



思路决定出路

(代前言)

思路决定出路,创路决定活路。

不同的教学思路,就有不同的教学效果。不同的编写思路,就有不同的教辅用书。

正确的教学思路能使你好学乐学、如沐春风。科学的思维模式,能使你左右逢源、绝处逢生。

基于这种思考,我们深入研究了最新的课改精神和高考动态,吸收了最先进的教研成果,汇集了大批实力派名家名师全力打造、倾心推出了这套《导学大课堂》系列丛书。

丛书采用大单元、小课时的编写模式,设置“课前导引、课堂导学、课后导练”三大板块,充分体现“导学”的思想。“情境导学”设置学生熟悉的情境,以激发其自主学习的兴趣和动力;“问题导学”本着“教材内容问题化,基本知识能力化”的原则,将教材内容设置成一系列的问题,引导学生自主探究,并在探究的过程中体验到成功的喜悦和学习的快乐;“案例导学”通过经典案例的剖析来突破重难瓶颈,打通思维通道,掌握学习要领。本丛书具有以下特点:

● **科学设计 全程优化** 丛书与课堂教学同步,并在宏观上进行了科学安排,以达到“堂堂达标、单元过关”的目标。这不仅符合学生的认知规律和学习特点,还符合大多数地方的教学实际,尤其适合有教师指导下的课堂教学使用。

● **问题立意 激活思维** 学生解决问题的过程就是思考的过程、提高认识的过程。丛书通过对教材知识的挖掘和梳理,将知识设置成了一个一个问题。学生在探究问题的过程中,不仅激活了思维,挖掘出了潜能,还能改变传统的学习方式,提高学习的效率。



FOREWORD

● 源于基础 构建网络 丛书在深入挖掘学科知识点的基础上,还特别注意梳理各部分知识间的内在联系,使零散、孤立的知识汇聚在一起,并形成了具有系统性、条理性的网络结构,供学生在解决问题时迅速地检索、提取和应用。

● 循序渐进 逐级提升 丛书遵循由浅入深、由易到难、由简到繁的原则,例题和习题都设置了科学、合理的梯度与坡度,最大限度地兼顾了不同层次和不同水平的学生,既能让一般水平的学生吃饱、吃好,又能使学有余力的学生胃口大开。

● 一种思想 万千气象 丛书的各学科既遵循统一的指导思想和编写理念,又根据各自的特点和创编者的个性,在栏目设置、体例设计、布局谋篇上形成自己独特的风格,使各学科分册在呈现出异彩纷呈、百花争妍态势的同时,又与其他学科自然和谐地组成一个有机的整体。

丛书编委会

第一章 集合与函数概念

1.1 集 合	1
1.1.1 集合的含义与表示	1
1.1.2 集合间的基本关系	6
1.1.3 集合的基本运算	12
1.2 函数及其表示	31
1.2.1 函数的概念	31
1.2.2 函数的表示法	38
1.3 函数的基本性质	62
1.3.1 单调性与最大(小)值	62
1.3.2 奇偶性	68
整合提升	130

第二章 基本初等函数(I)

2.1 指数函数	109
2.1.1 指数与指数幂的运算	109
2.1.2 指数函数及其性质	115
2.2 对数函数	121
2.2.1 对数与对数运算	121
2.2.2 对数函数及其性质	126
2.3 幂函数	130
整合提升	130

第三章 函数的应用

3.1 函数与方程	230
3.1.1 方程的根与函数的零点	230
3.1.2 用二分法求方程的近似解	237
3.2 函数模型及其应用	242
3.2.1 几类不同增长的函数模型	242
3.2.2 函数模型的应用实例	247
整合提升	242
如何撰写研究性学习报告	242
中学数学函数研究性学习课题	242
模块测评题(一)	242
模块测评题(二)	242



第一章 集合与函数概念

本章要览

1. 集合语言是现代数学的基本语言,通过本章的学习,要学会使用集合语言表示有关数学对象,并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换,感受集合语言的意义和作用.集合作为语言表示常用列举法和描述法.
2. 元素与集合是“属于”“不属于”关系,元素具有确定性、互异性、无序性.
3. 理解集合与集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
4. 会求两个简单集合的并集与交集,会求给定子集的补集.
5. 通过丰富实例,进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型,在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数,体会对应关系在刻画函数概念中的作用;了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域.
6. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图像法、列表法、解析法)表示函数.

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示



课前三引



问题导入

1. “所有的数学难题”能否构成一个集合?
解答:由于“所有的数学难题”中的元素不确定,即无法判断一个数学题目是否是该集合中的元素,不能构成集合.
2. $\{x, x^2 - x\}$ 能否表示一个数集?
解答:不一定.若 $x = x^2 - x$, 即 $x = 0$ 或 $x = 2$ 时, $\{x, x^2 - x\}$ 不能表示一个数集.



知识结构

集合的含义与表示

1. 集合的概念:把研究对象的总体称为集合,把研究对象统称为元素.
2. 集合中元素的性质:(1) 确定性; (2) 互异性; (3) 无序性.
3. 集合的表示方法:
(1) 列举法:将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.使用列举法应注意:
① 元素不重复; ② 元素无顺序; ③ 元素间用“,”隔开.

(2)描述法:用集合所含元素的共同特征来表示集合的方法.使用描述法应注意:

- ①写清楚集合中元素的代号,如 $\{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$,不能写成 $\{x > 2\}$;②说明该集合中元素的性质;③所有描述的内容都写在大括号内.

4. 元素与集合的关系:一般地用大写拉丁字母如 A, B, C 表示集合,用小写拉丁字母 a, b, c 表示

集合中的元素,如果 a 是集合 A 中的元素就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

5. 常用数集及其记法: $\mathbf{N}$ 为零和正整数组成的集合,即自然数集, $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 为正整数组成的集合; $\mathbf{Z}$ 为整数组成的集合; $\mathbf{Q}$ 为有理数组成的集合; $\mathbf{R}$ 为实数组成的集合.



三点剖析

一、集合的概念

【例1】判断下列命题是否正确,并说明理由.

- (1) $\{\mathbf{R}\} = \mathbf{R}$;
 (2) 方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y=x+1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x=1, y=2\}$;
 (3) $\{x | y=x^2-1\} = \{y | y=x^2-1\} = \{(x, y) | y=x^2-1\}$;
 (4) 平面内线段 MN 的垂直平分线可表示为 $\{P | PM=PN\}$.

思路分析:以上几种命题都是同学们在初学过程中极易出错的几种典型类型.处理此类问题关键在于要正确而深刻地理解集合的表示方法.

解:(1) $\{\mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ 是不正确的, $\mathbf{R}$ 通常为 $\mathbf{R} = \{x | x \text{ 为实数}\}$,即 $\mathbf{R}$ 本身可表示为全体实数的集合,而 $\{\mathbf{R}\}$ 则表示含有一个字母 $\mathbf{R}$ 的集合,它不能为实数的集合.

(2) 方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y=x+1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x=1, y=2\}$ 是不对的,因为解集的元素是有序实数对 (x, y) ,正确答案应为 $\{(x, y) | \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\} = \{(1, 2)\}$.

