



CONTENTS 目录

第一章 集 合	1
1.1 集合与集合的表示方法	2
1.1.1 集合的概念	2
1.1.2 集合的表示方法	6
1.2 集合之间的关系与运算	10
1.2.1 集合之间的关系	10
1.2.2 集合的运算	14
第一课时 交集与并集	14
第二课时 补 集	18
第二章 函 数	28
2.1 函 数	30
2.1.1 函 数	30
第一课时 变量与函数的概念	30
第二课时 映射与函数	35
2.1.2 函数的表示方法	40
第一课时 函数的表示方法	40
第二课时 分段函数	45
2.1.3 函数的单调性	50
2.1.4 函数的奇偶性	54
2.2 一次函数和二次函数	59
2.2.1 一次函数的性质与图象	59
2.2.2 二次函数的性质与图象	63
2.2.3 待定系数法	68
2.3 函数的应用(I)	73
2.4 函数与方程	79
2.4.1 函数的零点	79
2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法	84
第三章 基本初等函数(I)	94
3.1 指数与指数函数	95



CONTENTS



3.1.1 有理指数幂及其运算	95
3.1.2 指数函数	99
3.2 对数与对数函数	103
3.2.1 对数及其运算	103
第一课时 对数概念及常用对数	103
第二课时 积、商、幂的对数	107
第三课时 换底公式与自然对数	111
3.2.2 对数函数	114
3.2.3 指数函数与对数函数的关系	119
3.3 幂函数	125
3.4 函数的应用(Ⅱ)	129
模块综合测评(一)	141
模块综合测评(二)	144



第一章 集合

本章要览

内容提要

集合的概念是一个描述性概念,集合中的对象是“确定的”“不同的”,实际上就是集合元素的“确定性”和“互异性”.“有限集”“无限集”是按集合所含元素的个数分类的,当一个集合中不含任何一个元素时,那就是空集.

集合的表示方法有两种:列举法是从集合外延的角度给出集合,它将集合所包含的元素罗列出来,所以集合中元素的意义十分明确.特征性质描述法是从集合内涵的角度给出集合,它给出了集合中的代表元素及其所具有的共同性质.代表元素是决定组成集合的元素的标志,代表元素的性质不同,即使特征性质一样,所表示的集合也不同.

若集合 A 中的任一元素均是集合 B 的元素,称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$,此时,当集合 B 又是集合 A 的子集时,称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$.当集合 B 中至少有一个元素不是集合 A 的元素时,称集合 A 是集合 B 的真子集,记为 $A \subsetneq B$.

集合是由元素组成的,两个集合的交集、并集的结果仍然是一个集合.两集合交集集中的元素必须同时在这两个集合中,并集中的元素至少要在其中一个集合中.

全集是相对于研究问题而言的一个相对的概念,它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素.因此,全集因研究问题而异.补集是以全集为前提加以定义的.在补集“ $\complement_U A$ ”中,“ $\complement$ ”是一个专门的符号, U 表示全集, $A \subseteq U$,“ $\complement_U A$ ”是集合 A 在全集 U 中的补集,且 $\complement_U A \subseteq U$.

学法指导

判断一个语句能否确定一个集合,要紧扣集合的定义,从集合元素的“确定性”和“互异性”来考虑问题,往往事半功倍.

学习时,建议同学们多举一些生活中常见的例子,相互比较,加深理解.

表示集合时,有些集合只可用一种方法表示,有些集合两种方法均可.建议同学们在学习时,对某一集合尝试能否用两种方法表示,如果可以,应如何表示.

两集合之间的包含、相等关系是通过一个集合中的元素与另一个集合间的关系定义的.在判断两集合关系时,常利用韦恩图或数轴加以解决.在理解概念时,建议同学们多举一些例子,加以比较.在已知两集合间的关系,求参数的范围时,常用分类讨论、数形结合的思想.

理解交集、并集的概念,要正确区分“且”与“或”的含义;在求两集合的交集、并集时,常利用数形结合法解决(即韦恩图或数轴);同时还要正确掌握图形语言、符号语言、文字语言的相互转化.

求一个集合 A 的补集,必须明确全集 U , U 发生变化,集合 A 的补集往往也要发生变化.在学习时,建议同学们对同一个问题,适当地变换一下 U ,看 $\complement_U A$ 发生了什么变化.具体操作时,常利用数轴或韦恩图来解决.同时还要注意文字语言、图形语言、符号语言的相互转化.

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念



问题导入

数学活动课上,小刚、小红两位同学就“构成英语单词 element(元素)字母的全体”能否表示一个集合展开了争论.

小刚说:“构成英语单词 element 字母的全体不能确定一个集合,因为集合里面的元素具有互异性,这个单词中有三个字母‘e’.”

小红说:“它们能确定一个集合,因为这个单词里面的元素是确定的,这个集合共有 7 个元素.”

这两位同学说的对吗?如果你是老师,如何给这两位同学解释?

提示:这两位同学说的都不对.他们同时犯了两个错误:一是集合里面的元素同时具有“确定性”和“互异性”.不应单独考虑某一方面.二是对题意理解得不好.本题说的是“构成单词 element 字母的全体”,也就是说构成单词 element 的字母

有“e、l、m、n、t”共五个元素,既满足确定性,又满足互异性.能确定一个集合.



知识清单

1. 一般地,把一些能够确定的不同对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集),构成集合的每一个对象叫做这个集合的元素(或元).

2. 一般地,我们把没有元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$.

3. 如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$. 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性和互异性.

4. 常见数集的表示符号:自然数集 $\mathbf{N}$, 正整数集 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$, 整数集 $\mathbf{Z}$, 有理数集 $\mathbf{Q}$, 实数集 $\mathbf{R}$.



三点剖析

一、集合的概念

【例1】判断下列语句能否确定一个集合?如果能表示一个集合,指出它是有限集还是无限集.

- (1) 申办 2008 年奥运会的所有城市.
- (2) 举办 2008 年奥运会的城市.
- (3) 举办 2016 年奥运会的城市.
- (4) 在 2004 年 12 月 26 日印度洋地震海啸中

类题演练 1

给出下列表述:①联合国常任理事国;②充分接近 $\sqrt{2}$ 的实数的全体;③方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的实数根;④全国著名的高等院校. 以上能够构成集合的是 ()

遇难的人的全体.

(5)大于零且小于1的所有的整数.

(6)大于零且小于1的所有的实数.

思路分析:紧扣“集合”“有限集”“无限集”的定义解决问题.

解:(1)申办2008年奥运会的是几个确定的不同的城市,能组成一个集合,且为有限集.

(2)举办2008年奥运会的城市也能组成一个集合且为有限集.

(3)因为举办2016年奥运会的城市现在看还不确定,因此它不能构成一个集合.

(4)在2004年12月26日印度洋地震海啸中遇难的人是确定的、不同的.这些人的全体能组成一个集合,且为有限集.

(5)大于零且小于1的所有整数能组成一个集合.这个集合中不含任何元素,即为空集,它是有限集.

