



CONTENTS

目录

第一章 基本初等函数(Ⅱ)	1
1.1 任意角的概念与弧度制	1
1.1.1 角的概念的推广	1
1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算	6
1.2 任意角的三角函数	12
1.2.1 三角函数的定义	12
1.2.2 单位圆与三角函数线	17
1.2.3 同角三角函数的基本关系式	22
1.2.4 诱导公式	29
1.3 三角函数的图象与性质	33
1.3.1 正弦函数的图象与性质	33
1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质	41
1.3.3 已知三角函数值求角	46
整合提升	52
第二章 平面向量	58
2.1 向量的线性运算	59
2.1.1 向量的概念	59
2.1.2 向量的加法	63
2.1.3 向量的减法	68
2.1.4 向量数乘	71
2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算	76
2.2 向量的分解与向量的坐标运算	80



CONTENTS



2.2.1 平面向量基本定理	80
2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算	84
2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件	89
2.3 平面向量的数量积	94
2.3.1 向量数量积的物理背景与定义	94
2.3.2 向量数量积的运算律	98
2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式	101
2.4 向量的应用	106
2.4.1 向量在几何中的应用	106
2.4.2 向量在物理中的应用	110
整合提升	114
第三章 三角恒等变换	119
3.1 和角公式	119
3.1.1 两角和与差的余弦	119
3.1.2 两角和与差的正弦	123
3.1.3 两角和与差的正切	127
3.2 倍角公式和半角公式	131
3.2.1 倍角公式	131
3.2.2 半角的正弦、余弦和正切	135
3.3 三角函数的积化和差与和差化积	139
整合提升	144
模块综合测评	150



第一章 基本初等函数(Ⅱ)

本章要览

内容提要

三角函数是基本初等函数,它是描述周期现象的重要数学模型,在数学和其他领域中具有重要的作用,在本章中,我们将通过实例学习三角函数及其基本性质,体会三角函数在解决具有周期变化规律的问题中的作用.

本章包括任意角的概念及弧度制、任意角的三角函数、三角函数的图象与性质.

第一部分主要是把角的概念加以推广,通过引进弧度制,学习弧度制与角度制的换算,从而推导出弧度制下扇形的弧长公式和面积公式.第二部分通过弧度制,使得角和实数建立起一一对应关系,从而可以把三角函数看成以实数为自变量的函数.先将锐角三角函数推广到任意角的三角函数,接着又根据三角函数的定义推导出了同角三角函数的基本关系式和诱导公式.这两组公式是三角恒等变换的重要基础,在求值、化简三角函数式和证明三角恒等式问题中经常用到.第三部分首先以三角函数线为工具,作出了正弦函数和余弦函数的图象,介绍了“五点法”作其图象简图的方法,再从图象归纳出正、余弦函数的性质,进而研究函数 $y=A(\sin\omega x+\varphi)$ 与 $y=\sin x$ 图象的性质,最后简要介绍了正切函数的图象和性质,以及已知三角函数值如何求角.教材上还说明了物理和工程技术的许多问题都要用三角函数的图象和性质予以解决.

学法指导

本章公式众多,同学们在学习中要对学过的公式做到真正理解、记准、记熟、用活,不断总结公式应用的技巧.在熟练掌握概念、公式的基础上,不断总结解题的规律,体会化归思想、数形结合思想的具体应用,在解题过程中注意灵活地加以应用.掌握好正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质(定义域、值域、最大值、最小值、周期及单调性、奇偶性),它们是历年高考常考内容之一,要注意知识外延和横向联系,特别要重视代数、不等式、函数、三角函数的综合运用.

1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广



课前导引



情景导入

在日常生活中,钟表的指针周而复始地转动着,秒针

每跳动一下,我们一秒的时间就不再拥有,试想一下,我们一节课 40 分钟,秒针会旋转多少度呢?为了回答这个问题,你可能会想到从前我们学过的 0° 到 360° 的角,现在看来仅有这些是不够的,必须把角的概念加以推广.

提示:1 分钟秒针转过一圈 360° ,则 40 分钟时,秒针



转过 $40 \times 360^\circ = 14\,400^\circ$.