(3) $\{x | y=x^2-1\} = \{y | y=x^2-1\} = \{(x, y) | y=x^2-1\}$ 是不正确的.

$\{x | y=x^2-1\}$ 表示的是函数自变量的集合,它可以为 $\{x | y=x^2-1\} = \{x | x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

$\{y | y=x^2-1\}$ 表示的是函数因变量的集合,它可以为 $\{y | y=x^2-1\} = \{y | y \geq -1\}$.

$\{(x, y) | y=x^2-1\}$ 表示点的集合,这些点在二次函数 $y=x^2-1$ 的图象上.

(4) 平面上线段 MN 的垂直平分线可表



各个击破

类题演练 1

(1) 下列命题是假命题的个数为_____.

① $\{1, 2\} = \{(1, 2)\}$ ② $\emptyset = \{x | x+1=1\}$

③ $\begin{cases} x-y-8=0, \\ 2x+y+2=0 \end{cases}$ 解的集合为 $\{(x, y) | x=2 \text{ 或 } y=-6\}$

④ $\sqrt{15} \in \{x | x \leq 3\sqrt{2}\}$ ⑤ $\{P | PO=3 \text{ cm}\}$ (O 是定点)表示圆

解析:①②③为假命题.

答案:3

(2) 判断下列表示能否视为集合表示:

① $\{1, 2, 3, \dots\}$;

② $\{s=t^2+1\}$;

③ $\{\text{正方形}\}$.

解析:①不是集合表示.若用列举法表示无限集,应将元素间的规律表示出来.此集合可表示为 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

②不是集合表示,没说清楚集合中元素是什么.

③不是集合表示,没说清楚集合中元素是什么,应写为 $\{x | x \text{ 是正方形}\}$.

(3) 可以表示方程组 $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3 \end{cases}$ 的解集的是_____.

① $\{x=2, y=1\}$ ② $\{(x, y) | (2, 1)\}$ ③ $\{2, 1\}$

④ $\{(2, 1)\}$ ⑤ $\{(x, y) | x=2 \text{ 或 } y=1\}$

⑥ $\{(x, y) | x=2 \text{ 且 } y=1\}$ ⑦ $\{(x, y) | \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}\}$

答案:④⑥⑦

变式提升 1

实数 $\{3, x, x^2-2x\}$ 中的元素 x 应满足的条件为:_____.

示为 $\{P|PM=PN\}$ 是正确的.

温馨提示

正确理解集合表示方法对以后的学习有极大帮助. 特殊数集用特定字母表示有特别规定, 不能乱用; 二元一次方程组的解集必须为 $\{(x, y) | \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}\}$ 的形式; 对描述法表示的集合一定要认清竖杠前面的元素是谁, 竖杠后其特征又是什么.

【例2】已知 $a \in \{1, -1, a^2\}$, 则 a 的值为_____.

解析: 处理该类问题的关键是对 a 进行分类讨论, 利用元素的互异性解题.

$$\because a \in \{1, -1, a^2\},$$

$$\therefore a \text{ 可以等于 } 1, -1, a^2.$$

(1) 当 $a=1$ 时, 集合则为 $\{1, -1, 1\}$, 不符合集合元素的互异性. 故 $a \neq 1$.

(2) 同上, $a=-1$ 时也不成立.

(3) $a=a^2$ 时, 得 $a=0$ 或 $1, a=1$ 不满足舍去, $a=0$ 时集合为 $\{1, -1, 0\}$.

综上, $a=0$.

答案: 0

温馨提示

集合元素的互异性指集合中元素必须互不相同, 无序性指集合中的元素与顺序无关. 因此在处理元素为字母的集合问题时, 既要注意对字母进行讨论, 又要自觉注意集合元素的互异性、确定性.

二、运用集合的两种表示方法正确地表示集合

【例3】用列举法表示下列集合.

$$(1) \{y | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\};$$

$$(2) \{(x, y) | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\}.$$

思路分析: 首先认准描述法所表示集合的代表元素, 然后根据条件求其值, 用列举法将集合中的元素不计次序、不重复、不遗漏地列出来.

解: (1) 因为 $x \leq 3, x \in \mathbf{N}$, 所以 $x=0, 1, 2, 3$. 所以 $y=-2, -1, 2, 7$. 所以 $\{y | y = x^2 - 2, x \leq 3,$

解析: 由集合元素的互异性可知

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 - 2x \neq 3, \Rightarrow x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3. \\ x^2 - 2x \neq x \end{cases}$$

类题演练 2

集合 $A = \{a, \frac{b}{a}, 1\}, B = \{a^2, a+b, 0\}, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$. 若 $A=B$, 求 $a^{2006} + b^{2006}$ 的值.

解析: 由题目条件得 $\begin{cases} a = a+b, \\ \frac{b}{a} = 0, \\ a^2 = 1, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} b=0, \\ a=-1. \end{cases} \therefore a^{2006} + b^{2006} = 1.$$

变式提升 2

已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 + 2x + a = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求这个元素.

解析: 由于 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 + 2x + a = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 只有一个元素,

因此, 有两种情况.

(1) $a=0$ 时, $ax^2 + 2x + a = 0$ 变为 $x=0$, $A = \{x | x=0\}$ 满足条件.

(2) $a \neq 0$ 时, $ax^2 + 2x + a = 0$ 有相等实根, 即 $\Delta = 4 - 4a^2 = 0$, 得 $a = \pm 1$.

$a=1$ 时, $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 2x + 1 = 0\} = \{x | x = -1\};$

$a=-1$ 时, $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{x | x = 1\}.$

综上知, $a=0$ 时, $A = \{x | x=0\};$

$a=1$ 时, $A = \{x | x=-1\};$

$a=-1$ 时, $A = \{x | x=1\}.$

类题演练 3

用列举法表示下列集合.

(1) 不大于 10 的非负偶数;

(2) 方程 $(x-1)^2(x-3)=0$ 的解集;

(3) 方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集.

答案: (1) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\};$ (2) $\{1, 3\};$

(3) $\{(2, 1)\}.$

变式提升 3

2006 山东高考, 1 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A =$

$x \in \mathbf{N}$ 用列举法表示为 $\{-2, -1, 2, 7\}$.

(2) 由上题可知, $\{(x, y) | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\}$ 用列举法表示为 $\{(0, -2), (1, -1), (2, 2), (3, 7)\}$.

温馨提示

列举法适合于表示集合是有限集, 且元素个数较少, 但有时也可表示无限集或个数较多的集合, 如: $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

【例4】用描述法表示下列集合.

- (1) 偶数集;
 - (2) $\{2, 4, 6, 8\}$;
 - (3) 坐标平面内在第一象限的点组成的集合.
- 解: (1) $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$;
 (2) $\{x | x = 2n, 1 \leq n \leq 4, n \in \mathbf{Z}\}$;
 (3) $\{(x, y) | x > 0, \text{ 且 } y > 0\}$.

温馨提示

用描述法表示集合时, 要弄清楚元素的特征, 使其具有符合性质的都属于集合, 不具有性质的不属于集合.

