

第一章 集合与函数概念

本章概览

内容提要

- 1. 集合语言是现代数学的基本语言,通过本章的学习,要学会使用集合语言表示有关数学对象,并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换,感受集合语言的意义和作用.集合作为语言表示常用列举法和描述法.
- 2. 元素与集合是“属于”“不属于”关系,元素具有确定性、互异性、无序性.
- 3. 理解集合与集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
- 4. 会求两个简单集合的并集与交集,会求给定子集的补集.
- 5. 通过实例,进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型,在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数,体会对应关系在刻画函数概念中的作用;了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域.
- 6. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.

学法指导

- 1. 本章是高中数学的起始章,学好本章对顺利学习高中数学意义重大.所以,要认真理解各知识点的含义.集合的各种表示方法容易混淆,应仔细辨别区别,达到熟练的程度,逐步建立与集合知识相适应的知识结构和思考方法.初学集合这一符号语言,可能对其认识不足,这就要求同学们要善于将符号语言转化成自然语言去认识集合语言,同时又要将自然语言转化成符号语言,逐步形成运用集合解决问题的能力.
- 2. 准确理解函数的有关概念.对应、映射、函数三个概念既有共性又有区别,在深刻理解函数的基础上,认识函数是一种特殊的映射.
- 3. 掌握构成函数的三要素——对应法则、定义域和值域,其中对应法则是核心,定义域是函数的灵魂.
- 4. 研究函数问题必须树立“定义域优先”的原则.求函数定义域一般有三种类型:①函数来自实际问题的定义域;②已知函数解析式求定义域;③已知一个函数的定义域求另一个函数的定义域.
- 5. 求函数定义域往往归结为解不等式组的问题.考虑问题要全面,谨防顾此失彼,取交集时可借助于数轴,应用题要使实际问题有意义.
- 6. 通过本章的学习,要特别注意分类讨论思想方法、数形结合思想方法、函数方程思想方法的运用.

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示



课前导引



情境导入

“所有的大樱桃”能否构成一个集合?



思路分析 :由于“所有的大樱桃”中的元素不确定,即无法判断一个樱桃是否是该集中的元素,不能构成集合.这就是本节课要学习的一个新的概念——集合.



知识预览

集合的含义与表示

1. 集合的概念 :把研究对象的总体称为集合,把研究对象统称为元素.

2. 集合中元素的性质 : (1) 确定性 ; (2) 互异性 ; (3) 无序性. 这三条性质是认识和表示集合的依据.

3. 集合的表示方法 :

(1) 列举法 :将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法. 使用列举法应注意 :

① 元素不重复 ; ② 元素无顺序 ; ③ 元素间用“,”隔开.

(2) 描述法 :用集合所含元素的共同特征来表示集合的方法. 使用描述法应注意 :

① 写清楚集合中元素的代号,如 $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ 不能写成 $\{x > 2\}$; ② 说明该集合中元素的性质 ; ③ 所有描述的内容都写在大括号内.

4. 两个集合相等 :只要构成两个集合的元素相同,我们就称这两个集合相等.

5. 元素与集合的关系 :一般地用大写拉丁字母如 A, B, C 表示集合,用小写拉丁字母 a, b, c 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素就说 a 属于集合 A, 记作 $a \in A$. 如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A, 记作 $a \notin A$.

6. 常用数集及其记法 : $\mathbb{N}$ 为零和正整数组成的集合,即自然数集, $\mathbb{N}^+$ 或 $\mathbb{N}$ 为正整数组成的集合 ; $\mathbb{Z}$ 为整数组成的集合 ; $\mathbb{Q}$ 为有理数组成的集合 ; $\mathbb{R}$ 为实数组成的集合.



课堂导学



三点剖析

一、集合的含义与表示方法

【例1】判断下列命题是否正确,并说明理由.

(1) $\{R\} = R$;

(2) 方程组 $\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x = 1, y = 2\}$;

(3) $\{x | y = x^2 - 1\} = \{y | y = x^2 - 1\} = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$;

(4) 平面内线段 MN 的垂直平分线可表示为 $\{P | PM = PN\}$.

思路分析 :以上几种命题都是同学们在初学过程中极易出错的几种典型类型. 处理此类问题关键在于要正确而深刻地理解集合的表示方法.

解 (1) $\{R\} = R$ 是不正确的. R 通常为 $R = \{x | x \text{ 为实数}\}$, 即 R 本身可表示为全体实数的集合,而 $\{R\}$ 则表示含有一个字母 R 的集合,它不能为实数的集合.

(2) 方程组 $\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x = 1, y = 2\}$ 是不对的,因为解集的元素是有序实数对 (x, y) , 正确答案应为 $\{(x, y) | \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}\} = \{(1, 2)\}$.

(3) $\{x | y = x^2 - 1\} = \{y | y = x^2 - 1\} = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$ 是不正确的.

$\{x | y = x^2 - 1\}$ 表示的是函数自变量的集合,它可以为 $\{x | y = x^2 - 1\} = \{x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

$\{y | y = x^2 - 1\}$ 表示的是函数因变量的集合,它可以为 $\{y | y = x^2 - 1\} = \{y | y \geq -1\}$.

$\{(x, y) | y = x^2 - 1\}$ 表示点的集合,这些点在二次函数 $y = x^2 - 1$ 的图象上.

变式提升 1

下列命题是假命题的个数为_____.

① $\{1, 2\} = \{(1, 2)\}$ ② $\emptyset = \{x | x + 1 = 1\}$

③ $\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$ 解的集合为 $\{(x, y) | x = 2 \text{ 或 } y = -6\}$

④ $\sqrt{15} \in \{x | x \leq 3\sqrt{2}\}$ ⑤ $\{P | PO = 3 \text{ cm}\}$ (O 是定点) 表示圆

解析 :对于①,左边集合的元素是数,右边集合的元素是点的坐标,因此两集合不等;对于②,集合 $\{x | x + 1 = 1\} = \{0\} \neq \emptyset$, 因此②不正确;对于③,方程组 $\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$ 的解集为 $\{(x, y) | \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}\}$, 因此③不正确;

对于④, $\{x | x \leq 3\sqrt{2}\} = \{x | x \leq \sqrt{18}\}$,

$\sqrt{15} \in \{x | x \leq 3\sqrt{2}\}$, 因此④正确;

对于⑤, $\{P | PO = 3 \text{ cm}\}$ (O 是定点) 表示到定点 O 距离为 3 cm 的点 P 的集合,即以 O 为圆心、3 cm 为半径的圆,因此⑤正确.

答案 3

变式提升 1

用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) $2\sqrt{3}$ _____ $\{x | x < \sqrt{11}\}$ $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ _____ $\{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$.

(2) 3 _____ $\{x | x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$, $(-1, 1)$ _____ $\{y | y = x^2\}$.

解析 : (1) $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11}$.

(4) 平面上线段 MN 的垂直平分线可表示为 $\{P | PM=PN\}$ 是正确的.

温馨提示

正确理解集合表示方法对以后的学习有极大帮助. 特殊数集用特定字母表示有特别规定, 不能乱用; 二元一次方程组的解集必须为 $\{(x, y) | \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}\}$ 的形式, 对描述法表示的集合一定要认清竖线前面的元素是谁, 竖线后其特征又是什么.

【例2】已知 $a \in \{1, -1, a^2\}$, 则 a 的值为_____.

思路分析: 处理该类问题的关键是对 a 进行分类讨论, 利用元素的互异性解题.

解: $a \in \{1, -1, a^2\}$,

a 可以等于 $1, -1, a^2$.

(1) 当 $a=1$ 时, 集合则为 $\{1, -1, 1\}$, 不符合集合元素的互异性. 故 $a \neq 1$.

(2) 同上 $a=-1$ 时也不成立.

(3) $a=a^2$ 时, 得 $a=0$ 或 $1, a=1$ 不满足舍去, $a=0$ 时集合为 $\{1, -1, 0\}$. 综上 $a=0$.

答案: 0

温馨提示

集合元素的互异性指集合中元素必须互不相同, 无序性指集合中的元素与顺序无关. 因此在处理元素为字母的集合问题时, 既要注意对字母进行讨论, 又要自觉注意集合元素的互异性、确定性.

二、恰当选择列举法和描述法表示集合

【例3】用适当的方法表示下列集合:

(1) 不大于 10 的非负偶数;

(2) 方程 $(x-1)^2(x-3)=0$ 的解集;

(3) 方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集;

(4) 坐标平面内第一象限的点组成的集合;

(5) 所有的奇数.

思路分析: 根据列举法和描述法的特点选择表示方法.