知识预览

1. 角可以看成平面内一条射线绕着它的端点从一个位置,旋转到另一个位置所成的图形,旋转开始的位置叫做角的始边,旋转终止的位置叫做角的终边,射线的端点叫角的顶点;按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角;如果一条射

线没有任何旋转,称它形成了一个零角;角的三要素是顶点、始边、终边.

2. 在直角坐标系内,使角的顶点与原点重合,角的始边在 x 轴的正半轴上,那么角的终边在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.

3. 所有与角 α 终边相同的,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.



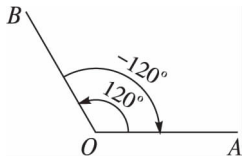
课堂导学



三点剖析

一、任意角的概念

角可以看成是一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形,射线旋转时经过的平面部分为角的内部.如图,射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 位置所成的角,记作 $\angle AOB$, OA 叫做 $\angle AOB$ 的始边, OB 叫做 $\angle AOB$ 的终边;以 OB 为始边, OA 为终边的角记作 $\angle BOA$. 由图知 $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOA = -120^\circ$.



理解角的概念时要注意角的四要素:顶点、始边、终边和旋转方向,角可以是任意大小的.

【例1】用集合表示下列各角:“ 0° 到 90° 的角”“第一象限角”“锐角”“小于 90° 的角”“ $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角”.

思路分析:解决本题关键是明确这几类角的定义,理清它们之间的关系.

解: 0° 到 90° 的角的集合为 $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$,

第一象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

锐角的集合为 $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$.

小于 90° 的角的集合为 $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$.

$0^\circ \sim 90^\circ$ 的角的集合为 $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$.

二、终边相同的角

(1)研究终边相同的角的前提条件是角的顶点在坐标原点,角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

(2)所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

(3)明确以下几点: a, k 为整数; b, α 为任意角;



各个击破

类题演练1

$A = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}, B = \{\text{第一象限角}\}$,则 $A \cap B$ 等于..... ()

A. {锐角} B. {小于 90° 的角}

C. {第一象限的角} D. 以上都不对

解析:小于 90° 的角由锐角、零角、负角组成,而第一象限角包括锐角和其他终边在第一象限的角.所以 $A \cap B$ 是由锐角和终边在第一象限的负角组成,应选 D.

答案:D

变式提升1

时钟的分针所转的角是正角还是负角?经过下列时间分针所转过的角各是多少度?

(1)12 分钟;(2)2 小时 15 分.

思路分析:首先要由分针旋转的方向确定角的符号,其次要注意小时与分的换算.

解:分针所转的角是负角,经过 1 分钟分针所转过的角是 $-\frac{360^\circ}{60} = -6^\circ$.

(1)分针走 12 分钟所转过的角是 $-6^\circ \times 12 = -72^\circ$.

(2)2 小时 15 分 = 135 分,分针走 2 小时 15 分所转过的角是 $-6^\circ \times 135 = -810^\circ$.

类题演练2

(1)写出与 15° 角终边相同的角的集合;

(2)在(1)的集合中,将适合不等式 $-1\,080^\circ < \alpha < 360^\circ$ 的元素 α 求出来.

思路分析:对于(1),可利用终边相同角公式写出.

对于(2),可在(1)的基础上,利用满足约束条件的不等式,对其中的 k 值,采用赋值法求解.



c. $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间用“+”连结, 如 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$ 应看成是 $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$; d. 终边相同的角不一定相等, 但相等的角, 终边一定相同; e. 终边相同的角有无数多个, 它们相差 360° 的整数倍.

【例2】与 -457° 角终边相同的角的集合是 ()

- A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

解法一: $\because -457^\circ = -2 \times 360^\circ + 263^\circ, \therefore$ 应选 C.

解法二: $\because -457^\circ$ 与 -97° 角终边相同, 又 -97° 与 263° 角终边相同, 263° 角又与 $k \cdot 360^\circ + 263^\circ$ 角终边相同. $\therefore$ 应选 C.

答案: C

温馨提示

讨论三角函数问题时, 在同一个式子中两种角度制不能混用, 如与 45° 角终边相同的角的集合不能用 $\{x | x = 2k\pi + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示. 正确的表示方法为 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{x | x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$.

三、象限角

当角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴的正半轴重合时, 那么角的终边(除顶点外)在第几象限角就是第几象限角; 当角的终边落在坐标轴上时, 称为轴线角, 这时这个角不属于任何象限. 本概念是以“角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴正半轴重合”为前提, 否则则不能从终边的位置来判断某角是第几象限角, 轴线角这个概念在教材中没有提到.