三、集合概念再理解

【例5】判断以下对象的全体能否组成集合.

- (1) 高一·一班的身高大于 1.75 m 的学生;
- (2) 高一·一班的高个子学生.

思路分析: 该例贴近于现实生活, 能较好地帮助同学们正确理解集合元素的确定性.

解: (1) 高一·一班中身高大于 1.75 m 的学生是确定的, 因此身高大于 1.75 m 的学生可以组成集合.

(2) 高一·一班中的高个子学生没有具体身高标准, 因此高个子学生不能组成集合.

温馨提示

判断某组对象是否为集合必须同时满足三个特征: (1) 确定性, (2) 互异性, (3) 无序性, 特别是确定性比较难理解, 是指元素和集合的关系是非常明确的, 要么该元素属于集合, 要么该元素不属于集合, 而不是模棱两可.

$\{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ()

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

解析: 取 $x = 0$ 时, $z = 0$,

取 $x = 1$ 时, $z = 6$ 或 12 ,

$\therefore A \odot B = \{0, 6, 12\}$,

$\therefore$ 所求 $A \odot B$ 的元素之和为 18, 选 D.

答案: D

类题演练 4

用描述法表示下列集合.

- (1) 所有正奇数组成的集合;
- (2) 坐标平面内 x 轴上的点组成的集合.

答案: (1) $\{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^+\}$;

(2) $\{(x, y) | y = 0\}$.

变式提升 4

用适当的方法表示下列集合.

(1) 由不等式 $x - 3 > 2$ 的所有解组成的集合;

(2) 由方程组 $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ 的所有解组成的集合;

(3) 由小于 10 的非负奇数组成的集合.

解: (1) $\{x | x > 5\}$;

(2) $\{(x, y) | \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } (2, 3)\}$;

(3) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 或 $\{x | x = 2n - 1, 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbf{Z}\}$.

类题演练 5

以下说法的对象能组成集合的有

- ① 所有的奇数 ② 不小于 -2 的数 ③ 满足方程 $2x - y = 0$ 的解为坐标的点 ④ 很小的数 ⑤ 漂亮的花 ⑥ 不满足 $x + 1 = 0$ 的实数

解析: $\because$ ①②③⑥中描述的元素都具有确定性, 能构成集合, 而④⑤中描述的元素都不具有确定性, 即无法判断一个元素是否属于集合, 故不能构成集合.

答案: ①②③⑥

变式提升 5

已知满足“如果 $x \in A$, 则 $6 - x \in A$ ”的自然数 x 构成集合 A .

(1) 若 A 是一个单元素集, 则 $A =$

(2) 若 A 有且只有两个元素, 则 $A =$

解析: (1) $\because 3 \in A$, 则 $6 - 3 \in A$, $\therefore A = \{3\}$;

(2) $\because 2 \in A$, $\therefore 6 - 2 \in A$, $\therefore A = \{2, 4\}$.

同理 $A = \{0, 6\}$ 或 $\{1, 5\}$.

答案: (1) $\{3\}$ (2) $\{2, 4\}$ $\{0, 6\}$ $\{1, 5\}$



基础达标

- 1 给出的对象不能构成集合的是 ()

A. 直角坐标系中横纵坐标互为相反数的点
B. 平方后不等于 9 的实数
C. 无限靠近 2 的实数 x
D. 方程 $x+y=3$ 的解

解析: C 中元素不满足确定性.

答案: C

- 2 下列集合中, 不是方程 $(x-1)x(x+1)=0$ 解集的集合是 ()

A. $\{1, 0, -1\}$
B. $\{0, -1, 1\}$
C. $\{x | x(x+1)(x-1)=0\}$
D. $\{(-1, 0, 1)\}$

解析: $\{(-1, 0, 1)\}$ 表示是一个有序数组的集合, 该集合只含一个元素, 不是方程 $(x-1)x(x+1)=0$ 的解集.

答案: D

- 3 下列表示的关系中正确的个数有 ... ()

① $0 \notin \mathbf{N}$ ② $3.14 \notin \mathbf{Q}$ ③ $\pi \in \mathbf{R}$ ④ $3\sqrt{2} \in \{x | x \leq \sqrt{17}\}$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析: ① $0 \in \mathbf{N}$, ② 3.14 是有理数, $\therefore 3.14 \in \mathbf{Q}$, ③ $\pi \in \mathbf{R}$ 显然正确, ④ $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $\therefore 3\sqrt{2} \notin \{x | x \leq \sqrt{17}\}$, $\therefore$ 正确命题只有 ③.

答案: A

- 4 集合 $\{x | x = \frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|}\}$ 中元素的个数有 ... ()

A. 2 个 B. 3 个
C. 4 个 D. 无法说清

解析: 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$; 当 $a > 0, b < 0$ 时, $x = 1 - 1 = 0$; 当 $a < 0, b > 0$ 时, $x = 0$; 当 $a < 0, b < 0$ 时, $x = -1 - 1 = -2$, $\therefore$ 集合中含有 3 个元素, 故选 B.

答案: B

- 5 用列举法写出与集合 A, B 相等的集合.

$A = \{x \in \mathbf{N} | x \geq 1 \text{ 且 } x \leq 2\} =$ _____;

$B = \{x | x = 1 \text{ 或 } x = 2\} =$ _____.

答案: $\{1, 2\}$ $\{1, 2\}$

- 6 集合 $M = \{x \in \mathbf{N} | x = 5 - m, m \in \mathbf{N}\}$ 中元素的个数为 _____.

答案: 6

- 7 用描述法表示在自然数中被 7 除余 2 的数为 _____.

答案: $\{x | x = 7m + 2, m \in \mathbf{N}\}$

- 8 若 $1 \in A = \{x | x^2 - a = 0\}$, 则 $B = \{y | y = x + 1, x \in A\} =$ _____.

解析: $\because 1 \in A, \therefore a = 1$,

$\therefore A = \{1, -1\}, B = \{y | y = x + 1, x \in A\} = \{2, 0\}$.

答案: $\{y | y = 2 \text{ 或 } y = 0\}$

- 9 下列几组集合中哪些是表示相同的集合:

(1) 集合 $M = \emptyset, N = \{0\}$;

(2) 集合 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, N = \{y | y^2 - 3y + 2 = 0\}$;

(3) 集合 $M = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $N = \{x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$;

(4) 集合 $M = \{\pi\}, N = \{3.141\,5\}$.

解析: 分析集合中元素是否完全相同.

(1) $M \neq N$. 集合 M 为空集, N 中有一元素为 0;

(2) $M = N$. 两个集合中的代表元素用的字母不同不影响实质;

(3) $M = N$. $M = \{\text{奇数}\}$, N 中集合的表达形式涉及到整数分类, $4k, 4k+1, 4k+2, 4k-1$ (或 $4k+3$), $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\{x | x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\} = \{\text{奇数}\}$;

(4) $M \neq N$. π 是无理数, $3.141\,5$ 是有理数, $\pi \neq 3.141\,5$.

