 由题设条件知 $\angle A = \angle D = 45^\circ$, 所以 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形, 所以 $AD = \sqrt{2} \cdot AC = 50.2 \times 1.414 \approx 71.0$ (海里). 即 AD 两点间的距离为 71.0 海里.

【说明】 把已知和图形结合起来, 抽象成数学问题, 还要注意近似计算.

【例 4】 我炮兵阵地位于地面点 A 处, 两观察所分别位于地面点 C 处和 D 处, 已知 $CD = 6000$ m, $\angle ACD = 45^\circ, \angle ADC = 75^\circ$, 目标出现于地面点 B 处时, 测得 $\angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 15^\circ$. 求炮兵阵地到目标的距离. (结果保留根号)

【解】 如图 1-21, 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC = 60^\circ, CD = 6000, \angle ACD = 45^\circ$. 根据正弦定理有 $AD = \frac{CD \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}} CD$. 同理, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC = 135^\circ, BD = \frac{CD \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} CD$.

又在 $\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = \angle ADC + \angle BDC = 90^\circ$. 根据勾股定理有 $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} CD = \frac{\sqrt{42}}{6} CD = 1000\sqrt{42}$ (m)

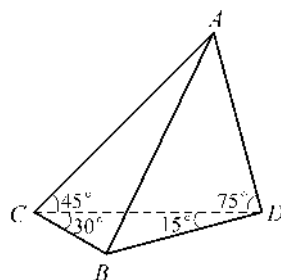


图 1-21

【答】 炮兵阵地到目标距离为 $1000\sqrt{42}$ m.

【例 5】 某渔轮在航行中不幸遇险, 发出呼叫信号, 我海军舰艇在 A 处获悉后, 立即测出该渔轮在方位角为 45° 距离为 10 海里的 C 处. 并测得渔轮正沿方位角为 105° 的方向, 以 9 海里 / 时的速度向小岛靠拢, 我海军舰艇立即以 21 海里 / 时的速度前去营救, 求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间.

【解】 如图 1-22, 设 t 小时后舰艇与渔轮相遇于 B' , 则 $AB' = 21t, CB' = 9t$, 在 $\triangle AB'C$ 中,

根据余弦定理, 则有

$$AB'^2 = AC^2 + B'C^2 - 2AC \cdot B'C \cos 120^\circ,$$

$$\text{即 } (21t)^2 = 10^2 + 81t^2 + 2 \times 10 \times 9t \times \frac{1}{2}.$$

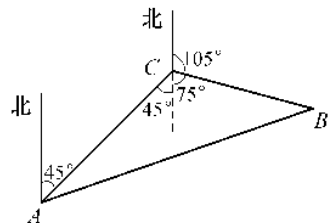


图 1-22

整理得 $360t^2 - 90t - 100 = 0, 36t^2 - 9t - 10 = 0, t = \frac{2}{3}$ 或 $t = -\frac{5}{12}$ (舍去). 即舰艇需要



$\frac{2}{3}$ 小时靠近渔轮.

由正弦定理得 $\frac{B'C}{\sin \angle CAB'} = \frac{AB'}{\sin 120^\circ}$, $\therefore \sin \angle CAB' = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

$\therefore \angle CAB' \approx 21.8^\circ$. $\therefore$ 舰艇航行的方位角为 66.8° .

【答】 舰艇航行的方位角为 66.8° , 所需时间为 $\frac{2}{3}$ 小时.

高考直通车

高考中的有关试题多由三角形的边角关系问题或应用问题构成, 题目难度多为中低档题目. 如

1. (2005 年全国) $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 a, b, c 成等比数列且 $\cos B = \frac{3}{4}$.

(1) 求 $\cot A + \cot C$ 的值. (2) 设 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{3}{2}$, 求 $a+c$ 的值.

【解】 (1) 由 $\cos B = \frac{3}{4}$ 得 $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. 由 $b^2 = ac$ 及正弦定理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$. 于是 $\cot A + \cot C = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\cos A \sin C + \sin A \cos C}{\sin A \sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{1}{\sin B} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

(2) 由 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{3}{2}$ 得 $c \cdot a \cos B = \frac{3}{2}$. 由 $\cos B = \frac{3}{4}$ 可得 $ca = 2$, 即 $b^2 = 2$. 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 得 $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B = 5$.

$\therefore (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 5 + 4 = 9$, $\therefore a+c = 3$.

2. (2005 年湖北) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{6}$, AC 边上的中线 $BD = \sqrt{5}$,

求 $\sin A$ 的值.

【解】 如图 1-23, 设 E 为 BC 的中点, 连结 DE , 则 $DE \parallel AB$ 且 $DE = \frac{1}{2} AB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 设 $BE = x$, 则在 $\triangle BDE$ 中, 利用余弦定理得 $BD^2 = BE^2 + ED^2 - 2BE \cdot ED \cdot \cos \angle BED$

$5 = x^2 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x$, 即 $3x^2 + 4x - 7 = 0$, 解得 $x = 1$, 或 $x = -\frac{7}{3}$ (舍去).

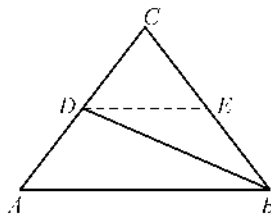


图 1-23

故 $BC = 2$, 从而 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = \frac{28}{3}$, $AC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

又 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 得 $\sin A = \frac{\sqrt{70}}{14}$.

【说明】 要注意挖掘题目中的隐含条件, 合理添加辅助线是解决本题的关键.