【例3】已知角 α 是第三象限角, 则角 $-\alpha$ 的终边在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

思路分析: 角 α 与角 $-\alpha$ 表示两旋转方向相反, 转过的角度相等的两个角.

解: 因为 α 是第三象限角, 所以 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}$. 于是 $-k \cdot 360^\circ - 270^\circ < -\alpha < -k \cdot 360^\circ - 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$. 所以 $-\alpha$ 所在范围与 $(-270^\circ, -180^\circ)$ 范围相同, 则 $-\alpha$ 的终边在第二象限, 因此选 B.

答案: B

温馨提示

(1) 若采用数形结合, 角 α 可看成按逆时针方向旋转, 角 $-\alpha$ 则看成是按顺时针方向旋转;
(2) 写出象限角的步骤: 第一步, 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 终边在第一象限内角的取值范围是

解: (1) 与 15° 角终边相同的角的集合是 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 15^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 在 M 中适合 $-1080^\circ < \alpha < 360^\circ$ 的元素是:

取 $k = -3$ 时, $-3 \cdot 360^\circ + 15^\circ = -1065^\circ$.

取 $k = -2$ 时, $-2 \cdot 360^\circ + 15^\circ = -705^\circ$.

取 $k = -1$ 时, $-1 \cdot 360^\circ + 15^\circ = -345^\circ$.

取 $k = 0$ 时, $0 \cdot 360^\circ + 15^\circ = 15^\circ$,

即元素 $-1065^\circ, -705^\circ, -345^\circ, 15^\circ$ 为所求.

变式提升 2

如果角 α 与 $x + 45^\circ$ 具有同一条终边, 角 β 与 $x - 45^\circ$ 具有同一条终边, 那么 α 与 β 间的关系是 ()

- A. $\alpha + \beta = 0$
B. $\alpha - \beta = 0$
C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
D. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$

解析: $\because \alpha = x + 45^\circ + k_1 \cdot 360^\circ, \beta = x - 45^\circ + k_2 \cdot 360^\circ, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \alpha - \beta = 90^\circ + (k_1 - k_2) \cdot 360^\circ$, 即 $\alpha - \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

答案: D

类题演练 3

求终边为直线 $y = -x$ 的角的集合.

思路分析: 终边共线且反向的角的写法有二: 一是分别写出每条终边所代表的角的集合, 再取交集; 二是在其中一条终边上找出一个角, 然后再加上 180° 的整数倍.

解法一: 由于 $y = -x$ 的图象是第二、四象限的平分线, 故在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间所对应的两个角分别为 135° 及 315° , 从而角 α 的集合为 $S = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 135^\circ \text{ 或 } \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,

$\therefore S = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

解法二: 因为终边为 $y = -x$, 当 $x < 0$ 时的一个角为 135° , 所以角 α 的集合为 $S = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

变式提升 3

若 α 是第二象限的角, 则 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}$ 各是第几象限的角?

写出它们的一般表达式.

思路分析: 对象限角进行和、差、倍、分运算, 要注意运用不等式的性质, 结果是哪个象限的角, 要进行讨论.

解: $\because \alpha$ 是第二象限角,

$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore 2\alpha$ 是第三或第四象限角或 2α 的终边与 y 轴的负半轴重合.

又 $\because k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

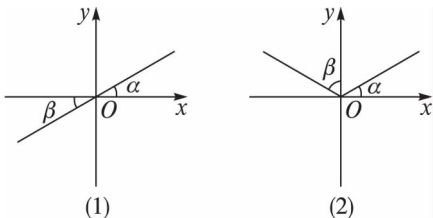


$0^\circ < \alpha < 90^\circ$;第二步,加上 360° 的整数倍,即加上 $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$. 其他各象限角的集合,可仿此步骤写出.

【例4】已知角 α, β 的终边有下列关系,分别求 α, β 间的关系式:

- (1) α, β 的终边关于原点对称;
- (2) α, β 的终边关于 y 轴对称.

思路分析:如图.



仔细观察坐标系中 α, β 的终边位置的关系,适当地变换其中一个角,使两角终边共线,以使用数量关系表示出.