解: (1) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$; (2) $\{1, 3\}$;

(3) $\{(2, 1)\}$ 或 $\{(x, y) | \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\}$;

(4) $\{(x, y) | x > 0, \text{ 且 } y > 0\}$;

(5) $\{x | x=2n-1, n \in \mathbb{Z}\}$.

温馨提示

1. 用列举法表示集合适合于有限集, 且元素个数较少, 但要注意集合中元素的互异性. 如(2)方程有两个重根 1, 1, 根据元素的互异性, 只能写 1 次.

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{7+2\sqrt{10}} < \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}.$$

, 填 $\notin, \in$.

(2) 设 $n^2+1=3, n=\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$, 填 $\notin$.

把 $(-1, 1)$ 代入 $y=x^2$ 成立, 但 $(-1, 1)$ 是有序实数对, 而 $\{y | y=x^2\}$ 是 y 值的集合.

, 填 $\notin$.

答案: (1) $\notin \in$ (2) $\notin \notin$

类题演练 2

集合 $\{3-x^2, 2x\}$ 中元素 x 应满足的条件为_____.

解析: 根据元素的互异性可得 $\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 - 2x \neq 3, \text{ 即 } x \neq -1, \\ x^2 - 2x \neq x, \end{cases}$

且 $x \neq 0$, 且 $x \neq 3$.

答案: $x \neq -1$, 且 $x \neq 0$, 且 $x \neq 3$

变式提升 2

集合 $A = \{a, \frac{b}{a}, 1\}$, $B = \{a^2, a+b, 0\}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. 若 $A=B$, 求 $a^{2006} + b^{2006}$ 的值.

解析: 由条件得 $\begin{cases} a = a+b, \\ \frac{b}{a} = 0, \text{ 或 } \begin{cases} \frac{b}{a} = 0, \\ 1 = a+b, \end{cases} \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} b=0, \\ a=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=0, \\ a=1. \end{cases}$$

所以 $a^{2006} + b^{2006} = 1$.

类题演练 3

用适当的方法表示下列集合:

(1) 被 3 除余 1 的自然数组成的集合;

(2) 由所有小于 20 的既是奇数又是质数的正整数组成的集合;

(3) 平面直角坐标系中, 直线 $y=x$ 上的所有点组成的集合;

(4) 设 a, b 是非零实数, 求 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 的所有值组成的集合.

答案: (1) $\{x | x=3n+1, n \in \mathbb{N}\}$;

(2) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;

(3) $\{(x, y) | y=x\}$;

(4) 分 $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0; \end{cases} \begin{cases} a > 0, \\ b < 0; \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ b > 0; \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases}$ 四种情况讨论

可知所求集合为 $\{-1, 3\}$.

变式提升 3

定义集合运算 $A \odot B = \{z | z=xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = (2, 3)$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元

2. 用描述法表示集合时要弄清楚元素的特征,使其具有性质的都属于集合,不具有性质的不属于集合. 另外要注意用描述法表示集合一定要写清楚代表元素是什么. 如所有三角形的集合不能写成{三角形}, 应写为 $\{x|x \text{ 是三角形}\}$.

三、集合概念的理解

【例4】判断以下对象的全体能否组成集合.

(1) 高一(1)班的身高大于 1.75 m 的学生;

(2) 高一(1)班的高个子学生.

思路分析: 该例贴近于现实生活, 能较好地帮助同学们正确理解集合元素的确定性.

解: (1) 高一(1)班中身高大于 1.75 m 的学生是确定的, 因此身高大于 1.75 m 的学生可以组成集合.

(2) 高一(1)班中的高个子学生没有具体身高标准, 因此高个子学生不能组成集合.

温馨提示

判断某组对象是否组成集合必须同时满足三个特征: (1) 确定性, (2) 互异性, (3) 无序性. 特别是确定性比较难理解, 是指元素和集合的关系是非常明确的, 要么该元素属于集合, 要么该元素不属于集合, 而不是模棱两可.

素之和为 ()

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

解析: 取 $x=0$ 时 $z=0$, 取 $x=1$ 时 $z=6$ 或 12 ,
 $A \cup B = \{0, 6, 12\}$, 所求 $A \cup B$ 的元素之和为 18, 选 D.

答案: D

类题演练 4

以下说法的对象能组成集合的有

① 所有的奇数 ② 不小于 -2 的数 ③ 满足方程 $2x - y = 0$ 的解为坐标的点 ④ 很小的数 ⑤ 漂亮的花 ⑥ 不满足 $x+1=0$ 的实数

解析: ①②③⑥中描述的元素都具有确定性, 能构成集合, 而④⑤中描述的元素都不具有确定性, 即无法判断一个元素是否属于集合, 故不能构成集合.

答案: ①②③⑥

变式提升 4

已知满足“如果 $x \in A$, 则 $6-x \in A$ ”的自然数 x 构成集合 A.

(1) 若 A 是一个单元素集, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 A 有且只有两个元素, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) $3 \in A$, 则 $6-3 \in A$, $A = \{3\}$;

(2) $2 \in A$, $6-2 \in A$, $A = \{2, 4\}$.

同理 $A = \{0, 6\}$ 或 $\{1, 5\}$.

答案: (1) $\{3\}$ (2) $\{2, 4\}$ 或 $\{0, 6\}$ 或 $\{1, 5\}$



基础达标

1. 给出的对象不能构成集合的是 ()

- A. 直角坐标系中横纵坐标互为相反数的点
 B. 平方后不等于 9 的实数
 C. 无限靠近 2 的实数 x
 D. 方程 $x+y=3$ 的解

解析: C 中元素不满足确定性.

答案: C

2. 下列集合中, 不是方程 $(x-1)x(x+1)=0$ 解集的集合是 ()

- A. $\{1, 0, -1\}$ B. $\{0, -1, 1\}$
 C. $\{x|x(x+1)(x-1)=0\}$ D. $\{(-1, 0, 1)\}$

解析: $\{(-1, 0, 1)\}$ 表示的是一个有序数组的集合, 该集合只含一个元素, 不是方程 $(x-1)x(x+1)=0$ 的解集.

答案: D

3. 下列表示的关系中正确的个数有 ()

- ① $0 \notin \mathbb{N}$ ② $3.14 \notin \mathbb{Q}$ ③ $\pi \in \mathbb{R}$ ④ $3\sqrt{2} \in \{x|x \leq$

$\sqrt{17}\}$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析: ① $0 \in \mathbb{N}$, ② 3.14 是有理数, $3.14 \in \mathbb{Q}$, ③ $\pi \in \mathbb{R}$ 显然正确, ④ $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $3\sqrt{2} \notin \{x|x \leq \sqrt{17}\}$,
 正确命题只有 ③.

答案: A

4. 集合 $\{x|x = \frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|}\}$ 中元素的个数有 ()

- A. 2 个 B. 3 个
 C. 4 个 D. 无法说清

解析: 当 $a > 0, b > 0$ 时 $x=2$; 当 $a > 0, b < 0$ 时 $x=1-1=0$; 当 $a < 0, b > 0$ 时 $x=0$; 当 $a < 0, b < 0$ 时 $x=-1-1=-2$, 所以集合中含有 3 个元素. 故选 B.

答案: B

5. 已知集合 $A = \{y|y = -x^2 + 5x - 4, x \in \mathbb{R}\}$, 则有 ()

- A. $1 \in A$ 且 $4 \in A$ B. $1 \in A$ 但 $4 \notin A$
 C. $1 \notin A$ 但 $4 \in A$ D. $1 \notin A$ 且 $4 \notin A$

解析: 集合 A 是二次函数 $y = -x^2 + 5x - 4$ 中 y 的取值范围, 而不是一元二次方程 $-x^2 + 5x - 4 = 0$ 的解集, 而 $y = -x^2 + 5x - 4 = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$, 故 $1 \in A$ 但 $4 \notin A$.

$\notin A$

答案 B

- 6 已知集合 $M = \{m | m = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$, 则下列元素中属于集合 M 的元素个数是 ()

① $m = 1 + \sqrt{2}\pi$ ② $m = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ③ $m = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ ④

$$m = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析 ① $m = 1 + \pi\sqrt{2}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$ 故 $m \notin M$;

② $m = \sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} \notin M$;

③ $m = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \in M$;

④ $m = (\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{6} \notin M$ 故选 B.

答案 B

- 7 集合 $M = \{y \in \mathbb{Z} | y = \frac{8}{x+3}, x \in \mathbb{Z}\}$ 的元素个数是 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

解析 将 $x = -11, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 5$ 代入 $y = \frac{8}{x+3}$ 分别得到 $y \in \mathbb{Z}$. 故选 D.

答案 D

- 8 设集合 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{4, 5, 6, 7\}$, 定义 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 $P * Q$ 中元素的个数是 ()

A. 3 B. 7 C. 10 D. 12

解析 $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7)$ 共 12 个元素.