答案: (2)(3) 表示相同集合

- 10 用适当的方法表示下列集合.

(1) 2008 年举办奥运会的国家所组成的集合;

(2) 由 0, 1, 2 三个数字所组成的一切可能的无重复数字的自然数集合;

(3) 直角坐标平面上 y 轴上的点的集合;

(4) 方程组 $\begin{cases} 2x = y \\ xy = 1 \end{cases}$ 的解集.

答案: (1) $\{\text{中国}\}$

(2) $\{0, 1, 2, 10, 20, 21, 102, 201, 120, 210\}$;

(3) $\{(x, y) | x = 0, y \in \mathbf{R}\}$;

(4) $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})\}$.



综合运用

- 11 已知集合 $A = \{y | y = -x^2 + 5x - 4, x \in \mathbf{R}\}$, 则有 ()

A. $1 \in A$, 且 $4 \in A$ B. $1 \in A$, 但 $4 \notin A$
C. $1 \notin A$, 但 $4 \in A$ D. $1 \notin A$, 且 $4 \notin A$

解析: 集合 A 是二次函数 $y = -x^2 + 5x - 4$ 中, y 的取值范围, 而不是一元二次方程 $-x^2 + 5x - 4 = 0$ 的解集, 而 $y = -x^2 + 5x - 4 = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$, 故 $1 \in A$, 但 $4 \notin A$.

答案: B

- 12 已知集合 $M = \{m | m = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则下列元素中属于集合 M 的元素个数是 ()

① $m = 1 + \sqrt{2}\pi$ ② $m = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ③ $m = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ ④ $m = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析: ① $m = 1 + \pi\sqrt{2}$, $\pi \notin \mathbf{Q}$, 故 $m \notin M$;

② $m = \sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} \notin M$;

③ $m = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \in M$;

④ $m = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) = \sqrt{3} \notin M$.

故选 B.

答案: B

- 13 集合 $M = \{y \in \mathbf{Z} | y = \frac{8}{x+3}, x \in \mathbf{Z}\}$ 的元素个数是 ()

A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

解析: 将 $x = -11, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 5$

代入 $y = \frac{8}{x+3}$ 分别得到 $y \in \mathbf{Z}$, 故选 D.

答案: D

- 14 设集合 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{4, 5, 6, 7\}$, 定义 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 $P * Q$ 中元素的个数是 ()

A. 3 个 B. 7 个 C. 10 个 D. 12 个

解析: $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7)$, 共 12 个元素.

答案: D

- 15 已知 $A = \{x \in \mathbf{N} | \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}\}$, 试用列举法表示 A .

解析: 因为 $\frac{12}{6-x} \in \mathbf{N} (x \in \mathbf{N})$ 所以 $6-x = 1, 2,$

$3, 4, 6, 12 (x \in \mathbf{N})$, 即 $x = 5, 4, 3, 2, 0$. 所以 $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$.

- 16 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, B 表示集合 $\{|a+3|, 2\}$, 已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$, 求 a 的值.

解析: 因为 $5 \in A, 5 \notin B$,

所以 $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, \\ |a+3| \neq 5, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = -4 \text{ 或 } a = 2, \\ a \neq 2 \text{ 且 } a \neq -8. \end{cases}$

所以 $a = -4$.



拓展探究

- 17 规定集合中的元素有有限多个, 则称该集合为有限集, 集合中的元素有无限多个, 称集合为无限集. 不含任何元素的集合为空集.

当 a, b 满足什么条件时, 集合 $A = \{x | ax + b = 0\}$ 是有限集、无限集、空集?

解析: (1) 当 $a \neq 0$ 时, 集合 $A = \{x | ax + b = 0\} = \{x | x = -\frac{b}{a}\}$ 是有限集.

(2) 当 $a = 0$ 时, $ax + b = 0$ 变为 $0 \cdot x = -b$,

① $b = 0$ 时, $0 \cdot x = 0, x$ 有无穷多解;

② $b \neq 0$ 时, $0 \cdot x = b$, 无解.

则 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, 集合是无限集;

$a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 集合是空集.

综上, $a \neq 0$ 时, 集合 A 是有限集;

$a = 0$ 且 $b = 0$ 时, 集合 A 是无限集;

$a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 集合 A 是空集.

- 18 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$:

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 值, 并求出这个集合;

(2) 若 A 中至多具有一个元素, 求 a 的取值范围.

解析: (1) 当 $a = 0$ 时, 方程 $2x + 1 = 0$ 只有一根 $x = -\frac{1}{2}$; 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 0$ 即 $4 - 4a = 0$, 所以 $a = 1$, 这时 $x_1 = x_2 = -1$.

所以, 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, A 中只有一个元素分别为 $-\frac{1}{2}$ 或 -1 , 即 $A = \{-\frac{1}{2}\}$ 或 $A = \{-1\}$.

(2) A 中至多有一元素包括两种情形即 A 中有一个元素和 A 是空集. 当 A 是空集时, 则

有 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$; 结合(1)知:

当 $a = 0$ 或 $a \geq 1$ 时, A 中至多有一个元素.

1.1.2 集合间的基本关系



问题导入

1. 你能正确地理解空集的含义吗？你能举出一些空集的例子吗？

解答：不含任何元素的集合叫做空集. 如 $M = \{x | x^2 + 1 = 0\}$.

2. 你能准确区分符号“ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”，“ $\subseteq$ ”与“ $\subsetneq$ ”的区别吗？

解答：“ $\in$ ”是用于表示元素与集合之间关系的，若元素 a 是集合 A 中的元素，则 $a \in A$. 而“ $\subseteq$ ”是用于表示两个集合之间关系的，若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则 $A \subseteq B$. 而“ $\subsetneq$ ”也是用于两个集合之间的关系，若 $A \subseteq B$ ，且 B 中至少有一个元素不在 A 中，则 $A \subsetneq B$.



知识结构

1. 子集：(1) 对于两个集合 A, B ，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

当 A 不是 B 的子集时，记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

- (2) 符号语言表示子集：若任意 $x \in A$ ，有 $x \in B$ ，则 $A \subseteq B$.

2. 真子集：若集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素 $x \in B$ ，且 $x \notin A$ ，称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

3. 空集：不含任何元素的集合，记为 $\emptyset$.

规定：空集是任何集合的子集，用符号语言表示为 $\emptyset \subseteq A$ ；若 A 非空（即 $A \neq \emptyset$ ），则有 $\emptyset \subsetneq A$.

4. 子集、真子集的性质：① $A \subseteq A$ ，② $\emptyset \subseteq A$ ，③ $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ，④ $A \subsetneq B$ ，且 $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$.

5. 两集合相等：若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$.

6. 含 n 个元素的集合 A 的子集个数为 2^n ，真子集个数为 $2^n - 1$ ，非空真子集的个数为 $2^n - 2$.



三点剖析

一、集合间的关系

【例1】判断下列各式是否正确.