解:(1)由于 α, β 的终边互为反向延长线,故 α, β 相差 180° 的奇数倍[如图(1)].

于是 $\alpha - \beta = (2k-1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

(2)在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间,设 α 的终边所表示的角为 $90^\circ - \theta$,由于 α, β 关于 y 轴对称[如图(2)],则 β 的终边所表示的角为 $90^\circ + \theta$.

于是 $\alpha = 90^\circ - \theta + k_1 \cdot 360^\circ (k_1 \in \mathbf{Z})$,

$\beta = 90^\circ + \theta + k_2 \cdot 360^\circ (k_2 \in \mathbf{Z})$,

两式相加得 $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

温馨提示

(1)角 α, β 的终边关于直线 $y=x$ 对称,则 α, β 之间满足关系 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

(2)角 α, β 的终边关于直线 $y=-x$ 对称,则 α, β 之间满足关系 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

当 $k=2m (m \in \mathbf{Z}), m \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360^\circ +$

90° 时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;

当 $k=2m+1 (m \in \mathbf{Z}), m \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot$

$360^\circ + 270^\circ$ 时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

综上,可知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

类题演练4

若角 α 与 65° 角的终边相同,角 β 与 -115° 角的终边相同,那么 α 与 β 之间的关系是 ()

A. $\alpha + \beta = -50^\circ$

B. $\alpha - \beta = 180^\circ$

C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$

解析: $\because \{\alpha \mid \alpha = k_1 \cdot 360^\circ + 65^\circ, k_1 \in \mathbf{Z}\}; \{\beta \mid \beta = k_2 \cdot 360^\circ - 115^\circ, k_2 \in \mathbf{Z}\}$,

$\therefore \alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$.

答案:D

变式提升4

若角 α 是第二象限的角,求角 2α 的集合 A . 记 $B = \{\text{第一、三象限的角}\}$,举例说明 $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$.

思路分析:用集合表示角,特别是求角的交、并以及集合间的关系时,要注意分类讨论思想的运用.

解: $\because 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore A = \{2\alpha \mid 180^\circ + 2k \cdot 360^\circ < 2\alpha < 360^\circ + 2k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

$\therefore 270^\circ \in A, 270^\circ \notin B$.

$\therefore A \not\subseteq B$.

$\because 1^\circ \in B, 1^\circ \notin A$,

$\therefore B \not\subseteq A$.

温馨提示

要证明 $A \not\subseteq B$,只需举一特殊值即可,但要证明 $A \subseteq B$ 时,必须验证集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素.



课后导练



基础达标

- 1 下列命题中正确的是 ()

- A. 第一象限的角必是锐角
B. 终边相同的角必相等
C. 相等的角终边位置相同
D. 不相等的角终边位置必不相同

解析:根据各种角的定义,利用排除法或特殊角代入法验证.

答案:C

- 2 与
- 120°
- 角终边相同的角是 ()

- A. $-600^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$
B. $-120^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$
C. $120^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$
D. $660^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$

解析:根据终边相同的定义进行判断.

答案:A

- 3 已知角
- α, β
- 终边相同,那么
- $\alpha - \beta$
- 的终边在 ()

- A. x 轴的负半轴上
B. y 轴的负半轴上
C. x 轴的非负半轴上
D. y 轴的非负半轴上

解析: $\because$ 角 α, β 终边相同, $\therefore \alpha = k \cdot 360^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$.

$$\therefore \alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + \beta - \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

$\therefore \alpha - \beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上,选 C.

答案:C

- 4 若
- α
- 是第四象限角,则
- $\pi - \alpha$
- 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

注: $180^\circ = \pi$ 弧度,其意义见下节.

解法一: $\because \alpha$ 为第四象限角,

$$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \pi - 2k\pi < \pi - \alpha < -2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$\therefore \pi - \alpha$ 是第三象限角. 选 C.

解法二: $\because$ 角 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称,又角 α 的终边在第四象限,

$\therefore$ 角 $-\alpha$ 的终边在第一象限.

又 $-\alpha$ 与 $\pi - \alpha$ 关于原点对称,

$\therefore$ 角 $\pi - \alpha$ 的终边在第三象限. 故选 C.