答案 D

- 9 用描述法表示在自然数中被 7 除余 2 的数为 _____.

答案 $\{x | x = 7m + 2, m \in \mathbb{N}\}$

- 10 若 $1 \in A = \{x | x^2 - a = 0\}$, 则 $B = \{y | y = x + 1, x \in A\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: $1 \in A$, $a = 1$,

$$A = \{1, -1\}, B = \{y | y = x + 1, x \in A\} = \{2, 0\}.$$

答案 $\{y | y = 2 \text{ 或 } y = 0\}$



综合运用

- 11 2007 广东韶关模拟 理 1 下列各组两个集合 P 和 Q , 表示同一集合的是 ()

A. $P = \{1, \sqrt{3}, \pi\}$, $Q = \{\pi, 1, |\sqrt{3}|\}$

B. $P = \{\pi\}$, $Q = \{3.14159\}$

C. $P = \{2, 3\}$, $Q = \{(2, 3)\}$

D. $P = \{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{1\}$

答案 A

- 12 用适当的方法表示下列集合.

(1) 2008 年举办奥运会的国家所组成的集合;

(2) 由 0, 1, 2 三个数字所组成的一切可能的无重复数

字的自然数集合;

(3) 直角坐标平面上 y 轴上的点的集合;

(4) 方程组 $\begin{cases} 2x = y \\ xy = 1 \end{cases}$ 的解集.

答案 (1) $\{\text{中国}\}$;

(2) $\{0, 1, 2, 10, 20, 21, 12, 102, 201, 120, 210\}$;

(3) $\{(x, y) | x = 0, y \in \mathbb{R}\}$;

(4) $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})\}$.

- 13 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, B 表示集合 $\{|a + 3|, 2\}$, 已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$. 求 a 的值.

解析 因为 $5 \in A$, $5 \notin B$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5 \\ |a + 3| \neq 5 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a = -4 \text{ 或 } a = 2, \\ a \neq 2 \text{ 且 } a \neq -8. \end{cases}$$

所以 $a = -4$.

- 14 已知 $A = \{x \in \mathbb{N} | \frac{12}{6-x} \in \mathbb{N}\}$, 试用列举法表示 A .

解析 因为 $\frac{12}{6-x} \in \mathbb{N} (x \in \mathbb{N})$, 所以 $6 - x = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ ($x \in \mathbb{N}$), 即 $x = 5, 4, 3, 2, 0$. 所以 $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$.

- 15 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$:

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 值, 并求出这个集合;

(2) 若 A 中至多具有一个元素, 求 a 的取值范围.

解析 (1) 当 $a = 0$ 时, 方程 $2x + 1 = 0$ 只有一根 $x = -\frac{1}{2}$; 当 $a \neq 0$ 时 $\Delta = 0$ 即 $4 - 4a = 0$,

$$\text{所以 } a = 1 \text{ 这时 } x_1 = x_2 = -1.$$

所以, 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, A 中只有一个元素分别为 $-\frac{1}{2}$ 或 -1 , 即 $A = \{-\frac{1}{2}\}$ 或 $A = \{-1\}$.

(2) A 中至多有一元素包括两种情形即 A 中有一个元素和 A 是空集. 当 A 是空集时, 则有 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$. 结合 (1) 知当 $a = 0$ 或 $a \geq 1$ 时, A 中至多有一个元素.



拓展探究

- 16 规定集合中的元素有有限多个, 则称该集合为有限集, 集合中的元素有无限多个, 称集合为无限集. 不含任何元素的集合为空集.

当 a, b 满足什么条件时, 集合 $A = \{x | ax + b = 0\}$ 是有限集、无限集、空集?

解析 (1) 当 $a \neq 0$ 时, 集合 $A = \{x | ax + b = 0\} = \{x | x = -\frac{b}{a}\}$ 是有限集.

(2) 当 $a = 0$ 时 $ax + b = 0$ 变为 $0 \cdot x = -b$,

① $b = 0$ 时 $0 \cdot x = 0$ x 有无穷多解;

② $b \neq 0$ 时 $0 \cdot x = b$, 无解. 则 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, 集合是无限集; $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 集合是空集. 综上 $a \neq 0$ 时, 集合 A 是有限集; $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, 集合 A 是无限

集 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 集合 A 是空集.



教师锦囊



教学建议

本节内容有三个疑难问题: 一是要正确理解集合的有关概念, 特别是集合中元素的确定性、互异性和无序性. 如集合中元素含有字母时, 容易忽视元素的互异性, 导致错误. 二是对于用描述法给出的集合 $\{x|x \in P\}$, 要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x , 以及其所具有的性质, 特别注意区分数集和点集(以数或点为元素的集合, 分别叫做数集和点集), 二者的区别主要看元素的形式. 数集的元素是数, 点集的元素是有序实数对, 如 $\{y|y=x+2\}$ 是数集, 而 $\{(x,y)|y=x+2\}$ 是点集. 三是对抽象符号(如 $\in$)的理解和记忆, 几种常见的数集的符号要让学生记熟.



备选习题

- 1 若方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 和方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的所有解构成的集合为 M , 则 M 中元素的个数为 ()
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

解析: $x^2 - 5x + 6 = 0$,

$x = 2$ 或 $x = 3$.

又 $x^2 - x - 2 = 0$,

$x = 2$ 或 $x = -1$.

由集合中元素的互异性, 知 $M = \{-1, 2, 3\}$.

答案: B

- 2 设直线 $y = 2x + 3$ 上的点集为 P , 则 $P =$ _____,

点 $(2, 7)$ 与 P 的关系为 $(2, 7)$ _____ P .

解析: 点集 $P = \{(x, y) | y = 2x + 3\}$.

当 $x = 2$ 时, $y = 2 \times 2 + 3 = 7$.

$\therefore (2, 7) \in P$.

答案: $\{(x, y) | y = 2x + 3\} \in$

3 填空题:

(1) 用列举法表示集合 $\{x \in \mathbb{R} | (x-1)^2(x+1) = 0\}$ 为 _____;

(2) 用列举法表示集合 $\{x \in \mathbb{N} | \frac{6}{6-x} \in \mathbb{N}\}$ 为 _____;

(3) 用描述法表示集合 $\{2, 4, 6, 8\}$ 为 _____;

(4) 用描述法表示集合 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ 为 _____.

答案: (1) $\{-1, 1\}$ (2) $\{0, 3, 4, 5\}$

(3) $\{x | (x-2)(x-4)(x-6)(x-8) = 0\}$ 或 $\{大于1小于9的偶数\}$ 等

(4) $\{x | x = \frac{1}{n}, n \leq 4 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*\}$

- 4 若集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中最多有 1 个奇数, 则这样的集合共有 _____.

解析: 当 A 中没有奇数时, $A = \emptyset$ 或 $\{2\}$;

当 A 中有 1 个奇数时, $A = \{3\}$ 或 $\{7\}$ 或 $\{2, 3\}$ 或 $\{2, 7\}$.

因此, A 可能是 6 个不同的集合.

答案: 6 个

1.1.2 集合间的基本关系



课前三引



情境导入

农夫要用船把狼、羊、菜, 从河的一岸送到另一岸. 农夫每次驾船只能运一样东西, 并且农夫不在场的情况下, 狼不能和羊在一起, 羊不能和菜在一起, 你能设计一个方案, 使它们平安过河吗?



思路分析: 把农夫、狼、羊、菜看作四个元素, 由此构成的集合记作 $\{\text{农夫}, \text{狼}, \text{羊}, \text{菜}\}$, 其中含有农夫的二元子集有 $\{\text{农夫}, \text{狼}\}$, $\{\text{农夫}, \text{羊}\}$, $\{\text{农夫}, \text{菜}\}$, 不含农夫的二元子

集有 $\{\text{羊}, \text{狼}\}$, $\{\text{羊}, \text{菜}\}$, $\{\text{菜}, \text{狼}\}$. 按要求只有 $\{\text{菜}, \text{狼}\}$ 这一集合符合要求. 因此渡河方案是: 农夫先把羊送到对岸, 再空船返回. 第二次再把狼送到对岸, 返回时带回羊. 第三次单把菜送到对岸, 再空船返回. 第四次再把羊送到对岸.

我们将 $\{\text{农夫}, \text{狼}, \text{羊}, \text{菜}\}$ 记作集合 A , 将 $\{\text{羊}, \text{菜}\}$ 记作集合 B , 则 $B \subseteq A$. 像 A, B 两集合之间的这种关系, 称为包含关系. 这就是本节课要学习的主要内容.