- (1) $\sqrt{2} \subseteq \{x | x \leq 2\}$;
- (2) $\sqrt{2} \in \{x | x \leq 2\}$;
- (3) $\{\sqrt{2}\} \subsetneq \{x | x \leq 2\}$;
- (4) $\emptyset \in \{x | x \leq 2\}$;
- (5) $\emptyset \subseteq \{x | x \leq 2\}$;
- (6) $\{a, b, c, d\} \subseteq \{e, f, b, d, g\}$.



各个击破

类题演练 1

下列各式中，正确的个数是 ()

- ① $\emptyset = \{0\}$ ② $\emptyset \subseteq \{0\}$ ③ $\emptyset \in \{0\}$ ④ $0 = \{0\}$
 ⑤ $0 \in \{0\}$ ⑥ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$

- A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个

解析：正确命题有②⑤⑥.

答案：C

思路分析:要注意元素与集合之间、集合与集合之间关系符号的不同,绝对不能混淆。

解:根据元素与集合、集合与集合之间的有关规定,(1)(4)(6)不正确,(2)(3)(5)正确。

温馨提示

一般来说,元素与集合之间应该用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”;而“ $\subseteq$, $\supseteq$ ”应该出现于集合与集合之间; $\emptyset$ 作为特殊集合应遵从 $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \supsetneq A$ (非空).但这不是绝对的,选择的关键在于具体分析二者的关系.例 $\{1,2\} \in \{\{1,2\},\{1\}\}$,而 $\emptyset \in \{\emptyset,1\}$, $\emptyset \supsetneq \{\emptyset,1\}$ 都是对的。

二、运用集合间的关系解题

【例2】 $\{a,b\} \subseteq A \subseteq \{a,b,c,d,e\}$,求所有满足条件的集合 A .

思路分析:从子集、真子集的概念着手解答。

解:因为 $\{a,b\} \subseteq A$,所以, A 中必有元素 a,b .

因为, A 是 $\{a,b,c,d,e\}$ 的真子集,所以, A 中元素可以有2个,3个,4个三种情形.具体为: $\{a,b\}$; $\{a,b,c\}$; $\{a,b,d\}$; $\{a,b,e\}$; $\{a,b,c,d\}$; $\{a,b,c,e\}$; $\{a,b,d,e\}$ 共7个。

温馨提示

1. 按顺序摆,做到不重不漏。
2. 正确地把集合语言表述的问题“翻译”成普通数学语言。

【例3】集合 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{a^2\}$,且 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值集合。

思路分析:在利用 $B \subseteq A$ 这一条件时要注意对 a 进行讨论。

解:由于 $B=\{a^2\} \subseteq A=\{1,3,a\}$,

因此, $\textcircled{1} a^2=1$,得 $a=1$ (不合题意舍去)或 $a=-1$;

$\textcircled{2} a^2=3$ 得 $a=\pm\sqrt{3}$;

$\textcircled{3} a^2=a$ 得 $a=1$ (不合题意舍去)或 $a=0$ 。

综上,实数 a 的取值集合为 $\{-1,\sqrt{3},-\sqrt{3},0\}$ 。

温馨提示

1. 分类讨论思想是很重要的思想方法,注意掌握分类方法;
2. 在解决集合的元素问题时,最后结论要注意检验元素是否具备互异性。

变式提升 1

在以下五个写法中,写法正确的个数有 ()

- $\textcircled{1} \{0\} \in \{0,1,2\}$ $\textcircled{2} \emptyset \subseteq \{0\}$ $\textcircled{3} \{0,1,2\} \subseteq \{1,2,0\}$ $\textcircled{4} 0 \in \emptyset$ $\textcircled{5} 1 \in \{x|x \subseteq \{1,2\}\}$

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

解析: $\textcircled{1}$ 集合与集合之间应用 $\subseteq$, $\supseteq$ 或 $=$ 而不是属于关系。 $\textcircled{2}$ 空集是任何非空集合的真子集。 $\textcircled{3}$ 两集合相等时也可以写成 $A \subseteq B$ 的形式。 $\textcircled{4}$ $\emptyset$ 中不含任何元素。 $\textcircled{5}$ 此集合的元素是集合而不是数字.故 $\textcircled{2}$ 和 $\textcircled{3}$ 是正确的。

答案:B

类题演练 2

求满足条件 $\{x|x^2+1=0\} \subseteq M \subseteq \{x|x^2-1=0\}$ 的集合 M 的个数。

解析: $\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$,其非空子集为 $\{-1\}$, $\{1\}$, $\{-1,1\}$.所以满足条件 $\{x|x^2-1=0\} \subseteq M \subseteq \{x|x^2-1=0\}$ 的集合 M 共3个。

变式提升 2

集合 $\{x \in \mathbb{N} | x = -y^2 + 6, y \in \mathbb{N}\}$,试写出该集合的所有真子集。

解析:由集合 $\{x \in \mathbb{N} | x = -y^2 + 6, y \in \mathbb{N}\}$, $x \in \mathbb{N}$,则 $x = -y^2 + 6 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 6$.

又因为 $y \in \mathbb{N}$,所以 $y=0,1,2$,相应地 $x=6,5,2$.

集合为 $\{2,5,6\}$,其真子集个数为 $2^3-1=7$ 个。

分别写出为 $\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{6\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{5,6\}$ 。

类题演练 3

已知集合 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{1,a^2-a+1\}$ 且 $A \supseteq B$,求 a 的值。

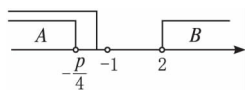
解析: $\because B \subseteq A, \therefore \textcircled{1}$ 当 $a^2-a+1=3$ 时, $a^2-a-2=0, \therefore a=2$ 或 $a=-1$ 。

$\textcircled{2}$ 当 $a^2-a+1=a$ 时, $a=1$,代入 A 中不满足 A 中元素互异性,舍去. $\therefore a=2$ 或 $a=-1$ 。

变式提升 3

设 $A=\{x|4x+p<0\}$, $B=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>2\}$,若使 $A \subseteq B$,则 p 的取值范围是_____。

解析: $A=\{x|4x+p<0\}=\{x|x<-\frac{p}{4}\}$ 画数轴,



分析得 $-\frac{p}{4} \leq -1, \therefore p \geq 4$ 。

三、元素与集合之间、集合与集合之间的关系再讨论

【例4】已知集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{x | x \in A\}$, $C = \{x | x \subseteq A\}$, 试判断 A, B, C 之间的关系.

解:集合 B 中的代表元素是 x , x 满足的条件是 $x \in A$, 因此 $x = a$ 或 $x = b$, 即 $B = \{a, b\} = A$, 而集合 C 则不然, 集合 C 的代表元素虽然也是 x , 但 x 代表的是集合, $x \subseteq A$, 因此, $x = \{a\}$ 或 $x = \{b\}$ 或 $x = \{a, b\}$ 或 $x = \emptyset$, 即 $C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 此时集合 C 中的元素是集合, 故 $B \subseteq C, A \in C$.

$\therefore A = B, B \subseteq C, A \in C$.