答案:C

- 5 若角
- α, β
- 的终边互为反向延长线,则
- α
- 与
- β
- 的关系一

定是 ()

- A. $\alpha = -\beta$
B. $\alpha = -2 \cdot 360^\circ + \beta$
C. $\alpha = 180^\circ + \beta$
D. $\alpha = (2k+1)180^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$

解析:根据角的有关概念进行判断.

答案:D

- 6 终边在直线
- $y = -\sqrt{3}x$
- 上的所有角的集合是 _____,上述集合中介于
- -180°
- 到
- 180°
- 之间的角是 _____.

解析:终边在 $y = -\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 300^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 120^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$,当 $n = -1, 0$ 时,取得介于 -180° 到 180° 之间角为 $120^\circ, -60^\circ$.

答案: $\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 120^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \quad -60^\circ, 120^\circ$

- 7 已知数集
- $A = \{x | x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, C = \{x | x = \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, D = \{x | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ,则 A、B、C、D 四个数集之间的关系是 _____.

解析:对于 B 中元素 $x = 2k\pi$,令 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$,得 $x = 2k\pi = 4n\pi (n \in \mathbb{Z})$,显然 $A \subseteq B$,同理, $B \subseteq D, D \subseteq C$.

综合得 $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C$.

答案: $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C$

- 8 已知角
- 2α
- 的终边在
- x
- 轴的上方(不与
- x
- 轴重合),求
- α
- 终边所在象限.

解:根据题意知 $k \cdot 360^\circ < 2\alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

$$\therefore k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

当 $k = 2n$ 时, $n \cdot 360^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}$,

$\therefore \alpha$ 是第一象限角;

当 $k = 2n+1$ 时, $n \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ +$

$270^\circ, n \in \mathbb{Z}, \therefore \alpha$ 是第三象限角.

综上,可知 α 为第一、第三象限角.



综合运用

- 9 2005 全国高考卷 III,理 1 文 1 已知
- α
- 为第三象限的

角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()

- A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第一或第三象限 D. 第二或第四象限

解析: $\because \alpha$ 为第三象限的角, $\therefore 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$.

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$



当 $k=2n(n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 在第二象限;

当 $k=2n+1(n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \frac{3\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{7\pi}{4}$, 在第四象限.

答案:D

- 10 已知角 β 的终边在右图中阴影所表示的范围内, 那么 $\beta \in$ _____.

解析: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 终边落在阴影内的角为

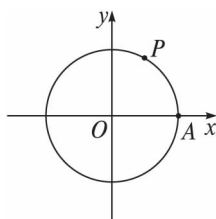
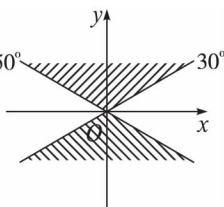
$30^\circ < \alpha < 150^\circ$ 与 $210^\circ < \alpha <$

330° , 于是所有满足题意的角 α 为

$\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | k \cdot 360^\circ + 210^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 330^\circ, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | 2k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < 2k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | (2k+1) \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < (2k+1) \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | n \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < n \cdot 180^\circ + 150^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$

答案: $\{\alpha | n \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < n \cdot 180^\circ + 150^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$

- 11 如图, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 点 P 从点 $A(1, 0)$ 出发, 依逆时针方向等速沿单位圆周旋转. 已知 P 在 1 s 内转过的角度为 $\theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$,



经过 2 s 到达第三象限, 经过 14 s 后又恰好回到出发点 A , 求 θ .

解: $\because 0^\circ < \theta < 180^\circ$, 且 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\theta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore$ 必有 $k=0$, 于是 $90^\circ < \theta < 135^\circ$.

又 $\because 14\theta = n \cdot 360^\circ (n \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \theta = \frac{n \cdot 180^\circ}{7}$.

从而 $90^\circ < \frac{n \cdot 180^\circ}{7} < 135^\circ$, $\frac{7}{2} < n < \frac{189}{36} \approx 5.25$.

$\therefore n=4$ 或 5 . 故 $\theta = \frac{720^\circ}{7}$ 或 $\theta = \frac{900^\circ}{7}$.



拓展探究

- 12 今天是星期三, 那么 $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几? 100 天后的那一天是星期几?

解: 每星期, 从星期一直到星期日, 每星期 7 天, 呈现周期性变化, 每 7 天都要重复出现.

$\because$ 今天是星期三,

$\therefore 7k(k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天仍是星期三,

$7k(k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天仍是星期三.