知识预览

1. 子集: (1) 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中的任意

一个元素都是集合 B 中的元素,称集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

当 A 不是 B 的子集时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

(2)符号语言表示子集:若任意 $x \in A$ 有 $x \in B$ 则 $A \subseteq B$.

2. 真子集:若集合 $A \subseteq B$,但存在元素 $x \in B$,且 $x \notin A$,称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

3. 空集:不含任何元素的集合,记为 $\emptyset$.

规定:空集是任何集合的子集,用符号语言表示为 $\emptyset \subseteq A$.若 A 非空(即 $A \neq \emptyset$),则有 $\emptyset \subsetneq A$.

4. 子集、真子集的性质:① $A \subseteq A$,② $\emptyset \subseteq A$,③ $A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$,④ $A \subseteq B$,且 $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$.

5. 两集合相等:若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$ 则 $A = B$.

6. 含 n 个元素的集合 A 的子集个数为 2^n ,真子集个数为 $2^n - 1$,非空真子集的个数为 $2^n - 2$.



三点剖析

一、集合间的包含关系、相等关系

【例1】判断下列各式是否正确.

(1) $\sqrt{2} \subseteq \{x | x \leq 2\}$;

(2) $\sqrt{2} \in \{x | x \leq 2\}$;

(3) $\{\sqrt{2}\} \subsetneq \{x | x \leq 2\}$;

(4) $\emptyset \in \{x | x \leq 2\}$;

(5) $\emptyset \subseteq \{x | x \leq 2\}$;

(6) $\{a, b, c, d\} \subseteq \{e, f, b, d, g\}$.

思路分析:要注意元素与集合之间、集合与集合之间关系符号的不同,绝对不能混淆.

解:根据元素与集合、集合与集合之间的有关规定,

(1)(4)(6)不正确,(2)(3)(5)正确.

温馨提示

一般来说,元素与集合之间应该用“ $\notin$ ”或“ $\in$ ”;而“ $\subseteq$ ”“ $\subsetneq$ ”应该出现于集合与集合之间; $\emptyset$ 作为特殊集合应遵从 $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \subsetneq A$ (非空).但这不是绝对的,选择的关键在于具体分析二者的关系.例 $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1\}\}$,而 $\emptyset \in \{\emptyset, 1\}$, $\emptyset \subsetneq \{\emptyset, 1\}$ 都是对的.

二、运用集合间的关系解题

【例2】 $\{a, b\} \subseteq A \subsetneq \{a, b, c, d, e\}$,求所有满足条件的集合 A .

思路分析:从子集、真子集的概念着手解答.

解:因为 $\{a, b\} \subseteq A$,所以 A 中必有元素 a, b .

因为 A 是 $\{a, b, c, d, e\}$ 的真子集,所以 A 中元素可以有 2 个 3 个 4 个三种情形.具体为: $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, 共 7 个.

各个击破



类题演练 1

下列各式中,正确的个数是..... ()

① $\emptyset = \{0\}$ ② $\emptyset \subseteq \{0\}$ ③ $\emptyset \in \{0\}$ ④ $0 = \{0\}$

⑤ $0 \in \{0\}$ ⑥ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解析:正确命题有②⑤⑥.

答案: C

变式提升 1

在以下五个写法中,写法正确的个数有..... ()

① $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ ② $\emptyset \subsetneq \{0\}$ ③ $\{0, 1, 2\} \subseteq \{1, 2, 0\}$

④ $0 \in \emptyset$ ⑤ $1 \in \{x | x \subseteq \{1, 2\}\}$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

解析:①集合与集合之间应用 $\subseteq$ 、 $\supseteq$ 或 $=$ 而不是属于关系.②空集是任何非空集合的真子集.③两集合相等时也可以写成 $A \subseteq B$ 的形式.④ $\emptyset$ 中不含任何元素.⑤此集合的元素是集合而不是数字.故②和③是正确的.

答案: B

类题演练 2

求满足条件 $\{x | x^2 + 1 = 0\} \subsetneq M \subseteq \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 的集合 M 的个数.

解析: $\{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, 其非空子集为 $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$. 所以满足条件 $\{x | x^2 + 1 = 0\} \subsetneq M \subseteq \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 的集合 M 共 3 个.

变式提升 2

集合 $M = \{x \in \mathbb{N} | x = -y^2 + 6, y \in \mathbb{N}\}$, 试写出该集合的所有真子集.

解析:由集合 $M = \{x \in \mathbb{N} | x = -y^2 + 6, y \in \mathbb{N}\}$, $x \in \mathbb{N}$ 则 $x = -y^2 + 6 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 6$.

又因为 $y \in \mathbb{N}$, 所以 $y = 0, 1, 2$. 相应地 $x = 6, 5, 2$.

集合 M 为 $\{2, 5, 6\}$, 其真子集个数为 $2^3 - 1 = 7$.

分别写出为 $\emptyset$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{5, 6\}$.

温馨提示

1. 按顺序摆,做到不重不漏.
2. 正确地把集合语言表述的问题“翻译”成普通数学语言.

【例3】集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{a^2\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值集合.

思路分析 在利用 $B \subseteq A$ 这一条件时要注意对 a 进行讨论.

解 由于 $B = \{a^2\} \subseteq A = \{1, 3, a\}$,

因此, ① $a^2 = 1$, 得 $a = 1$ (不合题意舍去) 或 $a = -1$;

② $a^2 = 3$, 得 $a = \pm\sqrt{3}$;

③ $a^2 = a$, 得 $a = 1$ (不合题意舍去) 或 $a = 0$.

综上, 实数 a 的取值集合为 $\{-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\}$.

温馨提示

1. 分类讨论思想是很重要的思想方法, 注意掌握分类方法;
2. 在解决集合的元素问题时, 最后结论要注意检验元素是否具备互异性.

三、对元素与集合之间、集合与集合之间的关系的理解及应用

【例4】已知集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{x | x \in A\}$, $C = \{x | x \subseteq A\}$, 试判断 A, B, C 之间的关系.

解析 集合 B 中的代表元素是 x , x 满足的条件是 $x \in A$, 因此 $x = a$ 或 $x = b$, 即 $B = \{a, b\} = A$, 而集合 C 则不然, 集合 C 的代表元素虽然也是 x , 但 x 代表的是集合 $x \subseteq A$, 因此 $x = \{a\}$ 或 $x = \{b\}$ 或 $x = \{a, b\}$ 或 $x = \emptyset$, 即 $C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 此时集合 C 中的元素是集合, 故 $B \in C, A \in C$.

, $A = B, B \in C, A \in C$.

温馨提示

对于元素与集合、集合与集合之间的 $\in, \subseteq$ 关系要理解透彻, “ $\in$ ”是用于描述元素与集合之间的关系, 即只要元素 a 是集合 A 的一个元素, 则 $a \in A$, 如 $\{1\}$ 与 $\{\{1\}, \{2\}\}$, 尽管 $\{1\}$ 是一个集合, 但是 $\{1\}$ 是构成集合 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 的一个元素, 故 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$; “ $\subseteq$ ”是用于描述集合与集合之间的关系, 如 $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

6}.

类题演练 3

已知集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{1, a^2 - a + 1\}$ 且 $A \supseteq B$, 求 a 的值.

解析: $B \subseteq A$, ①当 $a^2 - a + 1 = 3$ 时, $a^2 - a - 2 = 0$.

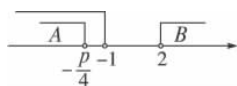
, $a = 2$ 或 $a = -1$.

②当 $a^2 - a + 1 = a$ 时, $a = 1$, 代入 A 中不满足 A 中元素互异性, 舍去., $a = 2$ 或 $a = -1$.

变式提升 3

设 $A = \{x | 4x + p < 0\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, 若使 $A \subseteq B$, 则 p 的取值范围是_____.

解析 $A = \{x | 4x + p < 0\} = \{x | x < -\frac{p}{4}\}$, 画数轴,



分析得 $-\frac{p}{4} \leq -1$, $p \geq 4$.

答案 $p \geq 4$

类题演练 4

集合 $A = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$ 与 $B = \{(x, y) | y = x\}$ 的关系是 _____ ()

- A. $A = B$ B. $A \subsetneq B$
C. $A \supseteq B$ D. $A \not\subseteq B$

解析 注意 $\frac{y}{x} = 1$ 与 $y = x$ 这两个式子是不同的, 前者只

有 $x \neq 0$ 时才有意义, 故 A 中少一个点 $(0, 0)$,

因此 $A \subsetneq B$.

答案 B

变式提升 4

2007 江苏宿迁调研 16 设 $I = \{-1, k\}$, 若 $\{y | y = x + 1, x \in I\} = \{y | y = x^2, x \in I\}$, 则 $k =$ _____.