温馨提示

对于元素与集合、集合与集合之间的 $\in, \subseteq$ 关系要理解透彻, “ $\in$ ”是用于描述元素与集合之间的关系, 即只要元素 a 是构成集合 A 的一个元素, 则 $a \in A$, 如 $\{1\}$ 与 $\{\{1\}, \{2\}\}$, 尽管 $\{1\}$ 是一个集合, 但是 $\{1\}$ 是构成集合 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 的一个元素, 故 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$, “ $\subseteq$ ”是用于描述集合与集合之间的关系, 如 $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

类题演练 4

集合 $A = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$ 与 $B = \{(x, y) | y = x\}$ 的关系是 ()

- A. $A = B$ B. $A \subsetneq B$
C. $A \supsetneq B$ D. $A \supseteq B$

解析: 注意 $\frac{y}{x} = 1$ 与 $y = x$ 这两个式子是不同的, 前者只有 $x \neq 0$ 时才有意义, 故 A 中少一个点 $(0, 0)$, 因此 $A \subsetneq B$.

答案: B

变式提升 4

已知 $a, x \in \mathbf{R}, A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\}, B = \{3, x^2 + ax + a\}$, 求使 $2 \in B, B \subsetneq A$ 的 a 与 x 的值.

解析: $\because 2 \in B, \therefore x^2 + ax + a = 2$.

$\because B \subsetneq A, \therefore 3 = x^2 - 5x + 9$.

$$\text{解得} \begin{cases} x=2, \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3, \\ a=-\frac{7}{4}. \end{cases}$$

$$\text{答案: } \begin{cases} x=2, \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3, \\ a=-\frac{7}{4}. \end{cases}$$



基础达标

1 下列表示中错误的是 ()

- ① $\{0\} = \emptyset$ ② $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ ③ $\{2\} \in \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ④ $0 \in \{0\}$

- A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ②③

解析: ① $\{0\}$ 是单元素集, 而 $\emptyset$ 是空集, 故 $\{0\} \neq \emptyset$; ③ $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{2, 1\}$, $\therefore 2 \in \{2, 1\}$ 但不是 $\{2\} \in \{2, 1\}$.

答案: B

2 设 $A = \{\text{正方形}\}, B = \{\text{矩形}\}, C = \{\text{平行四边形}\}, D = \{\text{梯形}\}$, 则下列包含关系中不正确的是 ()

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$
C. $C \subseteq D$ D. $A \subseteq C$

解析: 梯形不是平行四边形, $\therefore C$ 不正确.

答案: C

3 已知集合 $M = \{x | x = 2m, m \in \mathbf{Z}\}, N = \{y | y = 2(n+1), n \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()

- A. $M \subsetneq N$ B. $M \supsetneq N$
C. $M = N$ D. $M \neq N$

解析: M 和 N 都表示偶数集合, $\therefore M = N$.

答案: C

4 下列四个集合中, 是空集的是 ()

- A. $\{x | x^2 = 0\}$
B. $\{x | x - 1 < 0\}$
C. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$
D. $\{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

解析: $\because \{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 表示方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的实根的集合, 可 $x^2 - x + 1 = 0$ 无实根, $\therefore$ 该集合为空集.

答案: D

5 集合 $M = \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbf{Z}\}, P = \{x | x = 6n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 M, N, P 的关系正确的是 ()

- A. $P \subsetneq N \subsetneq M$ B. $N = P \subsetneq M$

C. $P \subsetneq M = N$ D. $P \supsetneq M = N$

解析:可采用列举法表示: $M = \{\dots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$, $N = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$, $P = \{\dots, -11, -5, 1, 7, 13, \dots\}$. $\therefore M = N \supsetneq P$.

答案:C

- 6 若集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | \frac{x-1}{x-2} = 0\}$, 则集合 A 与 B 的关系为_____.

解析: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$,

$\therefore B \subsetneq A$.

答案: $B \subsetneq A$

- 7 集合 $M \subseteq \{2, 3, 5\}$, 且 M 中至多有一个奇数, 则这样的集合个数为_____.

解析:符合条件的集合有: $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}$.

答案:6个

- 8 集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 2(k + 1), k \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $E = \{x | x = 2k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 写出上述集合中相等的集合:_____.

解析: $\therefore E = \{x | x = 2(k - 1), k \in \mathbf{Z}\}$,

$\therefore A, C, E$ 都表示偶数集合,

$\therefore A = C = E$; B, D 都表示奇数集,

$\therefore B = D$.

答案: $A = C = E, B = D$

- 9 2006 上海文科, 1 已知集合 $A = \{-1, 3, m\}$, 集合 $B = \{3, 4\}$. 若 $B \subseteq A$. 则实数 $m =$ _____.

解析: $\therefore B \subseteq A, 4 \in B$,

$\therefore 4 \in A$,

$\therefore m = 4$, 但 $m \neq 3$, 根据元素的互异性.

答案:4

- 10 设 $M = \{(x, y) | mx + ny = 4\}$ 且 $\{(2, 1), (-2, 5)\} \subseteq M$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.

解析:由题意得 $\begin{cases} 2m + n = 4, \\ -2m + 5n = 4, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{4}{3}, \\ n = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

答案: $\frac{4}{3} \quad \frac{4}{3}$



综合运用

- 11 集合 $P = \{x, 1\}$, $Q = \{y, 1, 2\}$, 其中 $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 且 P 是 Q 的真子集, 把满足上述条件的一对有序整数 (x, y) 作为一个

点, 这样点的个数是_____.

解析:当 $x = 2$ 时, y 可取 $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, 此时, 满足条件的点共 7 个;

当 $x = 3$ 时, y 只能取 3 , 此时满足条件的点有 1 个;

同理当 $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, 满足条件的点分别有 1 个, 共 6 个,

$\therefore$ 共 14 个.

答案:14个

- 12 设 $M = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则 a 的值为_____.

解析:忽略空集是学生常犯的错误, 本题应考虑两方面:① $N \neq \emptyset$ 时, $a = \pm 1$, ② $N = \emptyset$ 时 $a = 0$.

答案: ± 1 或 0

- 13 若 $x \in \mathbf{R}$, $A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\}$, 求使 $A = \{2, 3, 4\}$ 的 x 值.

解析: $x^2 - 5x + 9 = 3$ 时, 解得: $x = 2$ 或 $x = 3$.

- 14 $a, x \in \mathbf{R}$, $B = \{3, x^2 + ax + a\}$, $C = \{x^2 + (a + 1)x - 3, 1\}$, 求使 $B = C$ 的 a 与 x 的值.

解析: $\therefore B = C$,

$$\therefore \begin{cases} x^2 + ax + a = 1, \\ x^2 + (a + 1)x - 3 = 3, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -2, \\ x = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -6, \\ x = -1. \end{cases}$$

答案: $\begin{cases} a = -2, \\ x = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -6, \\ x = -1. \end{cases}$

- 15 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 3x + 3 = 0\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} | y^2 - 5y + 6 = 0\}$, $A \subseteq P \subsetneq B$, 求满足条件的集合 P .

解析:由已知 $A = \emptyset$, $B = \{2, 3\}$, B 的真子集为: $\emptyset, \{2\}, \{3\}$

又 $\therefore \emptyset$ 是任何集合的子集,

$\therefore P$ 可以是 $\emptyset, \{2\}, \{3\}$.