$\because 100 = 7 \times 14 + 2$,

又 $\because$ 今天是星期三,

$\therefore 100$ 天后的那一天是星期五.

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算



课前导引



情景导入

北京到上海有多远? 我们回答约 1 463 公里, 但也有人回答约 914 英里, 请问哪一种回答是正确的? 显然, 两种回答都是正确的, 但为什么会有不同的数值呢? 那是因为所采用的度量制不同. 它们的长度单位是不同的, 但是, 它们之间可以换算: 1 英里 = 1.6 公里. 在角度的度量里面, 是否也有类似的情况呢?

提示: 度量角也有两种方法, 角度制和弧度制, 它们的换算关系为

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度, 1 弧度 $= (\frac{180}{\pi})^\circ$, 以“弧度”为单位度

量角, 更容易建立起角与实数之间的一一对应关系.



知识预览

1. 周角的 $\frac{1}{360}$ 为一度的角. 用度作单位来度量角的单位制叫角度制.

2. 长度等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 用弧度作单位来度量角的单位制叫弧度制. 弧度用符号 rad 表示.

3. 正角的弧度数是一个正数. 负角的弧度数是一个



负数. 零角的弧度数是0. 如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 那么, 角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$. 比值 $\frac{l}{r}$ 与所取圆的半径大小无关, 而仅与角的大小有关.

$$4. 180^\circ = \pi \text{ rad}, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 18'.$$



三点剖析

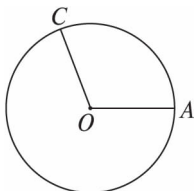
●●●●



各个击破

一、弧度制的定义

【例1】如图所示, 圆心角 $\angle AOC$ 所对的弧 $\widehat{AC}$ 的长 l 分别为 $r, 2r, 2\pi r, 4\pi r$, 如果圆心角表示正角, 它的弧度数分别是多少? 如果圆心角表示负角, 它的弧度数又分别是多少?



思路分析: 从圆心角与弧度的关系出发, 结合正角、负角的概念, 分别求出各角的弧度数. 当圆心角 $\angle AOC$ 表示正角时, 弧长 l 为 $r, 2r, 2\pi r, 4\pi r$ 的圆心角 $\angle AOC$ 的弧度数分别是 $1, 2, 2\pi, 4\pi$.

当圆心角 $\angle AOC$ 表示负角时, 弧长 l 为 $r, 2r, 2\pi r, 4\pi r$ 的圆心角 $\angle AOC$ 的弧度数分别是 $-1, -2, -2\pi, -4\pi$.

温馨提示

(1) 角的大小与圆的半径长短无关, 仅与弧长与半径的比值有关;

(2) 一般地, 正角的弧度数是一个正数, 负角的弧度数是一个负数, 零角的弧度数是零.

二、角度与弧度之间的互化

(1) 将角度化成弧度:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}; 180^\circ = \pi \text{ rad};$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

(2) 将弧度化成角度:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ; \pi \text{ rad} = 180^\circ;$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

(3) 弧度制和角度制的互化是本节的重点, 也是难点. 互化的实质是一种比例关系: $\frac{\pi}{180^\circ} =$

类题演练1

下列诸命题中, 真命题是..... ()

- A. 一弧度是一度的圆心角所对的弧
- B. 一弧度是长度为半径的弧
- C. 一弧度是一度的弧与一度的角之和
- D. 一弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角, 它是角的一种度量单位

解析: 本题考查弧度制下, 角的度量单位: 1 弧度的概念.

根据一弧度的定义: 我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做一弧度的角. 对照各选项, 可知 D 为真命题.

答案: D

变式提升1

下列四个命题中, 不正确的是..... ()

- A. 半圆所对的圆心角是 $\pi \text{ rad}$
- B. 周角的大小等于 2π
- C. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于该圆的半径
- D. 长度等于半径的弦所对的圆心角的大小是 1 弧度

解析: 本题考查弧度制下, 角的度量单位: 1 弧度的概念.

根据一弧度的定义: 我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做一弧度的角. 对照各选项, 可知 D 不正确.

答案: D

类题演练2

(1) 将 $112^\circ 30'$ 化为弧度;

(2) 将 $-\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ 化为度.