解析 设 $A = \{y | y = x + 1, x \in I\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in I\}$, 则 $A = \{0, k + 1\}$, $B = \{1, k^2\}$.

于是若 $A = B$ 则必有 $k + 1 = 1$ 且 $k^2 = 0$.

解得 $k = 0$.

答案 0



基础达标

1 下列表示中错误的是 _____ ()

- ① $\{0\} = \emptyset$ ② $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ ③ $\{2\} \in \{x | x^2 - 3x +$

$$2=0\} \quad ④0 \in \{0\}$$

- A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ②③

解析 ① $\{0\}$ 是单元素集,而 $\emptyset$ 是空集,故 $\{0\} \neq \emptyset$;

$$③\{x|x^2-3x+2=0\}=\{2,1\},$$

所以 $2 \in \{2,1\}$,但不是 $\{2\} \in \{2,1\}$.

答案 B

- 2 2007 广东顺德期中 文 1 设集合 $A=\{x|x \leq \sqrt{13}\}$, $a=3$ 那么..... ()

- A. $a \subset A$ B. $a \notin A$
C. $\{a\} \in A$ D. $\{a\} \subset A$

答案 D

- 3 下列四个集合中,是空集的是..... ()

- A. $\{x|x^2=0\}$
B. $\{x|x-1 < 0\}$
C. $\{(x,y)|y^2=-x^2, x,y \in \mathbb{R}\}$
D. $\{x|x^2-x+1=0, x \in \mathbb{R}\}$

解析: $\{x|x^2-x+1=0, x \in \mathbb{R}\}$ 表示方程 $x^2-x+1=0$ 的实根的集合,而 $x^2-x+1=0$ 无实根,该集合为空集.

答案 D

- 4 集合 $M=\{x|x=3k-2, k \in \mathbb{Z}\}$, $N=\{x|x=3m+1, m \in \mathbb{Z}\}$, $P=\{x|x=6n+1, n \in \mathbb{Z}\}$ 则 M, N, P 的关系正确的是..... ()

- A. $P \subset N \subset M$ B. $N = P \subset M$
C. $P \subset M = N$ D. $P \supset M = N$

解析: 可采用列举法表示: $M=\{\dots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$, $N=\{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$, $P=\{\dots, -11, -5, 1, 7, 13, \dots\}$,
 $M=N \supset P$.

答案 C

- 5 若集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|\frac{x-1}{x-2}=0\}$ 则集合 A 与 B 的关系为.....

解析: $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$, $B \subset A$

答案 B

- 6 集合 $M \subseteq \{2, 3, 5\}$ 且 M 中至多有一个奇数, 则这样的集合个数为.....

解析: 符合条件的集合有: $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}$.

答案 6 个

- 7 设 $M=\{x|x^2-1=0\}$, $N=\{x|ax-1=0\}$ 若 $N \subseteq M$ 则 a 的值为.....

解析: 忽略空集是同学们易犯的错误, 本题应考虑两方面: ① $N \neq \emptyset$ 时 $a = \pm 1$, ② $N = \emptyset$ 时 $a = 0$.

答案: ± 1 或 0

- 8 已知集合 $A=\{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$ 则实数 $m =$

解析: 由 $B \subseteq A$ 得 $m^2=2m-1$ 或 $m^2=-1$ (无解), 于是 $m=1$.

答案 1

- 9 集合 $P=\{x, 1\}$, $Q=\{y, 1, 2\}$ 其中 $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 且 P 是 Q 的真子集, 把满足上述条件的一对有序整数 (x, y) 作为一个点, 这样点的个数是.....

解析: 当 $x=2$ 时 y 可取 $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, 此时, 满足条件的点共 7 个;

当 $x=3$ 时 y 只能取 3 , 此时满足条件的点有 1 个;

同理, 当 $x=4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, 满足条件的点分别有 1 个, 共 6 个, 共 14 个.

答案 14

- 10 已知 $A=\{1, 1+d, 1+2d\}$, $B=\{1, q, q^2\}$, 当 $A=B$ 时, 求 d, q 的值.

解析: 由集合互异性可知 $d \neq 0, q \neq 1, -1, 0$, 由 $A=B$ 可推得

$$① \begin{cases} 1+d=q, \\ 1+2d=q^2 \end{cases} \text{ 或 } ② \begin{cases} 1+d=q^2, \\ 1+2d=q. \end{cases}$$

由①得 $(1-q) = -d, 1-q^2 = -2d$,

相除得 $1+q=2$, 即 $q=1$, 不合题意;

由②得 $(2q+1)(q-1)=0$,

因为 $q \neq 1$, 所以 $q = -\frac{1}{2}$, 代入得 $d = -\frac{3}{4}$.

所以 d 值为 $-\frac{3}{4}$, q 值为 $-\frac{1}{2}$.



综合运用

- 11 2006 上海高考 文 1 已知集合 $A=\{-1, 3, m\}$, 集合 $B=\{3, 4\}$. 若 $B \subseteq A$ 则实数 $m =$

解析: $B \subseteq A, 4 \in B, 4 \in A, m=4$.

答案 4

- 12 设 $M=\{(x, y)|mx+ny=4\}$ 且 $\{(2, 1), (-2, 5)\} \subseteq M$, 则 $m =$, $n =$

解析: 由题意得 $\begin{cases} 2m+n=4, \\ -2m+5n=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\frac{4}{3}, \\ n=\frac{4}{3}. \end{cases}$

答案: $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

- 13 $a, x \in \mathbb{R}, B=\{3, x^2+ax+a\}, C=\{x^2+(a+1)x-3, 1\}$ 求使 $B=C$ 的 a 与 x 的值.

解析: $B=C, \begin{cases} x^2+ax+a=1, \\ x^2+(a+1)x-3=3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-2, \\ x=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-6, \\ x=-1. \end{cases}$

- 14 设集合 $M=\{x|x^2-5x-3=0\}, N=\{x|mx=1\}$ 且 $N \subsetneq M$ 求实数 m 的取值集合.

解析: 当 $N = \emptyset$ 时 $m=0$. 当 $N \neq \emptyset$ 时,

$$N \subsetneq M = \{3, -\frac{1}{2}\},$$

, $\frac{1}{m}=3$ 即 $m=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}$ 即 $m=-2$.

, m 的取值集合为 $\{0, -2, \frac{1}{3}\}$.

- 15 若集合 $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbb{R}\}$, 试确定集合 A, B 之间的关系.

解析: $A = \{x | x = (a+1)^2 + 3\} = \{x | x \geq 3\}$,
 $B = \{y | y = (b-2)^2 - 1\} = \{y | y \geq -1\}$,
 $A \subseteq B$.

拓展探究

教师锦囊

教学建议

本节内容有两个疑难问题:一是准确区分 $\in$ 与 $\subseteq$; $\subseteq$ 与 $\subset$; $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$, $\in$ 用于表示元素与集合之间关系,而 $\subseteq$ 、 $\subset$ 用于表示两集合之间关系,如 $\emptyset \in \{\emptyset\}$, 此时 $\emptyset$ 作为元素,而 $\{\emptyset\}$ 则为元素是 $\emptyset$ 的集合;再如 $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ 中 $\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$ 均作为集合来理解,这样就符合空集是任何非空集合的真子集这一事实.二是将集合的包含关系转化为不等式或等式问题,同时要特别注意空集的特殊性.在解题中,若未指明集合非空时,要考虑空集的可能性,如 $A \subseteq B$, 则有 $A = \emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$ 两种可能,此时应分类讨论.

备选习题

- 1 已知集合 $A = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 2\}$, $B = \{x | 3 < x < 5\}$, 则能使 $A \supseteq B$ 成立的实数 a 的范围是 ()

A. $\{a | 3 < a \leq 4\}$ B. $\{a | 3 \leq a \leq 4\}$
 C. $\{a | 3 < a < 4\}$ D. $\emptyset$

解析: $a + 2 > a - 1$, $A \neq \emptyset$.

依题意,有 $\begin{cases} a - 1 \leq 3 \\ a + 2 \geq 5 \end{cases}$, 解得 $3 \leq a \leq 4$.

答案: B

- 2 设集合 $A = \{x | x = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 4n - 3, n \in$

- 16 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3x + 3 = 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} | y^2 - 5y + 6 = 0\}$, $A \subseteq P \subsetneq B$, 求满足条件的集合 P .

解析: 由已知 $A = \emptyset$, $B = \{2, 3\}$, B 的真子集为 $\emptyset, \{2\}, \{3\}$.

又 $\emptyset$ 是任何集合的子集,

P 可以是 $\emptyset, \{2\}, \{3\}$.