答案: $\emptyset$ 或 $\{2\}$ 或 $\{3\}$

- 16 已知 $A = \{1, 1 + d, 1 + 2d\}$, $B = \{1, q, q^2\}$, 当 $A = B$ 时, 求 d, q 的值.

解析:由集合互异性可知 $d \neq 0, q \neq 1, -1, 0$, 由 $A = B$ 可推得,

$$\textcircled{1} \begin{cases} 1 + d = q, \\ 1 + 2d = q^2 \end{cases} \text{ 或 } \textcircled{2} \begin{cases} 1 + d = q^2, \\ 1 + 2d = q. \end{cases}$$

由 $\textcircled{1}$ 得 $(1 - q) = -d, 1 - q^2 = -2d$,

相除 $1 + q = 2$ 得 $q = 1$, 不合题意;

由 $\textcircled{2}$ 得 $(2q + 1)(q - 1) = 0$, 因为 $q \neq 1$ 所以

$$q = -\frac{1}{2} \text{ 代入得 } d = -\frac{3}{4}.$$

所以 d 值为 $-\frac{3}{4}$, q 值为 $-\frac{1}{2}$.



拓展探究

- 17 设集合 $M = \{x | 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$, $N = \{x | mx = 1\}$, 且 $N \subseteq M$, 求实数 m 的取值集合.

解析: 当 $N = \emptyset$ 时, $m = 0$, 当 $N \neq \emptyset$,

$$\therefore N \subseteq M = \{3, -\frac{1}{2}\},$$

$$\therefore \frac{1}{m} = 3, \text{ 即 } m = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{1}{m} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } m =$$

$$-2, \therefore m \text{ 的取值集合为 } \{0, -2, \frac{1}{3}\}.$$

- 18 若集合 $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbf{R}\}$, 试确定集合 A, B 之间的关系.

解析: $A = \{x | x = (a+1)^2 + 3\} = \{x | x \geq 3\}$,

$$B = \{y | y = (b-2)^2 - 1\} = \{y | y \geq -1\},$$

$$\therefore A \subseteq B.$$

答案: $A \subseteq B$

1.1.3 集合的基本运算



课前三引



问题导入

- 你能准确地利用并集、交集、补集的概念解决集合运算吗?
- 如何利用集合运算的性质作依据解决相关问题?



知识结构

1. 并集的概念

- (1) 自然语言表示: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集.

- (2) 符号语言表示: $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

- (3) 图形语言 (venn 图) 表示:

2. 交集的概念

- (1) 自然语言表示: 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集.

- (2) 符号语言表示: $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

- (3) 图形语言表示 (Venn 图):

3. 补集的概念

- (1) 自然语言表示: 对于集合 A , 由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素所组成的集合, 称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 简称为集合 A 的补集.

- (2) 用符号语言表示: $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$.

- (3) 用图形语言表示 (Venn 图):

阴影部分表示 $\complement_U A$.

4. 有关集合运算的性质

- (1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$.

- (2) $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.

- (3) $(\complement_U A) \cup A = \mathbf{R}$; $(\complement_U A) \cap A = \emptyset$; $\complement_U (\complement_U A) = A$.

- (4) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

- (5) $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.



三点剖析



各个击破

一、交集、并集、补集的概念与运算

【例1】若全集 $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbf{N}^*\}$, $M = \{1, 7, 8\}$, $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $S = \{1, 4, 7\}$, 则 $(M \cup P) \cap (\complement_U S) =$ _____.

解析: $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbf{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(M \cup P) \cap (\complement_U S) = \{2, 3, 5, 8\}$.

答案: $\{2, 3, 5, 8\}$

温馨提示

1. 进行集合运算应首先要弄清楚各集合是由什么元素构成的, 然后再根据交集、并集、补集的概念进行运算.

2. 集合间的包含关系的判断及集合的运算一般使用韦恩图.

【例2】已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | -4 < x < \frac{1}{2}\}$, $B = \{x | x + 4 \leq 0\}$, $C = \{x | 2x \geq 1\}$, 则集合 C 等于 _____ ()

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$
C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $\complement_U (A \cup B)$

解析: 利用数轴解决有关不等式的数集运算是最有效的工具, 借助数轴易得 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{x | x < \frac{1}{2}\}$, 所以 $C = \complement_U (A \cup B)$.

答案: D

温馨提示

数集的运算一般使用数轴.

二、交集与并集的概念符号之间的区别与联系

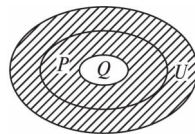
【例3】已知 $A = \{y | y = x^2 - 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y =$

类题演练 1

设全集 $U = \mathbf{N}$, $P = \{2n | n \in \mathbf{N}\}$, $Q = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, 则 $\mathbf{N}$ 可以表示为 _____ ()

- A. $P \cap Q$ B. $(\complement_U P) \cup Q$
C. $P \cup (\complement_U Q)$ D. $(\complement_U P) \cup (\complement_U Q)$

解析: $\complement_U Q$ 如图所示的阴影部分, $\therefore P \cup \complement_U Q = \mathbf{N}$.



答案: C

变式提升 1

设全集 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $A = \{1, |a-5|, 9\}$, $\complement_U A = \{5, 7\}$, 则 a 的值是 _____ ()

- A. 2 B. 8
C. -2 或 8 D. 2 或 8

解析: $\because$ 由条件得 $|a-5| = 3$,
 $\therefore a = 2$ 或 8 .

答案: D

类题演练 2

已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 集合 $B = \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 求 $\complement_{\mathbf{R}} A$, $\complement_{\mathbf{R}} B$, $A \cap B$, $A \cup B$.

解析: 借助于数轴,
由右图可知 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$; $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | -3 \leq x < 1\}$;
 $A \cap B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\} \cap \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\} = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$;
 $A \cup B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\} \cup \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 1\} = \mathbf{R}$.

变式提升 2

集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x - a \geq 0\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析: 由图示可知
 $a \leq 2$.

答案: $a \leq 2$

类题演练 3

已知 $A = \{y \in \mathbf{N} | y = x^2 - 4x + 10\}$, $B = \{y \in \mathbf{N} | y = -x^2 - 2x + 12\}$, 求 $A \cap B$.

$x, x \in \mathbf{R}$. 求 $A \cap B, A \cup B$.

思路分析: 本题注重考查集合概念及运算, 其中集合中的元素 y 的本质是许多同学认识不足的, 它其实是函数的因变量, 集合为函数因变量的取值集合.

解: $A = \{y | y = x^2 - 2, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq -2\}$,
 $B = \{y | y = x\} = \mathbf{R}$, 则 $A \cap B = \{y | y \geq -2\}$,
 $A \cup B = \mathbf{R}$.

温馨提示

1. 对于描述法给出的集合, 要抓住竖线前的代表元素及它具有的性质再进行运算.
2. 本题中的两个集合都是数集, 且是每个函数的函数值构成的集合.