解: (1) $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$

$$\therefore 112^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \times 112.5 \text{ rad} = \frac{5\pi}{8} \text{ rad}.$$

$$(2) \because 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ,$$

$$\therefore -\frac{5\pi}{12} \text{ rad} = -\left(\frac{5\pi}{12} \text{ rad} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -75^\circ.$$



这个角的弧度数,将要求的部分解出,再添上相应的单位即可.

需记住特殊角的弧度数.(见教材,本书略)

【例2】 -300° 化为弧度是..... ()

- A. $-\frac{4\pi}{3}$ B. $-\frac{5\pi}{3}$
C. $-\frac{7\pi}{4}$ D. $-\frac{7}{6}\pi$

思路分析:依据 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度进行转换.

解析: $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \therefore -300^\circ = -\frac{5\pi}{3} \text{ rad}.$

$\therefore$ 应选 B.

答案: B

【例3】设角 $\alpha_1 = -570^\circ, \alpha_2 = 750^\circ, \beta_1 = \frac{3\pi}{5}, \beta_2 = -\frac{7\pi}{3}$.

(1) 将 α_1, α_2 用弧度制表示出来,并指出它们各自所在的象限;

(2) 将 β_1, β_2 用角度制表示出来,并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出它们有相同终边的所有角.

思路分析:运用弧度与角度的互化公式,用待定系数法去找一个 k, α_1, α_2 化为 $2k\pi + \alpha$ 的形式,而 β_1, β_2 化为 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ 的形式 ($k \in \mathbf{Z}$).

解: (1) $\because 180^\circ = \pi \text{ rad},$

$$\therefore -570^\circ = -570 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{19\pi}{6}.$$

$$\therefore \alpha_1 = -\frac{19\pi}{6} = -2 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{同理, } \alpha_2 = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}.$$

$\therefore \alpha_1$ 在第二象限, α_2 在第一象限.

$$(2) \because \beta_1 = \frac{3\pi}{5} = (\frac{3\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi}) = 108^\circ,$$

$$\text{设 } \theta = k \cdot 360^\circ + \beta_1 (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{由 } -720^\circ \leq \theta < 0^\circ,$$

$$\therefore -720^\circ \leq k \cdot 360^\circ + 108^\circ < 0^\circ.$$

$$\therefore k = -2 \text{ 或 } k = -1.$$

$\therefore$ 在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 间与 β_1 有相同终边的角是 -612° 和 -252° .

同理, $\beta_2 = -360^\circ - 60^\circ = -420^\circ$, 且在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 间与 β_2 有相同的终边的角是 -420° 和 -60° .

温馨提示

弧度与角度互化,要牢记 $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

变式提升 2

时钟经过一小时,时针转过了..... ()

- A. $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ B. $-\frac{\pi}{6} \text{ rad}$
C. $-\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ D. $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$

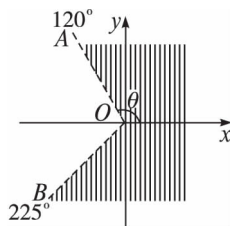
解析: 由于时钟经过 12 小时转了 $-2\pi \text{ rad}$,

所以时钟经过 1 小时转了 $-\frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

答案: B

类题演练 3

用弧度制表示顶点在原点,始边重合于 x 轴的非负半轴,终边落在阴影部分的角的集合.(如图所示)



解: 先找准两个边界所对应的在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内的角. 边界在第二象限对应的角为 120° , 边界在第三象限对应的角是 225° .

如上图所示,以 OB 为终边的角 225° 可看成 -135° ,化为弧度 $-\frac{3\pi}{4}$. 而 $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$.

$\therefore$ 终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\theta | 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < \theta < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}.$

温馨提示

(1) 回答问题要弄清角的大小,防止出现矛盾不等式而造成混乱.

(2) 在表示角的集合时,一定要使用统一单位(统一制度).

变式提升 3

若集合 $A = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{\alpha | -\pi < \alpha < \pi\}$, 求 $A \cap B$.

解: 由交集定义,知 $-\pi < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5} < \pi$, 即 $-1 < \frac{k}{2} - \frac{1}{5} < 1$,

$$\therefore -\frac{8}{5} < k < \frac{12}{5}.$$

由 $k \in \mathbf{Z}$, 知 $k = -1, 0, 1, 2$.