(6)大于零且小于1的实数也是确定的,因此这样的所有的实数也能组成一个集合,且为无限集.

二、元素与集合的关系

【例2】用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) $2\sqrt{3}$ _____ $\{x | x < \sqrt{11}\}$, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

_____ $\{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$.

(2) 3 _____ $\{x | x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$, $(-1,$

$1)$ _____ $\{y | y = x^2\}$.

(3) 设 $x = \frac{1}{3-5\sqrt{2}}$, $y = 3 + \sqrt{2}\pi$, $M = \{m | m =$

$a + b\sqrt{2}, a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$, 则 x _____

M , y _____ M .

思路分析:看所要判断的元素是否能化成集合中元素的形式,方能判定它们的关系.

解:(1) $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11}$.

$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} <$

$\sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$.

$\therefore$ 填 $\notin, \in$.

(2) 设 $n^2 + 1 = 3$, $n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$, $\therefore$ 填 $\notin$.

把 $(-1, 1)$ 代入 $y = x^2$ 成立, 但 $(-1, 1)$ 是有序实数对, 而 $\{y | y = x^2\}$ 是 y 值的集合,

$\therefore$ 填 $\notin$.

A. ①③

B. ①②

C. ①③④

D. ①②③④

解析:①包括确定的国家;③二次方程有确定的根;②④无法确定个体. 故选 A.

答案:A

变式提升 1

下列各组对象能否构成集合?

(1)所有好人;(2)小于2 003的数;(3)和2 003非常接近的数.

思路分析:对于给定集合,元素必须是确定的,如(1)中对象,好人的标准是什么,无法确定其元素.

解:(1)(3)中对象不能构成集合;(2)中对象能构成集合.



(1)判断一个语句能否确定一个集合,除考虑定义外,还应从集合中元素的“确定性”和“互异性”上来判断.

(2)如果一个语句里一个元素也没有,它仍然能确定一个集合,即空集.

(3)“有限集”和“无限集”是通过集合里面元素的个数来定义的. 集合里面元素的个数很多,但不一定是无限集.

类题演练 2

用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) 0 _____ $\mathbf{N}^*$;

(2) $(-4)^0$ _____ $\mathbf{N}^*$;

(3) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Z}$;

(4) 0 _____ $\emptyset$.

思路分析:确定元素是否在集合中,要根据元素是否满足集合的性质来确定.

答案:(1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\notin$

变式提升 2

用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) π _____ $\mathbf{Q}$; (2) $(-1)^0$ _____

$\mathbf{N}$; (3) $\sqrt{3}$ _____ $\{x \in \mathbf{Q} | x < \sqrt{5}\}$; (4) $\sqrt{2} +$

$\sqrt{5}$ _____ $\{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$; (5) 11

_____ $\{x | x = n^2 + n - 1, n \in \mathbf{N}\}$;

(6) $(-1, 1)$ _____ $\{y | y = -x, x \in \mathbf{R}\}$.

解析:(1)由于 π 是无理数,则应填 $\notin$.

(2)因为 $(-1)^0 = 1$ 是自然数,则应填 $\in$.

(3)因为 $\{x \in \mathbf{Q} | x < \sqrt{5}\}$ 表示由所有小于 $\sqrt{5}$ 的有理数所组成的集合,而 $\sqrt{3}$ 是无理数,则应填 $\notin$.

$$(3) x = \frac{1}{3-5\sqrt{2}} = -\frac{3}{41} - \frac{5\sqrt{2}}{41}, -\frac{3}{41} \in \mathbf{Q},$$

$$-\frac{5}{41} \in \mathbf{Q}.$$

$$\therefore x \in M.$$

$$\therefore \pi \notin \mathbf{Q}, \therefore y \notin M.$$

$$\therefore \text{填} \in, \notin.$$

$$\text{答案: (1)} \notin \quad (2) \notin \quad (3) \in \quad \notin$$



判断元素与集合的关系,要明确集合中元素的特征,准确理解集合是解题的关键.

要记清常见数集的符号表示,在判断时,常需先把所给元素化简.

三、利用集合元素的性质解决问题

【例3】已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 只有一个元素,试求 a 的值,并求出这个元素;

(2) 若 A 是空集,求 a 的取值范围;

(3) 若 A 至多有一个元素,求 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a = 0$ 时,此方程为 $2x + 1 = 0$,只有一个根为 $x = -\frac{1}{2}$;

当 $a \neq 0$ 时,则 $\Delta = 0$,即 $4 - 4a = 0$,

$\therefore a = 1$,此时方程有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -1$.

综上所述,当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时,集合 A 中只有一个元素为 $-\frac{1}{2}$ 或 -1 .

(2) 若 A 为空集,则 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \neq 0, \\ 4 - 4a < 0, \end{cases}$ 得 $a > 1$.

(3) 集合 A 至多有一个根,包括集合 A 为空集和集合 A 为只有一个元素的集合两种情况,所以 a 的取值范围是 $a = 0$ 或 $a \geq 1$.



元素与集合的关系只有“属于($\in$)”和“不属于($\notin$)”两种.若已知一元素属于集合,那么此元素必是集合中已知元素之一,并且在集合中只能出现一次(互异性).

$$(4) \sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} < \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}, \text{则应填} \in.$$

(5) 令 $n^2 + n - 1 = 11$,得 $n = -4$ 或 $n = 3$;而 $3 \in \mathbf{N}$,即 $n = 3$ 时, $x = n^2 + n - 1 = 11$,也就是说 11 是集合中的元素,则应填 $\in$.

(6) 集合 $\{y | y = -x, x \in \mathbf{R}\}$ 是所有 y 值所组成的集合,而 y 可取任何实数,则此集合为 $\mathbf{R}$,而 $(-1, 1)$ 是一对实数对,并非实数,则应填 $\notin$.

$$\text{答案: (1)} \notin \quad (2) \in \quad (3) \notin \quad (4) \in \quad (5) \in \quad (6) \notin$$

类题演练 3

已知 $A = \{a + 2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$,若 $1 \in A$,求实数 a 的值.

解析: $\because 1 \in A, \therefore$ 有以下三种情形:

(1) 若 $a + 2 = 1$,则 $a = -1$.将 $a = -1$ 代入已知,检验可知 $a + 2 = a^2 + 3a + 3 = 1$,与集合元素的互异性矛盾,故 -1 不合题意,舍去.

(2) 若 $(a + 1)^2 = 1$,则 $a = 0$ 或 $a = -2$,经检验知 $a = 0$ 符合题意.

(3) 若 $a^2 + 3a + 3 = 1$,则 $a = -1$ 或 $a = -2$.

由(1)(2)可知 $a = -1$ 或 $a = -2$ 均不合题意,应舍去.

综上所述, a 的值为 0.

变式提升 3

已知集合 A 中含有三个元素 $a - 2, 12, 2a^2 + 5a$,又 $-3 \in A$,求 a 的值.