$\mathbb{Z}\}$ 则集合 A 与 B 的关系为 ()

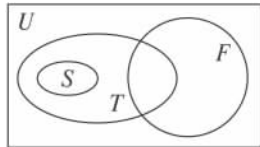
A. $A \subsetneq B$ B. $B \subsetneq A$
 C. $A = B$ D. 无法确定

解析: $B = \{x | x = 4n - 3, n \in \mathbb{Z}\} = \{x | x = 4(n - 1) + 1, n \in \mathbb{Z}\} = A$, $A = B$.

答案: C

- 3 集合 U, S, T, F 的关系如下图所示, 下列关系中哪些是对的, 哪些是错的?

(1) $S \subsetneq U$; (2) $F \subsetneq T$; (3) $S \subsetneq T$; (4) $S \subsetneq F$; (5) $S \subsetneq F$;
 (6) $F \subsetneq U$.



答案: (1)(3)(6) 正确, (2)(4)(5) 错误.

- 4 集合 $P = \{x | 1\}$, $Q = \{y | 1, 2\}$, 其中 $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 且 P 是 Q 的真子集, 把满足上述条件的一对有序整数 (x, y) 作为一个点, 这样的点的个数是

解析: 当 $x = 2$ 时, $y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; 当 x 取 $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, $P \not\subset Q$, y 只能依次取与 x 相同的值. 满足上述条件的点的个数是 $7 + 7 = 14$ (个).

答案: 14

1.1.3 集合的基本运算



情境导入

学校小卖部进了两次货,第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共 6 种,第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共 4 种,问两次一共进了几种货,相同的货物有几种,并分别用集合进行表示.



思路分析:分别用集合 A, B 表示第一、二次进的货.显然两次一共进了 8 种货,相同的货物有 2 种.用集合 C 表示两次进货的品种,可得 $C = \{\text{圆珠笔, 钢笔, 橡皮, 笔记本, 方便面, 汽水, 铅笔, 火腿肠}\}$;用集合 D 表示两次进货相同的品种,可得 $D = \{\text{圆珠笔, 方便面}\}$.我们通常称集合 C 为集合 A 与 B 的并集,记为 $C = A \cup B$ (读作“ A 并 B ”);称集合 D 为集合 A 与 B 的交集,记为 $D = A \cap B$ (读作“ A 交 B ”).

你是怎样理解集合的交集、并集的,你能用 Venn 图进行表示吗?



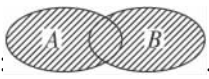
知识预览

1. 并集的概念

(1)自然语言表示:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集.

(2)符号语言表示: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(3)图形语言(Venn 图)表示:

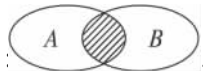


2. 交集的概念

(1)自然语言表示:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集.

(2)符号语言表示: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

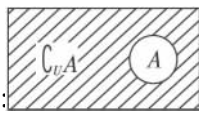
(3)图形语言表示(Venn 图):



3. 补集的概念

(1)自然语言表示:对于集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素所组成的集合,称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集.

(2)用符号语言表示: $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.



(3)用图形语言表示(Venn 图):
阴影部分表示 $\complement_U A$.

4. 有关集合运算的性质

$$(1) A \cup B = B \cup A; A \cup A = A; A \cup \emptyset = A$$

$$(2) A \cap B = B \cap A; A \cap A = A; A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(3) (\complement_U A) \cup A = U; (\complement_U A) \cap A = \emptyset; \complement_U (\complement_U A) = A$$

$$(4) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$(5) \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B); \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$



三点剖析

各个击破

一、交集、并集、补集的概念与运算

【例1】若全集 $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbb{N}^*\}$, $M = \{1, 7, 8\}$, $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $S = \{1, 4, 7\}$, 则 $(M \cup P) \cap (\complement_U S) =$ _____.

解析: $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $M \cup P = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $\complement_U S = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$,
 $(M \cup P) \cap (\complement_U S) = \{2, 3, 5, 8\}$.
 答案: $\{2, 3, 5, 8\}$

温馨提示

1. 进行集合运算首先要弄清楚各集合是由什么元素构成的, 然后再根据交集、并集、补集的概念进行运算.
2. 集合间的包含关系的判断及集合的运算一般使用韦恩图.

【例2】已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 集合 $B = \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $A \cap B$, $A \cup B$.

解析: 借助于数轴, 由右图可知
 $\complement_U A = \{x | x \geq 1 \text{ 且 } x \leq 2\} = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$
 $\complement_U B = \{x | x \geq -3 \text{ 且 } x < 1\} = \{x | -3 \leq x < 1\}$
 $A \cap B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\} \cap \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$
 $= \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$
 $A \cup B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\} \cup \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\} = \mathbb{R}$.

温馨提示

数集的运算一般使用数轴.

二、交集与并集、补集的概念及其符号之间的区别与联系

【例3】已知 $A = \{y | y = x^2 - 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = x, x \in \mathbb{R}\}$. 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

思路分析: 本题注重考查集合概念及运算, 其中集合中的元素 y 的本质是许多同学认识不足的, 它其实是函数的因变量, 集合为函数因变量的取值集合.

解: $A = \{y | y = x^2 - 2, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y \geq -2\}$, $B = \{y |$

类题演练 1

设全集 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $A = \{1, |a - 5|, 9\}$, $\complement_U A = \{5, 7\}$, 则 a 的值是 _____ ()

A. 2 B. 8 C. -2 或 8 D. 2 或 8

解析: 由条件得 $|a - 5| = 3$,

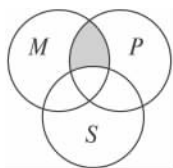
$a = 2$ 或 8 .

答案: D

变式提升 1

如右图所示, U 是全集, M, P, S 是 U 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 _____ ()

- A. $(M \cap P) \cap S$
 B. $(M \cap P) \cup S$
 C. $(M \cap P) \cap \complement_U S$
 D. $(M \cap P) \cup \complement_U S$



解析: 观察题中 Venn 图, 可知阴影部分是 M 与 P 的公共部分, 且又在 S 的外部, 再与选项对照即可. 故选 C.

答案: C

类题演练 2

已知全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | -4 < x < \frac{1}{2}\}$, $B = \{x | x + 4 \leq 0\}$, $C = \{x | 2x \geq 1\}$, 则集合 C 等于 _____ ()

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$
 C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $\complement_U (A \cup B)$

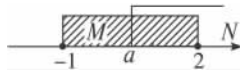
解析: 借助数轴易得 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{x | x < \frac{1}{2}\}$, 所以 $C = \complement_U (A \cup B)$.

答案: D

变式提升 2

集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x - a \geq 0\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析: 由图示可知 $a \leq 2$.



答案: $a \leq 2$

类题演练 3

已知 $A = \{y \in \mathbb{N} | y = x^2 - 4x + 10\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | y = -x^2 - 2x + 12\}$, 求 $A \cap B$.

解析: $A = \{y | y \geq 6, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y | y \leq 13, y \in \mathbb{N}\}$,
 $A \cap B = \{y \in \mathbb{N} | 6 \leq y \leq 13\}$.

变式提升 3

2006 江苏高考 7 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B =$

$y=x\}=\mathbf{R}$ 则 $A\cap B=\{y|y\geq-2\}$, $A\cup B=\mathbf{R}$.

温馨提示

1. 对于描述法给出的集合,要抓住竖线前的代表元素及它具有的性质.

2. 本题中的两个集合都是数集,且是每个函数的函数值构成的集合.

三、集合运算性质的运用

【例4】集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|ax-2=0\}$, 若 $A\cup B=A$ 则 a 能取到的所有值的集合为_____.

思路分析: 处理此类问题有两处值得同学们注意,一是明确 $A\cup B=A\iff B\subseteq A$;二是 $B=\{x|ax=2\}\neq\{x|x=\frac{2}{a}\}$ 要注意对 a 是否为 0 进行讨论.

解: $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}$, $A\cup B=A\iff B\subseteq A$ 因此集合 B 只能为单元素集或 $\emptyset$.

当 $B=\{1\}$ 时, 即 $1\in B=\{x|ax-2=0\}$, 得 $a=2$;

同理, 当 $B=\{2\}$ 时, 得 $a=1$;

当 $B=\emptyset$ 时, 即 $ax=2$ 无解, 得 $a=0$.

综上 a 能取到的值所组成的集合为 $\{0, 1, 2\}$.

答案: $\{0, 1, 2\}$

温馨提示

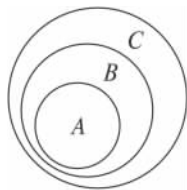
1. $A\cup B=A\iff B\subseteq A$, $A\cap B=A\iff A\subseteq B$ 两个性质常常作为“等价转化”的依据,要特别注意当 $A\subseteq B$ 时,往往需要按 $A=\emptyset$ 和 $A\neq\emptyset$ 两种情况分类讨论,而这一点却很容易被忽视.如本题中由 $B\subseteq A$ 应分 $B=\emptyset$ 和 $B\neq\emptyset$ 两种情况考虑.