三、集合运算性质的运用

【例4】集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 a 能取到的所有值的集合为_____.

解析: 处理此类问题有两处值得同学们注意, 一是明确 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$; 二是 $B = \{x | ax = 2\} \neq \{x | x = \frac{2}{a}\}$, 要注意对 a 是否为 0 进行讨论.

$A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$, $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$. 因此集合 B 只能为单元素集或 $\emptyset$.

当 $B = \{1\}$ 时, 即 $1 \in B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 得 $a = 2$;

同理, 当 $B = \{2\}$ 时, 得 $a = 1$;

当 $B = \emptyset$ 时, 即 $ax = 2$ 无解, 得 $a = 0$.

综上, a 能取到的值所组成的集合为 $\{0, 1, 2\}$.

答案: $\{0, 1, 2\}$

温馨提示

1. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ 两个性质常常作为“等价转化”的依据, 要特别注意当 $A \subseteq B$ 时, 往往需要按 $A = \emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$ 两种情况分类讨论, 而这一点却很容易被忽视. 如本题中由 $B \subseteq A$ 应分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况考虑, 尽管本题中 $B = \emptyset$ 不适合题意, 但也不要遗漏这种情况.
2. 要注重集合语言与数学文字语言之间的转化.

解析: $\because A = \{y | y \geq 6, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y | y \leq 13, y \in \mathbf{N}\}$,

$\therefore A \cap B = \{y \in \mathbf{N} | 6 \leq y \leq 13\}$.

答案: $\{y | 6 \leq y \leq 13, y \in \mathbf{N}\}$

变式提升 3

2006 江苏高考, 7 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 _____ ()

A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$ C. $A \neq C$ D. $A = \emptyset$

解析: 画出韦恩图可知 A 成立.

答案: A

类题演练 4

若集合 $P = \{1, 2, 3, m\}$, $Q = \{m^2, 3\}$, 满足 $P \cap Q = Q$, 求 m 的值.

解析: $\because P \cap Q = Q, \therefore Q \subseteq P$,

$\therefore m^2 = 1$ 或 $m^2 = 2$ 或 $m^2 = m$, 解得 $m = \pm 1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0.

经检验 $m = 1$ 时, 不满足集合 P 中元素的互异性, $\therefore m = -1$ 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0.

答案: -1 或 $\pm\sqrt{2}$ 或 0

变式提升 4

设集合 $M = \{x | x < 3\}$, $N = \{x | x > -2\}$, $Q = \{x | x - a \geq 0\}$, 令 $P = M \cap N$.

(1) 求集合 P ;

(2) 若 $P \subseteq Q$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $P \cap Q = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 求实数 a 的取值范围;

(4) 若 $P \cap Q = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

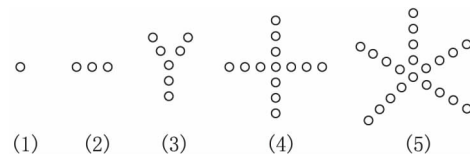
解析: (1) $P = M \cap N = \{x | x < 3\} \cap \{x | x > -2\} = \{x | -2 < x < 3\}$.

[利用数轴作为工具分别对 (2) (3) (4) 进行分析, 注意对端点处进行讨论]

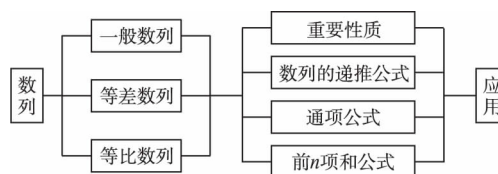
(2) 当 $a < -2$ 时, 满足题意;

当 $a = -2$ 时, $Q = \{x | x \geq -2\}$, 也有 $P \subseteq Q$.

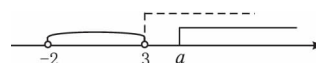
所以 $a \leq -2$.



(3) 由于 a 是可变的实数, 因此, 若 $P \cap Q = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 从数轴上观察, a 能且只能取 0, 所以 $a = 0$.



(4) 若要 $P \cap Q = \emptyset$, 通过数轴观察知, 当 $a > 3$ 时, $P \cap Q = \emptyset$; 当 $a = 3$ 时, $Q = \{x | x - 3 \geq 0\} = \{x | x \geq 3\}$, $P \cap Q = \{x | -2 < x < 3\} \cap \{x | x \geq 3\} = \emptyset$, 综上, $a \geq 3$.



基础达标

- 1 满足 $A \cup \{a\} = \{a, b, c\}$ 的集合 A 的个数为 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析: $A = \{b, c\}$ 或 $A = \{a, b, c\}$.

答案: B

- 2 集合 $S = \{x \in \mathbb{N}^* | -2 < x < 9\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $P = \{1, 3, 6\}$, 则 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()

A. $M \cup P$ B. $M \cap P$
C. $(\complement_S M) \cup (\complement_S P)$ D. $(\complement_S M) \cap (\complement_S P)$

解析: $\complement_S M = \{-1, 0, 1, 2, 6, 7, 8\}$,

$\complement_S P = \{2, 4, 5, 7, 8\} \therefore \{2, 7, 8\} = \complement_S M \cap \complement_S P$.

答案: D

- 3 设 M, P 是两个非空集合, 规定 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 根据规定, $M - (M - P)$ 等于 ()

A. M B. P C. $M \cup P$ D. $M \cap P$

解析: $M - (M - P) = \{x | x \in M, \text{ 且 } x \notin M - P\}$, 如



图阴影 I 为 $M - P$,

$\therefore M - (M - P)$ 为图中阴影 II,

$\therefore M - (M - P) = M \cap P$.

答案: D

- 4 已知 $I = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7\}$, 集合 $A = \{3, 5, 7\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 ()

A. $\complement_I A = \{1, 2, 4, 6\}$
B. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
C. $A \cap \complement_I B = \emptyset$

D. $B \cap \complement_I A = \{2, 4\}$

解析: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 而集合 $\mathbb{N}$ 中含有 0 是容易忽略的, 故 A 中 $\complement_I A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$; B 中 $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I (A \cup B) = \{0, 1, 6\}$; C 中 $A \cap \complement_I B$ 只要找出在 A 中且不在 B 中的元素即可, 为 $\{7\}$.

答案: D

- 5 集合 $M = \{x | 2x^2 + 3ax + 2 = 0\}$, $N = \{x | 2x^2 + x + b = 0\}$, $M \cap N = \{\frac{1}{2}\}$, 则 $a + b =$ _____.

解析: $\because M \cap N = \{\frac{1}{2}\}$,

$$\therefore 2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2}a + 2 = 0, 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + b = 0,$$

$$\therefore a = -\frac{5}{3}, b = -1,$$

$$\therefore a + b = -\frac{8}{3}.$$

答案: $-\frac{8}{3}$

- 6 若集合 $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x^2 \leq 25\}$, 则 $A \cup B$ 中元素个数有 _____.

解析: $\because A = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$\therefore A \cup B = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\therefore A \cup B$ 中有 16 个元素.

答案: 16 个

- 7 集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则 $M \cap N =$ _____.