思路分析:由集合中元素的确定性知 $-3 = a - 2$ 或 $-3 = 2a^2 + 5a$,由元素的互异性知 $a - 2 \neq 2a^2 + 5a$.本题可由等式解出 a 的值再验证不等式.

解: $\because -3 \in A, \therefore a - 2 = -3$ 或 $2a^2 + 5a = -3$.

$\therefore a = -1$ 或 $a = -\frac{3}{2}$,但 $a = -1$ 时, $a - 2 = -3, 2a^2 + 5a = -3$,与集合中元素的互异性矛盾.

$$\text{故 } a = -\frac{3}{2}.$$



基础达标

- 1 下列语句能确定一个集合的是 ()

A. 实验中学高一·一班高个子同学的全体
B. 实验中学高一·一班身高最高的三位同学
C. 我国的小河流
D. $3, x, x^2$ 三个实数

解析: A、C 所指标准不明确, D 中若 $x=1$ 时, 违背集合元素的互异性, 故选 B.

答案: B

- 2 若 $a \in \mathbf{R}$, 但 $a \notin \mathbf{Q}$, 则 a 可以是 ()

A. 3.14 B. -5 C. $\frac{3}{7}$ D. $\sqrt{7}$

答案: D

- 3 给出下列关系式: $\sqrt{3} \in \mathbf{R}, 0.5 \notin \mathbf{Q}, 2 \in \mathbf{N}^*$. 其中正确的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析: $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$ 与 $2 \in \mathbf{N}^*$ 正确.

答案: C

- 4 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中, 最多含有元素的个数为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解析: $\sqrt{x^2} = |x|, -\sqrt[3]{x^3} = -x$, 而 $|x|$ 与 x 和 $-x$ 两者中的一个相等, 故最多含 2 个元素.

答案: A

- 5 设 a, b 都是非零实数, 则 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 可能取的值组成的集合中的元素为 ... ()

A. 3 B. 3, 2, 1
C. 3, 1, -1 D. 3, -1

解析: 分 $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \end{cases} \begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \end{cases}$ 四种情况讨论.

答案: D

- 6 用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”符号填空.

(1) $3 \frac{2}{7}$ _____ $\mathbf{Q}$; (2) 3^2 _____ $\mathbf{N}$;

(3) π _____ $\mathbf{Q}$; (4) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{R}$;

(5) $\sqrt{9}$ _____ $\mathbf{Z}$; (6) $(\sqrt{5})^2$ _____ $\mathbf{N}$.

答案: (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$ (5) $\in$ (6) $\in$

- 7 设 A 是所有亚洲国家组成的集合, B 为所有

亚洲国家的首都组成的集合, 请用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1) 台湾 _____ A ;

(2) 台湾 _____ B ;

(3) 印度 _____ A ;

(4) 堪培拉 _____ B .

答案: (1) $\notin$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\in$

- 8 若 $x \in \mathbf{N}$, 则 $\{5, x, x^2 - 4x\}$ 中的元素 x 必须满足什么条件?

解析: 满足 $\begin{cases} x \neq 5, \\ x^2 - 4x \neq 5, \text{ 故 } x \neq 5 \text{ 且 } x \neq 0. \\ x^2 - 4x \neq x, \end{cases}$

$\therefore x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \neq 5$.

- 9 已知集合 $A = \{a \mid ma^2 + 3a + 1 = 0\}$ 只含一个元素, 求 m 的值.

解析: 若 $m=0$, 则 $a = -\frac{1}{3}$, 符合题意.

若 $m \neq 0$, 则 $\Delta = 0$, 得 $m = \frac{9}{4}$.

$\therefore m$ 的值为 0 或 $\frac{9}{4}$.

- 10 若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$, 求实数 a 的值.

解析: (1) 当 $a-3 = -3$ 时, $a=0$,

集合为 $\{-3, -1, -4\}$, 符合题意;

(2) 当 $2a-1 = -3$ 时, $a = -1$, 集合为 $\{-4, -3, -3\}$, 根据集合的互异性原则, $a = -1$ 不符合题意;

(3) 当 $a^2-4 = -3$ 时, $a^2 = 1, a = \pm 1$, 当 $a=1$ 时, 集合为 $\{-2, 1, -3\}$, 此时成立.

故 a 的实数值应为 0 或 1.



综合运用

- 11 下列命题中, 正确的个数是 ()

① 集合 $\mathbf{N}$ 中最小的正数是 1 ② $-a \notin \mathbf{N}$, 则 $a \notin \mathbf{N}$ ③ $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解集中含有 2 个元素

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析: ① 正确; ② ③ 错误:

② 中, 若 $-a = -2 \notin \mathbf{N}$,

但 $a = 2 \in \mathbf{N}$, ③ 中只有一个元素 $x = 3$.

答案: B

- 12 已知集合 S 中的三个元素 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的

三边长,那么 $\triangle ABC$ 一定不是..... ()

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

解析:由题意知 $a \neq b \neq c$, 故选 D.

答案:D

13 设集合 A 含有三个元素 2, 4, 6, 若 $a \in A$, 则

$6-a \in A$, 那么 a 的值是_____.

答案:2 或 4

14 设 M 是由平行四边形的全体组成的集合, 若

a 是矩形, b 是梯形, 则 a _____ M ,

b _____ M .

答案: $\in$ $\notin$

15 已知集合 $A = \{x | x < 6 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{\text{小于}$

10 的质数 $\}$, $C = \{24 \text{ 和 } 36 \text{ 的正公因数}\}$, 设 A 、

B 、 C 的元素个数分别是 a 、 b 、 c . 求:

(1) $a+b+c$;

(2) $\{y | y \in A, \text{ 且 } y \in C\}$;

(3) $\{y | y \in B, \text{ 且 } y \notin C\}$.

解析:由题意知 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2,$

$3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

(1) $a=6, b=4, c=6$. 故 $a+b+c=16$.

(2) $\because y \in A \text{ 且 } y \in C, \therefore y=1, 2, 3, 4$,

即 $\{y | y \in A \text{ 且 } y \in C\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

(3) $\because y \in B \text{ 且 } y \notin C, \therefore y=5, 7$,

即 $\{y | y \in B \text{ 且 } y \notin C\} = \{5, 7\}$.



拓展探究

16 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x = a + \sqrt{3}b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 判断下

列元素与集合 A 的关系:

(1) $x=0$;

(2) $x = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

(3) $x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

(4) $x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 + x_2$;

(5) $x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 x_2$.

解析:(1) $0 \in A$;

(2) 由 $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{5-3} \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}) = \sqrt{5} +$

$\sqrt{3} \notin A$.

(3) 由 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \in A$.

(4) 由 $x_1 \in A, x_2 \in A$ 不妨设 $x_1 = m_1 +$

$\sqrt{3}n_1, x_2 = m_2 + \sqrt{3}n_2$ 且 $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$.

$\therefore x = x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) + \sqrt{3}(n_1 + n_2) \in A$.

(5) 同(4)易得 $x = x_1 x_2 \in A$.