2. 要注重集合语言与数学文字语言之间的转化.

$B\cap C$ 则一定有 ()

A. $A\subseteq C$ B. $C\subseteq A$ C. $A\neq C$ D. $A=\emptyset$

解析: 根据题意可画出满足条件的韦恩图. 如图所示, 由韦恩图可知 $A\subseteq C$.



答案: A

类题演练 4

若集合 $P=\{1, 2, 3, m\}$, $Q=\{m^2, 3\}$, 满足 $P\cap Q=Q$, 求 m 的值.

解析: $P\cap Q=Q, Q\subseteq P$.

, $m^2=1$ 或 $m^2=2$ 或 $m^2=m$, 解得 $m=\pm 1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0.

经检验 $m=1$ 时, 不满足集合 P 中元素的互异性,

, $m=-1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0.

变式提升 4

设集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|x>-2\}$, $Q=\{x|x-a\geq 0\}$, 令 $P=M\cap N$.

(1) 求集合 P ;

(2) 若 $P\subseteq Q$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $P\cap Q=\{x|0\leq x\leq 3\}$, 求实数 a 的取值范围.

解析: (1) $P=M\cap N=\{x|x<3\}\cap\{x|x>-2\}=\{x|-2<x<3\}$.

(2) 当 $a<-2$ 时, 满足题意;

当 $a=-2$ 时, $Q=\{x|x\geq -2\}$, 也有 $P\subseteq Q$.

所以 $a\leq -2$.



(3) 由于 a 是可变的实数, 因此, 若 $P\cap Q=\{x|0\leq x\leq 3\}$, 从数轴上观察, a 能且只能取 0, 所以 $a=0$.





基础达标

- 1 设集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $[0, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 4]$

答案: A

- 2 集合 $S = \{x \in \mathbb{N}^+ | -2 < x < 9\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $P = \{1, 3, 6\}$, 则 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()

A. $M \cup P$ B. $M \cap P$
C. $(\complement_S M) \cup (\complement_S P)$ D. $(\complement_S M) \cap (\complement_S P)$

解析: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$\complement_S M = \{1, 2, 6, 7, 8\}$,

$\complement_S P = \{2, 4, 5, 7, 8\}$,

$\{2, 7, 8\} = \complement_S M \cap \complement_S P$.

答案: D

- 3 2007 广东深圳模拟 理 1 设全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | \frac{1}{x} < 0\}$, 则 $\complement_U A$ 等于 ()

A. $\{x | \frac{1}{x} > 0\}$ B. $\{x | x > 0\}$

C. $\{x | x \geq 0\}$ D. $\{x | \frac{1}{x} \geq 0\}$

答案: C

- 4 已知 $I = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7\}$, 集合 $A = \{3, 5, 7\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 ()

A. $\complement_I A = \{1, 2, 4, 6\}$
B. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
C. $A \cap \complement_I B = \emptyset$
D. $B \cap \complement_I A = \{2, 4\}$

解析: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 而集合 $\mathbb{N}$ 中含有 0 是容易忽略的, 故 $\complement_I A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$; $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I (A \cup B) = \{0, 1, 6\}$; $A \cap \complement_I B = \{7\}$.

$\therefore A, B, C$ 都不正确.

答案: D

- 5 设 U 为全集, M, G 是非空集合, $M \subsetneq U, G \subsetneq U, M \not\subset G, G \not\subset M$, 则 $(M \cap G) \cup M$ 等于 ()

A. $M \cap G$ B. $\complement_U M$
C. $\emptyset$ D. M

解析: 如图所示, $M \cap G$ 为图中阴影部分,

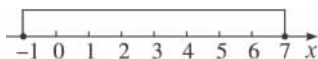
所以 $(M \cap G) \cup M = M$. 故选 D.

答案: D

- 6 设集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 7\}$, $S = \{x | k+1 \leq x \leq 2k-1\}$, 若 $M \cap S = \emptyset$, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k \leq 4$ B. $k < 2$ 或 $k > 6$
C. $k < 0$ 或 $k > 6$ D. $k < 0$

解析: $M \cap S = \emptyset$.



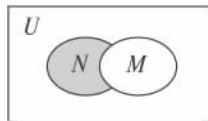
若 $S = \emptyset$, 则 $k+1 > 2k-1$, $k < 2$.

若 $S \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} 2k-1 < -1, & \text{或} & k+1 > 7, \\ k+1 \leq 2k-1 & & k+1 \leq 2k-1. \end{cases}$

解得 $k > 6$. 故 $k < 2$ 或 $k > 6$, 选 B.

答案: B

- 7 2007 山东烟台期末 1 设全集 U 是实数集 $\mathbb{R}$, $M = \{x | x^2 > 4\}$, $N = \{x | \frac{2}{x-1} \geq 1\}$, 则图中阴影部分所



表示的集合是 ()

A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$
C. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | x < 2\}$

答案: C

- 8 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 使 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是

解析: 符合题设的集合 B 的个数为 $2^3 = 8$.

答案: 8

- 9 若集合 $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x^2 \leq 25\}$, 则 $A \cup B$ 中元素个数有

解析: $A = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A \cup B = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $\therefore A \cup B$ 中有 16 个元素.

答案: 16 个

- 10 设集合 $A = \{|a+1|, 3, 5\}$, 集合 $B = \{2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1\}$, 当 $A \cap B = \{2, 3\}$ 时, 求 $A \cup B$.

解析: $|a+1| = 2$, $a = 1$ 或 $a = -3$.

当 $a = 1$ 时, 集合 B 的元素 $a^2+2a = 3$, $2a+1 = 3$, 由集合的元素应具有互异性的要求, 因此 $a \neq 1$.

当 $a = -3$ 时, 集合 $B = \{-5, 3, 2\}$.

$\therefore A \cup B = \{-5, 2, 3, 5\}$.

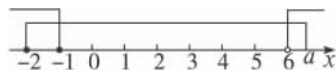
答案: $\{-5, 2, 3, 5\}$



综合运用

- 11 集合 $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 6\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围为

解析: 由图示可知 $a \geq 6$.



答案: $a \geq 6$

- 12 $A = \{(x, y) | ax - y^2 + b = 0\}$, $B = \{(x, y) | x^2 - ay - b = 0\}$, 已知 $A \cap B \supseteq \{(1, 2)\}$, 求 a, b .

解析 由 $A \cap B \supseteq \{(1, 2)\}$, 知 $x = 1, y = 2$ 满足方程组

$$\begin{cases} ax - y^2 + b = 0, \\ x^2 - ay - b = 0, \end{cases}$$

将 $x = 1, y = 2$ 代入得 $\begin{cases} a - 4 + b = 0, \\ 1 - 2a - b = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 7. \end{cases}$

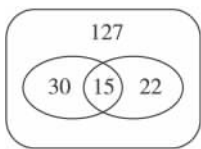
- 13 设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* | -2 < x + 1 < 6\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + m = 0\}$, 若 $\complement_U A = \{1, 4\}$, 求 m 的值.

解析 $U = \{x \in \mathbb{N}^* | -1 < x < 5\} = \{x \in \mathbb{N}^* | 1 \leq x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

$\complement_U A = \{1, 4\}$, $A = \{2, 3\}$, 即 2, 3 是方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的两个根, $m = 6$.

- 14 某中学高中一年级学生参加数学小组的有 45 人, 参加物理小组的有 37 人, 其中同时参加数学小组和物理小组的有 15 人, 数学小组和物理小组都没有参加的有 127 人, 问该校高中一年级共有多少学生?

解析 $30 + 15 + 22 + 127 = 194$ (人).

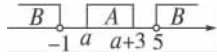


- 15 已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

解析 (1) 依题意得 $\begin{cases} a \geq -1, \\ a + 3 \leq 5, \end{cases}$

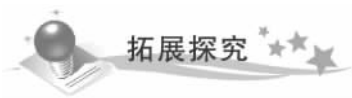


$-1 \leq a \leq 2$.

(2) 由 $A \cup B = B$ 知 $A \subseteq B$,

$a + 3 < -1$ 或 $a > 5$.

$a < -4$ 或 $a > 5$.



- 16 已知集合 $A = \{1, 3, -a^2\}$, $B = \{1, a - 2\}$, 是否存在实数 a , 使得 $A \cup B = A$? 若存在 a , 求出集合 A, B ; 若不存在, 请说明理由.

解析 假设存在实数 a 使得 $A \cup B = A$, 于是可得 $a - 2 = 3$ 或 $a - 2 = -a^2$.

$a = 5$ 或 $a = -2$ 或 $a = 1$.

当 $a = 5$ 时 $A = \{1, 3, -25\}$, $B = \{1, 3\}$;

当 $a = -2$ 时 $A = \{1, 3, -4\}$, $B = \{1, -4\}$;

当 $a = 1$ 时 $A = \{1, 3, -1\}$, $B = \{1, -1\}$.

教学建议

Venn 图和数轴是帮理解交集、并集、补集的概念, 正确进行集合运算的良好工具. 在教学中要注意引导学生体会并运用 Venn 图和数轴.

备选习题

- 1 集合 A, B 各有 2 个元素, $A \cap B$ 中有一个元素, 若集合 C 同时满足 ① $C \subseteq A \cup B$, ② $C \supseteq A \cap B$, 则满足条件的集合 C 的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析 不妨设 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$.

由 ① 知 $C \subseteq \{a, b, c\}$, 由 ② 知 $\{b\} \subseteq C$,

所以 C 中必有元素 b . 故 C 的个数为含有两个元素的集合的子集的个数 $2^2 = 4$.

答案 D

- 2 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{0, 3, 5\}$, $M \cap (\complement_U N) = \{0, 3\}$, 则满足条件的集合 N 共有 ... ()

A. 4 个 B. 6 个 C. 8 个 D. 16 个

解析 集合 N 中没有元素 0, 3, 有元素 5. 故集合 N 的个数为含元素 1, 2, 4 的集合的子集的个数 $2^3 = 8$ 个.

答案 C

- 3 已知全集 $U = \mathbb{N}^*$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 请使用含有集合 A, B 的集合运算表示全集 $U =$ (只需写出一个即可)

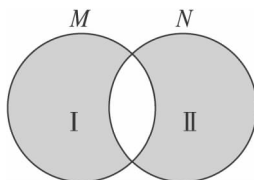
答案 $A \cup \complement_U B$

- 4 定义集合 M 与 N 的新运算如下 $M * N = \{x | x \in M \text{ 或 } x \in N \text{ 且 } x \notin M \cap N\}$, 若 $M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $N = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$, 则 $(M * N) * M =$

解析一: $M \cap N = \{0, 6, 12\}$, $M * N = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 15\}$.

$(M * N) * M = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\} = N$.

解析二 如图所示, 由定义可知 $M * N$ 为图中阴影的区域,



$(M * N) * M$ 为图中阴影 I 以外的区域.

$(M * N) * M = N$.

答案 N

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念



课前导引



情境导入

在某报《自测健康状况》的报道中,自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表.观察表中数据的特点,用适当的数填入表中空白()内,并分析表中收缩压是否是年龄的函数?



年龄(岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压(水银柱:毫米)	110	115	120	125	130	135 ()	145	
舒张压(水银柱:毫米)	70	73	75	78	80	83 ()	88	

思路分析 根据表中给出的数据特点可知应填 140、85,且收缩压是年龄的函数.



知识预览

1. 函数的定义: 设 A, B 是两个非空的数集, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数, 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$. 其中 x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 与 x 的值对应的值为函数值, 即 y 值叫做函

数值. 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\} = \{y | y = f(x), x \in A\}$ 叫函数的值域.

2. 函数的三要素

(1) 函数的三要素为定义域、值域、对应关系. 符号表示 $f: A \rightarrow B$, A 为定义域, B 为值域, f 为对应关系.

(2) $y = f(x)$ 的内涵: 当自变量为 x 时, 经过 f 对应的函数值为 $f(x)$, 即 $y = f(x)$ 不一定有具体解析式.

(3) 两个函数相等 $\Leftrightarrow$ 两个函数三要素相同 $\Leftrightarrow$ 定义域、对应关系、值域相同 $\Leftrightarrow$ 定义域、对应关系相同.

3. 正比例函数 $y = kx$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}$;

一次函数 $y = kx + b$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}$;

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 定义域为 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, 值域为 $\{y \in \mathbb{R} | y \neq 0\}$;

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 当 $a > 0$ 时, 值域为 $[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$, 当 $a < 0$ 时, 值域为 $(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$.

4. $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 规定数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 用区间表示为 $[a, b]$; 数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 用区间表示为 $[a, b)$; 数集 $\{x | a < x \leq b\}$ 用区间表示为 $(a, b]$; 数集 $\{x | x \geq a\}$ 用区间表示为 $[a, +\infty)$; 数集 $\{x | x < b\}$ 用区间表示为 $(-\infty, b)$; 实数集 $\mathbb{R}$ 用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$. 以上各区间读者可试用数轴表示.



课堂导学



三点剖析

一、函数的概念

【例1】下列对应是从集合 M 到集合 N 的函数的是 ()

A. $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x+1}$

B. $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}^+$ (正实数组成的集合) $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$

各个击破



类题演练 1

下列表格中的 x 与 y 能构成函数的是 ()

A.

x	非负数	非正数
y	1	-1

$$C. M = \{x | x \geq 0\}, N = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y^2 = x$$

$$D. M = \mathbb{R}, N = \{y | y \geq 0\}, f: x \rightarrow y = x^2$$

思路分析 本题主要考查函数的定义. A、B、C、D 四个答案中的集合 M 和 N 都是数集, 符合函数的定义. A 选项中有分式, 应考虑分母不为 0. B 选项中有开平方, 应考虑被开方数是非负数. C 选项中也蕴含着开平方, 也应考虑 x 是非负数. D 选项的思路与 C 选项相似, 应考虑 y 是非负数.

解 :A. 对于 M 中的元素 -1, N 中没有元素与之对应, 故该对应不是从 M 到 N 的函数. B. 对于 M 中的元素 -1, N 中没有元素与之对应, 该对应 $f: M \rightarrow N$ 不是函数. C. 对于 M 中的任一元素如 $x=4$, 通过对应法则 $f: x \rightarrow y^2 = x$ 得到 N 中有两个元素 ± 2 与之对应, 故 $f: x \rightarrow y^2 = x$ 不是从 M 到 N 的函数.

答案 :D

温馨提示

判断一个对应法则 $f: A \rightarrow B$ 是否构成函数, 首先看 A、B 是否是非空数集, 其次再看给出定义域内任一个值, 通过给出的对应法则, y 是否有且只有一个元素与之对应.

【例2】下列四组函数中, 有相同图象的一组是 ... ()

$$A. y = x - 1, y = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$B. y = \sqrt{x-1}, y = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$C. y = 2, y = \frac{2x^2+4}{x^2+2}$$

$$D. y = 1, y = x^0$$

解析 :A. $y = x - 1$ 与 $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 的对应法则不同. B. $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, $y = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 两函数的定义域不同. C. $y = 2$ 与 $y = \frac{2x^2+4}{x^2+2}$ 是两相等的函数, 所以图象相同. D. $y = 1$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $y = x^0$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 两函数定义域不同. 选 C.

答案 :C

B.

x	奇数	0	偶数
y	1	0	-1

C.

x	有理数	无理数
y	1	-1

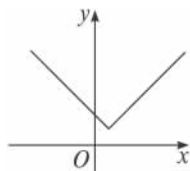
D.

x	自然数	整数	有理数
y	1	0	-1

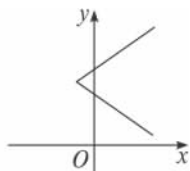
答案 :C

变式提升 1

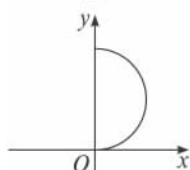
下列图象可以作为函数 $y = f(x)$ 图象的是 ()



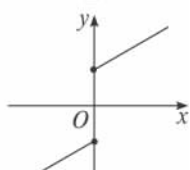
A



B



C



D

解析 :B. 给 x 一个值, y 可能没有元素与之对应或有两个元素与之对应. C. 给 x 一个值, y 可能没有或有两个元素与之对应. D. 当 $x=0$ 时, y 有两个值与之对应, 故选 A.

答案 :A

类题演练 2

以下给出的同组函数中, 是否表示同一函数? 为什么?

$$(1) f_1: y = \frac{x}{x}, f_2: y = 1.$$

$$(2) f_1: y = |x|, f_2: y = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$(3) f_1: y = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 2, & 1 < x < 2, \\ 3, & x \geq 2; \end{cases}$$

$f_2:$

x	$x \leq 1$	$1 < x < 2$	$x \geq 2$
y	1	2	3

解析 : (1) 不同函数. $f_1(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $f_2(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

(2) 不同函数. $f_1(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f_2(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$.

(3) 同一函数. x 与 y 的定义域和对应关系完全相同, 它们是同一函数的不同表示方式.

变式提升 2