1.1.2 集合的表示方法



课
前
导
引



问题导入

在数学活动课上,老师让同学们随意写一个集合,使得该集合只含有一1 和 1 两个元素. 小刚写的集合为 $A = \{x | x^2 = 1\}$, 小红写的集合为 $B = \{x^2 = 1\}$. 这两个同学写的都正确吗? 为什么?

提示:集合 $A = \{x | x^2 = 1\}$ 表示方程 $x^2 = 1$ 的根组成的集合.

因为 $x^2 = 1$ 的根为 $x = \pm 1$, 所以集合 A 即为 $\{-1, 1\}$. 该集合正确.

集合 $B = \{x^2 = 1\}$, 是用列举法表示了一个方程“ $x^2 = 1$ ”, 而不是方程的根 ± 1 . 若要表示方程的根 ± 1 , 必须写成 $\{x | x^2 = 1\}$ 的形式. “ x ”和“ $|$ ”不能省略, 即小刚写的集合正确, 小红写的集合不正确.

从本例你认为列举法和特征性质描述法有何不同?



知识清单

1. 如果一个集合是有限集, 元素确定, 常常把集合的所有元素都一一列举, 写在大括号“ $\{\}$ ”内. 这种表示集合的方法叫做列举法. 用列举法表示集合时不必考虑元素的先后顺序, 这就是集合元素所具有的无序性.

2. 如果在集合 I 中, 属于集合 A 的任一元素 x 都具有性质 $p(x)$, 而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$, 则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的共同特征, 集合 A 可用它的特征性质 $p(x)$ 描述为 $\{x | x \in I, p(x)\}$.



三点剖析



各个击破

一、用列举法和描述法来表示集合

【例1】请用列举法表示下列集合：

- (1) 不大于 10 的非负偶数集；
- (2) 自然数中不大于 10 的质数集；
- (3) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 2\}$ ；
- (4) 方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解构成的集合.

思路分析：分别把各集合中的元素一一找出来写在括号内即可.

解：(1) 不大于 10 的非负偶数有 0, 2, 4, 6, 8, 10.

故该集合可表示为 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

(2) 自然数中不大于 10 的质数有 2, 3, 5, 7.

故该集合可表示为 $\{2, 3, 5, 7\}$.

(3) 绝对值小于或等于 2 的整数有 -1, 0, 1, -2, 2.

故该集合可表示为 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(4) 方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解为 $x=1$ 或 $x=2$.

故该集合可表示为 $\{1, 2\}$.



用列举法表示集合时，需注意如下几点：(1) 元素与元素之间必须用“,” 隔开；(2) 不必考虑元素出现的先后顺序；(3) 列举法常用来表示有限集，在表示无限集时，必须把元素间的规律显示清楚后，才能用省略号表示，如正整数的倒数可表示为 $\{1, \frac{1}{2},$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$.

二、用描述法准确地表示集合

【例2】用特征性质描述法表示下列集合：

- (1) 方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 的整数解集；
- (2) 方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 的实数解集.

思路分析：用特征性质描述法表示集合，需找准 x 所属的集合 I 和集合的一个特征性质 $p(x)$.

解：(1) 该集合可表示为 $\{x \in \mathbf{Z} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$ ；

(2) 该集合可表示为 $\{x \in \mathbf{R} \mid 6x^2 - 5x +$

类题演练 1

用列举法表示下列集合：

- (1) $\{x \mid x+y=7, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$ ；
- (2) $\{(x, y) \mid x+y=7, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$ ；
- (3) $\{y \mid y=x^2-1, -2 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$.

解析：(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ；

(2) $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ ；

(3) $\{-1, 0, 3\}$.

变式提升 1

设集合 $B = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}\}$.

- (1) 试判断元素 1, 元素 2 与集合 B 的关系；
- (2) 用列举法表示集合 B .

解析：(1) 当 $x=1$ 时， $\frac{6}{2+x} = 2 \in \mathbf{N}$ ， $\therefore 1 \in B$ ；

当 $x=2$ 时， $\frac{6}{2+x} = \frac{3}{2} \notin \mathbf{N}$ ， $\therefore 2 \notin B$.

(2) $\because \frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}$,

$\therefore 2+x$ 只能取 1, 2, 3, 6.

$\therefore x$ 只能取 0, 1, 4, 则 $B = \{0, 1, 4\}$.

类题演练 2

用自然语言表示下列集合：

- (1) $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ ；(2) $\{x \mid x \geq 4\}$ ；(3) $\{x \mid x \text{ 是正方形}\}$.

解析：(1) 所有非负偶数组成的集合.

(2) 所有大于或等于 4 的实数组成的集合.

(3) 所有的正方形组成的集合.

$1=0\}$.



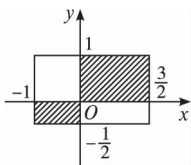
(1)对(1)(2)两小题,因为方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$,也就是说方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 没有整数解,即第(1)问中的集合实际上为空集,第(2)问中的集合用列举法可表示为 $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

(2)用特征性质描述法表示集合时应注意:①当上下文易知代表元素 x 的范围时, $x \in I$ 可简记为 x ; ②“竖线”不可省略; ③ $p(x)$ 可以是文字语言,也可以是数学符号语言.

三、选择合适的表示方式来表示集合

【例3】用特征性质描述法表示下列集合:

- (1)所有被5整除的数;
- (2)下图中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合.



思路分析:(1)中被5整除的数可表示为 $5n, n \in \mathbb{Z}$; (2)中的元素是坐标 (x, y) .

解:(1) $\{x | x = 5n, n \in \mathbb{Z}\}$;

(2) $\{(x, y) | -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq 1, \text{且 } xy \geq 0\}$.



(1)要写清楚集合中元素的代号,即代表元素,并写准确元素的特征性质.

(2)要清楚集合中的元素是坐标,有序实数对,而不是数集,不要漏掉 $xy \geq 0$.

变式提升 2

用描述法表示下列集合:

- (1) $\{-1, 1\}$;
- (2)大于3的全体偶数构成的集合;
- (3)在平面 α 内,线段 AB 的垂直平分线;
- (4)所有长方形构成的集合.

解析:(1) $\{x | x^2 = 1\}$, 或 $\{x | (x-1)(x+1) = 0\}$, 或 $\{x | |x| = 1\}$.

(2) $\{x | x = 2k, k > 1, k \in \mathbb{N}\}$.

(3)设点 P 为线段 AB 垂直平分线上任意一点,则 $PA = PB$,这是集合中元素的共同特征性质.

$\therefore$ 集合可表示为 $\{\text{点 } P \in \text{平面 } \alpha | PA = PB\}$.

(4) $\{x | x \text{ 是长方形}\}$.

类题演练 3

(1)已知集合 $M = \{x \in \mathbb{N} | \frac{6}{1+x} \in \mathbb{Z}\}$, 求 M ;

(2)已知集合 $C = \{\frac{6}{1+x} \in \mathbb{Z} | x \in \mathbb{N}\}$, 求 C .

解析:(1) $\because x \in \mathbb{N}$, 且 $\frac{6}{1+x} \in \mathbb{Z}$,

$\therefore 1+x = 1, 2, 3, 6$.

$\therefore x = 0, 1, 2, 5$.

$\therefore M = \{0, 1, 2, 5\}$.

(2)结合(1)知 $\frac{6}{1+x} = 6, 3, 2, 1$.

$\therefore C = \{6, 3, 2, 1\}$.

变式提升 3

方程 $2x + 1 = 0$ 的解集的元素是什么?用特征性质描述法表示这个集合.

解:方程的解集的元素为 $-\frac{1}{2}$,用描述法表示为 $\{x | 2x + 1 = 0\}$.



课后导练



基础达标

- 1 对集合 $\{a, b, c\}$, 下列说法错误的是 $\dots$ ()

- A. 该集合是含有3个元素的有限集
- B. a, b, c 三个数一定全不相等
- C. 该集合不能表示为 $\{c, b, a\}$
- D. $a \in \{a, b, c\}$

解析:由集合元素的特性知 C 错误.

答案:C

- 2 下列集合能表示集合
- $\{0,1\}$
- 的是 ()

- A. $\{x(x-1)=0\}$
 B. $\{x|0 \leq x \leq 1\}$
 C. $\{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x \leq 1\}$
 D. $\{(x,y) | x=0, y=1\}$

答案:C

- 3 下列表示方法中正确的是 ()

- A. $3 \in \{y | y = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$
 B. $0 \in \{(x,y) | x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$
 C. $-3 \in \{x | x^2 - 9 = 0, x \in \mathbf{N}\}$
 D. $2 \in \{x | x = \sqrt{n}, n \in \mathbf{N}\}$

答案:D

- 4 下列表示同一个集合的是 ()

- A. $M = \{(1,2)\}, N = \{(2,1)\}$
 B. $M = \{1,2\}, N = \{2,1\}$
 C. $M = \{(1,2)\}, N = \{1,2\}$
 D. $M = \{y | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x - 1, x \in \mathbf{N}\}$

解析:A中 $(1,2)$ 与 $(2,1)$ 是两个不同的点,C中 M 集合是点集,而集合 N 是数集,D的范围不一致.

答案:B

- 5 下列命题中正确的是 ()

- A. 集合 $\{0\}$ 中无元素
 B. 集合 $\{x \in \mathbf{Z} | 6x^2 - x - 1 = 0\}$ 中无元素
 C. 集合 $\{x \in \mathbf{Q} | \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$ 中只有有限个元素
 D. $M = \{m \in \mathbf{R} | m \leq \sqrt{10}\}, a = \sqrt{2} + \sqrt{10}$, 则 $a \in M$

答案:B

- 6 集合
- $A = \{x^2, 3x+2, 5y^3-x\}, B = \{\text{周长等于} 20 \text{ cm的三角形}\}, C = \{x \in \mathbf{R} | x-3 < 2\}, D = \{(x,y) | y = x^2 - x - 1\}$
- ,其中用特征性质描述法表示集合的有_____个.

解析: B, C, D 是用描述法表示集合, A 是用列举法.

答案:3

- 7 已知
- $A = \{1, 0, -1, 2\}, B = \{y | y = |x|, x \in A\}$
- ,则集合
- $B =$
- _____.

答案: $\{0, 1, 2\}$

- 8 用
- $\in$
- 或
- $\notin$
- 填空.

- (1) 若 $A = \{x | x^2 = x\}$, 则 -1 _____ A ;
 (2) 若 $B = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 3 _____ B ;
 (3) 若 $C = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, 则 8 _____ C ;
 (4) 若 $D = \{x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 3\}$, 则 1.5 _____ D .

答案:(1) $\notin$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

- 9 (1)改用列举法表示下列集合:

- ① $\{\text{自然数中五个最小的完全平方数}\};$
 ② $\{x | (x+1)^2(x+2)=0\};$
 ③ $\{(x,y) | \begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}\}.$

- (2)改用描述法表示下列集合:

- ① $\{2, 4, 6, 8, 10\};$
 ② $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}\};$
 ③ $\{2, 3, 4\}.$

解析:(1)① $\{0, 1, 4, 9, 16\};$ ② $\{-1, -2\};$ ③ $\{(2,1)\}.$ (2)① $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*, n < 6\};$ ② $\{x | x = \frac{n}{n+2}, n \in \mathbf{N}^*, n < 6\};$ ③ $\{x | 2 \leq x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}.$

- 10 用列举法表示下列方程或方程组解的集合:

(1) $(x-1)^2(x-2)=0;$ (2) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1; \end{cases}$ (3) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0.$

解析:方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 有三个根,但其中两个是二重根.

方程 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$ 是二元二次

方程,只有一组解 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases}$ 所以其解的集合

为 $\{(1, -2)\}$ 而不是 $\{1, -2\}.$ 所以(1) $\{1, 2\};$ (2) $\{(3, 2)\};$ (3) $\{(1, -2)\}.$ 

综合运用

- 11 已知
- $x = 4 + \sqrt{5}, y = \frac{\sqrt{5}}{3}, z = \frac{1}{\sqrt{5}+1}, k = 2\sqrt{5} + \pi,$

π , 集合 $M = \{m | m = a + b \cdot \sqrt{5}, a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$, 则 _____ ()

- A. $x \notin M$ B. $y \notin M$
 C. $z \in M$ D. $k \in M$

解析: $\because x \in M, y \in M, z \in M$, 而 $k = 2\sqrt{5} + \pi, \pi \notin \mathbf{Q},$

 $\therefore k \notin M.$

答案:C

- 12 已知平面内的点
- $M(1, 2), N(0, 3)$
- , 集合
- $A =$

$\{(x,y) | 2x-y=0\}, B = \{(x,y) | x+2y=5\},$
 $C = \{(x,y) | 2x+3y=9\}$, 那么 M, N 与 A, B, C 的关系是 _____ ()

- A. $M \in A, N \in B$ B. $M \in B, N \in A$
 C. $M \in C, N \in C$ D. $M \in B, N \notin B$

解析:把 M, N 点对应的坐标代入 A, B, C 集

合中检验,有 $M \in B, N \notin B$.

答案:D

- 13 集合 $\{(x, y) | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 用列举法表示该集合为_____.

解析: $\because |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}$,

$$\therefore x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

对应 y 的值为 $3, 0, -1, 0, 3$.

故集合中元素为 $(-2, 3), (-1, 0),$

$(0, -1), (1, 0), (2, 3)$.

答案: $\{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

- 14 集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 2 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 a 的值的集合为_____.

解析: 当 $a = 0$ 时, $x = -1$,

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } \Delta = 4 - 8a = 0, a = \frac{1}{2}.$$

答案: $\{0, \frac{1}{2}\}$

- 15 数学课上, 老师让同学们任意写出一个有一些数的全体确定的集合, 老师随机地拿了三位同学所写的集合让同学们来研究. 其中 $A = \{x \in \mathbf{N}^* | x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | -3 \leq x \leq 2\}$, $C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 老师提出了以下三个问题让同学们讨论. 你能顺利地解出来吗?

(1) 分别用列举法表示出这三个集合;

(2) 是否存在实数 a , 使得 $a \in A$ 且 $a \in B$;

(3) 是否存在实数 b , 使得 $b \in C$ 但 $b \notin A$.

解析: (1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$.

(2) 由(1)可知存在实数 $a = 1$ 或 2 , 使得 $a \in A$ 且 $a \in B$.

(3) 不存在实数 b , 使得 $b \in C$ 但 $b \notin A$.



拓展探究

- 16 设集合 $M = \{a | a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 试证明: 一切奇数属于集合 M ;

(2) 关于集合 M , 你能得出另外的一些结论吗?

解析: (1) 对任意奇数 a , a 可以表示为 $2n+1$ ($n \in \mathbf{Z}$), 而 $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$.

所以 $a \in M$, 得证.

(2) 结论很多, 能给出即可. 如:

① M 中的所有元素都属于 $\mathbf{Z}$;

② 所有的完全平方数都属于 M ($a = n^2 = n^2 - 0^2$);

③ 因为 $a = 4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$ ($k \in \mathbf{Z}$), 所以 $a \in M$.

1.2 集合之间的关系与运算

1.2.1 集合之间的关系



课前提问



问题导入

写出集合 $\{\text{农夫}, \text{狼}, \text{羊}, \text{菜}\}$ 的所有子集, 由此设计一个方案: 农夫用船把羊、狼、菜从河的一岸送到另一岸, 农夫每次驾船只能运一种东西, 并且农夫不在场的情况下, 狼不能和羊在一起, 羊不能和菜在一起.

提示: 在设计本题方案时, 每运一步, 应考虑 $\{\text{农夫}, \text{狼}\}$ 、 $\{\text{农夫}, \text{羊}\}$ 、 $\{\text{农夫}, \text{菜}\}$ 这三个集合. 农

夫不在时, 只能是狼和菜在一起, 所以第一步必须运羊. 运送过程中, 两岸所能有的东西必须考虑集合 $\{\text{狼}\}$ 、 $\{\text{羊}\}$ 、 $\{\text{菜}\}$ 、 $\{\text{狼}, \text{菜}\}$, 由此想到第二步运送时, 农夫不论运什么, 必须捎回第一次运送的羊.

解: 子集有: $\emptyset, \{\text{农夫}\}, \{\text{狼}\}, \{\text{羊}\}, \{\text{菜}\}, \{\text{农夫}, \text{狼}\}, \{\text{农夫}, \text{羊}\}, \{\text{农夫}, \text{菜}\}, \{\text{狼}, \text{羊}\}, \{\text{狼}, \text{菜}\}, \{\text{羊}, \text{菜}\}, \{\text{农夫}, \text{狼}, \text{羊}\}, \{\text{农夫}, \text{狼}, \text{菜}\}, \{\text{农夫}, \text{羊}, \text{菜}\}, \{\text{狼}, \text{羊}, \text{菜}\}, \{\text{农夫}, \text{狼}, \text{羊}, \text{菜}\}$.

方案: 农夫先把羊运过河, 第二次再把菜运过

河,此时又将羊捎回来,第三次放下羊同时把狼运过河,第四次将羊运过河.



知识清单

1. 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素,就说集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$,读作 A 包含于 B .

2. 若集合 $A \subseteq B$,但存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$,称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$,读作 A 真包含于 B .

3. 若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则 $A = B$.

4. 对任何集合 A, B, C ,用“ $\subsetneq$ ”或“ $\subseteq$ ”填空.

(1) $A \subseteq A$; (2) $\emptyset \subseteq A$;

(3) $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$; $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.



课堂导学



三点剖析



各个击破

一、子集、真子集、集合相等的概念

【例1】判断下列说法是否正确,如果不正确,请加以改正.

(1) 对任意的集合 A ,有 $\emptyset \subseteq A$.

(2) 如果 $A \supseteq B$ 且 $A \neq B$,那么 B 必是 A 的真子集.

(3) 如果 $A = B$,则集合 A 是集合 B 的子集,但一定不是 B 的真子集.

(4) 如果对任意的 $x_0 \in A$,都能得到 $x_0 \in B$,则集合 A 是集合 B 的真子集.

思路分析:紧扣子集、真子集的概念,空集的性质.

解:(1)空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.此处没说集合 A 是否非空,因此说法错误,应有 $\emptyset \subseteq A$.

(2)集合 B 是集合 A 的子集,实际上有两种可能:一是 B 是 A 的真子集;二是集合 A 与集合 B 相等.

$\because A \supseteq B$,又 $A \neq B$, $\therefore B$ 必是 A 的真子集.故此说法正确.

(3)由 $A = B$ 知, A, B 两集合的元素完全相同, A 中的任一元素必是集合 B 中的元素,但集合 B 中不存在元素属于 B 但不属于 A .故集合 A 是集合 B 的子集,但不是 B 的真子集.故此说法正确.

(4)由对任意的 $x_0 \in A$,能得到 $x_0 \in B$,故集合 A 是集合 B 的子集,不能确定是否为真子集.故此说法错误.

类题演练 1

(1)已知 $A = \{m, n, f\}$,写出 A 的所有子集,并分别求出 A 的子集、真子集、非空真子集的个数.

(2)已知集合 A 满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d\}$,求所有满足条件的集合 A .

解析:(1)集合 A 的所有子集为 $\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{f\}, \{m, n\}, \{m, f\}, \{n, f\}, \{m, n, f\}$.

$\therefore$ 子集的个数为 $2^3 = 8$,真子集的个数为 $2^3 - 1 = 7$,非空真子集个数为 $2^3 - 1 - 1 = 6$.

(2) $\because \{a, b\} \subseteq A$,

$\therefore A$ 中必须含有元素 a, b .

又 $\because A \subseteq \{a, b, c, d\}$,

$\therefore$ 满足条件的集合 A 有 $\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$,共四个.

变式提升 1

写出集合 $M = \{a, b, c, d\}$ 的所有真子集.

解析:集合 M 的所有真子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.



在子集的定义中,不能理解为子集 A 是集合 B 中的“部分元素”形成的集合,因为

①若 $A = \emptyset$,则 A 中不含任何元素. ②若 $A = B$,则 A 是由 B 中所有元素组成的集合.

二、根据两集合间的关系进行有关运算

【例2】已知 $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y | y = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 求证: $A = B$.

思路分析: 根据两集合相等的定义, 欲证 $A = B$, 必须证明 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 两方面.

证明: (1) 设任意 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

当 n 为偶数, 即 $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ 时, $x_0 = 2n + 1 = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$;

当 n 为奇数, 即 $n = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}$ 时, $x_0 = 2n + 1 = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

$\therefore x_0 \in B. \therefore A \subseteq B$.

(2) 设任意 $y_0 \in B$, 则 $y_0 = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$,

若 $y_0 = 4k + 1 = 2(2k) + 1, k \in \mathbb{Z}. \therefore 2k \in \mathbb{Z}$.

若 $y_0 = 4k - 1 = 2(2k - 1) + 1$,

$\therefore k \in \mathbb{Z}, \therefore 2k - 1 \in \mathbb{Z}. \therefore y_0 \in A. \therefore B \subseteq A$.

综上知, $A = B$.



本题学生容易出现“令 $2n + 1 = 4k \pm 1$ ”的错误做法. 两集合相等是通过两集合间的包含关系定义的, 而不是通过“它们所含元素完全相同”来定义的. 从本题可以看出, 这样定义具有很强的操作性.

三、元素与集合、集合与集合之间的关系

【例3】以下各组中的两个对象是什么关系, 用适当的符号表示出来.

(1) 0 与 $\{0\}$; (2) 0 与 $\emptyset$; (3) $\emptyset$ 与 $\{0\}$; (4) $\{0, 1\}$ 与 $\{(0, 1)\}$; (5) $\{(b, a)\}$ 与 $\{(a, b)\}$.

思路分析: 首先要分清是“元素与集合”的关系, 还是“集合与集合”的关系. 如果是集合与集合, 还要分清是什么关系.

解: (1) $0 \in \{0\}$. (2) $0 \notin \emptyset$.

(3) $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 都是集合, 两者的关系是“包含与否”的关系. $\therefore \emptyset \subseteq \{0\}$.

(4) $\{0, 1\}$ 是含有两个元素 $0, 1$ 的集合; 而 $\{(0, 1)\}$ 是表示以点 $(0, 1)$ 为元素的集合, 它只含有一个元素. $\therefore \{0, 1\} \neq \{(0, 1)\}$.

(5) 当 $a = b$ 时, $\{(a, b)\} = \{(b, a)\}$.

当 $a \neq b$ 时, $\{(a, b)\} \neq \{(b, a)\}$.



(1) 要十分注意 $\in$ 与 $\subseteq$ (或 $\supseteq$) 之间的区别: “ $\in$ ”是表示元素与集合之间的关系; “ $\subseteq$ (或 $\supseteq$)”是表示集合与集合之间的关系.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别: 一般地, a 表示一个元素, 而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合.

类题演练 2

已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求 a 的值.

解析: $\because A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1, 3\}$, 且 $B \subseteq A$.

$\therefore$ (1) 当 $B = \emptyset$ 时, 方程 $ax - 1 = 0$ 无解.

$\therefore a = 0$.

(2) 当 $B \neq \emptyset$ 时, 则 $B = \{\frac{1}{a}\}$, 若 $\frac{1}{a} = -1$, 则 $a = -1$; 若 $\frac{1}{a} = 3$, 则 $a = \frac{1}{3}$.

综上知, a 的值为 $0, -1$ 或 $\frac{1}{3}$.

变式提升 2

已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求由实数 m 所构成的集合 M .

解析: 由 $A = \{-3, 2\}$, $\therefore B \subseteq A$.

当 $B = \emptyset$ 时, $m = 0$;

当 $B = \{-3\}$ 时, $m = \frac{1}{3}$;

当 $B = \{2\}$ 时, $m = -\frac{1}{2}$.

$\therefore M = \{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$.

类题演练 3

已知 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | x \subseteq A\}$, 则 A 与 B 的关系正确的是 ()

A. $A \subseteq B$ B. $A \supseteq B$

C. $B \subseteq A$ D. $A \in B$

解析: $\because x \subseteq A, A = \{0, 1\}$.

$\therefore x$ 为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$.

$\therefore B = \{x | x \subseteq A\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

$\therefore \{0, 1\}$ 是 B 的一个元素, 即 $A \in B$. 故选 D.

答案: D

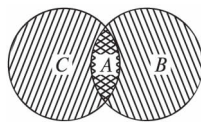
变式提升 3

某工厂生产的产品在质量和长度上都合格时, 该产品才合格, 若用 A 表示合格产品的集合, B 表示质量合格的产品的集合, C 表示长度合格的产品的集合, 则下列包含关系哪些成立?

$A \subseteq B, B \subseteq A, A \subseteq C, C \subseteq A$.

试用 Venn 图表示这三个集合的关系.

解析: 由题意知, $A \subseteq B, A \subseteq C$ 成立, 如图所示.





基础达标

- 1 下列命题:①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若 $\emptyset \subseteq A$, 则 $A \neq \emptyset$. 其中正确的有 ()
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

解析:只有④正确.

答案:B

- 2 集合 $\{0\}$ 和 $\emptyset$ 的关系是 ()

A. $\{0\} = \emptyset$ B. $\emptyset \in \{0\}$
C. $\emptyset \subsetneq \{0\}$ D. $0 \subsetneq \emptyset$

解析:空集是任何非空集合的真子集.

答案:C

- 3 设集合 $P = \{a, b, 2\}$, $Q = \{2a, 2, b^2\}$, 且 $P = Q$, 则 a, b 的值分别为 ()

A. $a = 0, b = 1$

B. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

C. $a = 0, b = 1$ 或 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

D. 以上均不对

解析:当 $\begin{cases} a = 2a, \\ b = b^2 \end{cases}$ 时, $a = 0, b = 1$;

当 $\begin{cases} a = b^2, \\ b = 2a \end{cases}$ 时, $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$. 注意元素的

互异性.

答案:C

- 4 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 9\}$, 且 A 中至少有一个奇数, 则这样的集合共有 ()

A. 2 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

解析: $A = \{2, 3\}$ 或 $\{2, 9\}$ 或 $\{3, 9\}$ 或 $\{3\}$ 或 $\{9\}$ 或 $\{2, 3, 9\}$.

答案:D

- 5 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x |$

$x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

A. $M = N$

B. $M \supsetneq N$

C. $M \subsetneq N$

D. $M \supseteq N$

解析: $\because x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}$, 而 N 的元素 $x =$

$\frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4}$.

$\therefore M \subsetneq N$.

答案:C

- 6 同时满足(1) $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (2) 若 $a \in M$, 则 $6-a \in M$ 的非空集合 M 有 ()
- A. 16 个 B. 15 个 C. 7 个 D. 6 个

解析:1 与 5, 2 与 4 都成对出现在集合中, 满足题意, 3 在集合中满足题意.

答案:C

- 7 2006 上海高考, 文 已知集合 $A = \{-1, 3, m\}$, 集合 $B = \{3, 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$

答案:4

- 8 若 $A \subseteq B, A \subseteq C, B = \{0, 1, 2, 3\}, C = \{0, 2, 4, 8\}$, 则满足上述条件的集合 A 为

解析: $\because A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$,

$\therefore A$ 中最多含 0, 2 两个元素.

故 $A = \{0\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\emptyset$ 或 $\{0, 2\}$.

答案: $\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}$

- 9 已知集合 $M = \{x | k+1 \leq x \leq 2k\}$, $N = \{x |$

$1 \leq x \leq 3\}$, 且 $M \subseteq N$. 求 k 的取值范围.

解析:若 $2k < k+1$, 即 $k < 1$ 时,

$M = \emptyset \subseteq N$, 符合题意.

若 $2k \geq k+1$, 即 $k \geq 1$ 时, 由 $M \subseteq N$, 则有

$\begin{cases} 2k \leq 3, \\ k+1 \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 \leq k \leq \frac{3}{2}$. 由上述得 $k \leq \frac{3}{2}$.

- 10 已知集合 $A = \{m, m+d, m+2d\}$, 集合 $B = \{m, mq, mq^2\}$ 且 $A = B$, 求 q 的值.

解析:由 A, B 有公共元素 m ,

可能有 $\begin{cases} m+d=mq, \\ m+2d=mq^2 \end{cases}$ ①

或 $\begin{cases} m+d=mq^2, \\ m+2d=mq, \end{cases}$ ②

解①得 $q = 1$.

解②得 $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$.

检验: $q = 1$ 舍去(不符合互异性),

故 $q = -\frac{1}{2}$.



综合运用

- 11 已知 $M = \{x | \begin{cases} 0 \leq 2-x \leq 6 \\ \frac{1}{2}x \leq 2 - \frac{1}{6}x \end{cases}\}$, $N = \{x | a -$

$2x \geq 2a - 3x$ }, 且 $M \subseteq N$, 则 a 的取值范围是

- A. $a \leq 4$ B. $a \leq -4$
C. $a < -4$ D. $a < 4$

解析: $M = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x \geq a\}$. 通过数轴可知 $a \leq -4$.

答案: B

- 12 设集合 $A = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{y | y = b^2 + 4b + 5, b \in \mathbb{N}^*\}$, 则 A 与 B 的关系是

- A. $A \subseteq B$ B. $A \subsetneq B$
C. $A = B$ D. $B \subsetneq A$

解析: 整理得 $A = \{x | x \geq 2 \text{ 且 } x \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{y | y = (b+2)^2 + 1, b \in \mathbb{N}^*\} = \{y | y \geq 10, y \in \mathbb{N}^*\}$. $\therefore B \subsetneq A$.

答案: D

- 13 若集合 $P = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $S = \{x | ax + 1 = 0\}$, 且 $S \subseteq P$. 求由 a 的可取值组成的集合.

解析: 由 $P = \{-3, 2\}$.

当 $a = 0$ 时, $S = \emptyset$, 有 $S \subseteq P$.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax + 1 = 0$ 的解为 $x = -\frac{1}{a}$, 又 $S \subseteq P$,

$$\therefore -\frac{1}{a} = -3 \text{ 或 } -\frac{1}{a} = 2,$$

$$\text{即 } a = \frac{1}{3} \text{ 或 } a = -\frac{1}{2}.$$

故所求集合为 $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$.

- 14 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq$

$2m - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

解析: 当 $2m - 1 < m + 1$, 即 $m < 2$ 时, $B = \emptyset$, 有 $B \subseteq A$.

当 $2m - 1 \geq m + 1$, 即 $m \geq 2$ 时, 由 $B \subseteq A$,

$$\text{有 } \begin{cases} m + 1 \geq -2, \\ 2m - 1 \leq 5, \end{cases} \text{ 解得 } 2 \leq m \leq 3.$$

由上述知 $m \leq 3$.

- 15 设集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{1, a^2 - a + 1\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的值.

解析: $\because B \subseteq A, \therefore a^2 - a + 1 = 3$, ①

或 $a^2 - a + 1 = a$. ②

由①解得 $a = -1$ 或 $a = 2$.

由②解得 $a = 1$.

检验: $a = 1$ 时, 不适合.

$\therefore a = -1$ 或 $a = 2$.



- 16 2006 山东高考, 1 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

解析: $\because A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$,

$$\therefore A \odot B = \{0, 6, 12\}.$$

故所有元素之和为 $0 + 6 + 12 = 18$.

答案: D

1.2.2 集合的运算

第一课时 交集与并集



设集合 $A = \{(x, y) | a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$, 则方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的解集是 _____; 方程 $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ 的解集是 _____.

提示: 方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的解既要满足

第一个方程 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, 又要满足第二个方程 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, 即若 (x_0, y_0) 是方程组的一个解, 则 $(x_0, y_0) \in A$ 且 $(x_0, y_0) \in B$. 因此原方程组的解集为 $A \cap B$. 方程 $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ 的解, 满足 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 或 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 都可以, 所以该方程的解集为 $A \cup B$.

答案: $A \cap B \quad A \cup B$ 

知识清单

1. 对于两个给定的集合 A, B , 由所有属于 A 且属于 B 的元素构成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作 A 交 B , 用符号可表示为 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

2. 对于两个给定的集合 A, B , 把它们所有的元素并在一起构成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作 A 并 B , 用符号可表示为 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

3. $A \cap B = B \cap A, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup B = B \cup A, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$.

4. 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A, A \cup B = B$.



课堂导学



三点剖析



各个击破

一、交集、并集的概念

【例1】数学活动课上, 小强说: “若 $x \notin A \cap B$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$.” 小刚说: “若 $x \notin A \cup B$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$.” 这两个同学说的都对吗? 为什么?

思路分析: 紧扣交集、并集的概念. $A \cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的元素确定的集合, $x \notin A \cap B$ 可分三种情况: $x \notin A$ 且 $x \in B, x \in A$ 且 $x \notin B, x \notin A$ 且 $x \notin B$, 即小强同学说的不正确. $A \cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的元素确定的集合, 即 A, B 两集合的元素都在 $A \cup B$ 中, 若 $x \notin A \cup B$, 则必有 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 即小刚同学说的正确.

本题可借助于韦恩图来理解.

二、交集、并集的运算

【例2】已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

思路分析: 根据交集、并集的定义, 求 $A \cap B$ 只需把集合 A, B 中的公共元素找出来, 写成集合的形式, 求 $A \cup B$ 只需把集合 A, B 中的所有元素找出来, 写成集合的形式, 要注意集合中元素的互异性.

解: $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

类题演练 1

若集合 A, B, C 满足 $A \cap B = A, B \cup C = C$, 则 A 与 C 之间的关系是 ()

- A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$
C. $A \subseteq C$ D. $C \subseteq A$

解析: $\because A \cap B = A, \therefore A \subseteq B$.

$\because B \cup C = C, \therefore B \subseteq C. \therefore A \subseteq C$.

答案: C

变式提升 1

(经典回放) 设集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | |x| \leq 5\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数是 ()

- A. 11 B. 10
C. 16 D. 15

解析: $A = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $\therefore A \cup B$ 有 16 个元素.

答案: C

类题演练 2

2006 全国高考卷 I, 理 1 文 2 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$, 则 ... ()

- A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$
C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbf{R}$

解析: $\because M = \{x | 0 < x < 1\}$, $N = \{x | -2 < x < 2\}$, $M \subseteq N, \therefore M \cap N = M, M \cup N = N$.

答案: B