当 $k = -1, 0, 1, 2$ 时, $\alpha = -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}$, 故



三、弧长公式和扇形面积公式

在弧度制下,弧长公式和扇形的面积公式分别为

$$l = \alpha \cdot r; S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2.$$

在角度制下,弧长公式和扇形的面积公式分别为

$$l = \frac{n\pi r}{180}; S = \frac{n\pi r^2}{360}.$$

【例4】解答下列各题:

- (1) 求半径为 2, 圆心角为 $\frac{5\pi}{3}$ 的圆弧的长度.
- (2) 在半径为 6 的圆中, 求长度为 6 的弦和它所对的劣弧围成的弓形面积.
- (3) 如图(1), 在半径为 10, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形铁皮 ADE 上, 截去一个半径为 4 的小扇形 ABC, 求留下部分环形的面积.

思路分析: 引进弧度制后, 简化了初中所学的弧长和扇形面积的计算公式. 在弧长(l)、扇形面积(S)、圆心角度数(α)和圆半径(R)这四个量的有关计算中, 应明确“知其二, 得其二”.

解: (1) $\because$ 半径 $R = 2$, 圆

$$\text{心角 } \alpha = \frac{5\pi}{3},$$

$$\therefore \text{弧长 } l = \alpha \cdot R =$$

$$\frac{10\pi}{3}.$$

(2) 如图(2)所示.

$$\because AB = 6, OA =$$

$$OB = 6,$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{\pi}{3}.$$

$\therefore$ 扇形 AOB 的面积

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} l \cdot R$$

$$= \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 6^2$$

$$= 6\pi.$$

又 $\because \triangle AOB$ 是等边三角形,

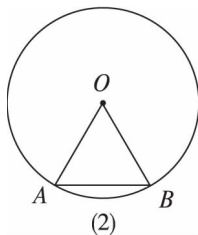
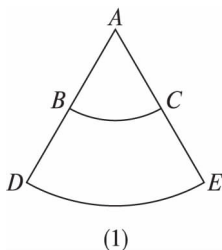
$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{弓形面积 } S = 6\pi - 9\sqrt{3}.$$

$$(3) \because \text{圆心角 } \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore S_{\text{扇形ADE}} = \frac{1}{2} \alpha \cdot AD^2 = \frac{50\pi}{3}, S_{\text{扇形ABC}} = \frac{1}{2} \alpha \cdot$$

$$AB^2 = \frac{8\pi}{3}.$$



$$A \cap B = \left\{ -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5} \right\}.$$

类题演练4

已知扇形 OAB 的圆心角 α 为 120° , 半径为 6, 求扇形弧长及所含弓形的面积.

思路分析: 正确运用弧度制与角度制换算公式及弧长面积公式, 先把 120° 化为弧度, 再用公式 $l = |\alpha| r$ 求弧长; 用公式 $S = \frac{1}{2} l r$ 求扇形面积; 用公式 $S = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$, 求三角形的面积, 从而得出弓形的面积.

$$\text{解: } \because 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}, r = 6, \therefore l = |\alpha| r = \frac{2\pi}{3} \times$$

$$6 = 4\pi. \text{ 又 } \because S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 6 = 12\pi, S_{\triangle AOB} =$$

$$\frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle AOB} = 12\pi - 9\sqrt{3}.$$

温馨提示

弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$ 以及扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} l r$ 都是弧度制下的公式. 因此, 运用时必须把角度化成弧度.

变式提升 4

已知一扇形的中心角是 α , 其所在圆的半径是 R .

(1) 若 $\alpha = 60^\circ, R = 10$ cm, 求扇形的弧长及该弧所在的弓形面积;

(2) 若扇形的周长是一定值 $C (C > 0)$, 当 α 为多少弧度时, 该扇形有最大面积?

解: (1) 设弧长为 l , 弓形面积为 $S_{\text{弓形}}$.

$$\because \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}, R = 10 \text{ cm}, \therefore l = |\alpha| R = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}.$$

$$\therefore S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle} = \frac{1}{2} l R - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \times \frac{10\pi}{3} \times$$

$$10 - \frac{1}{2} \times 10^2 \sin 60^\circ = 50 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2.$$

$$(2) \because \text{扇形周长 } C = 2R + l = 2R + |\alpha| R,$$

$$\therefore R = \frac{C}{2 + \alpha}.$$

$$\therefore S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} \alpha R^2 = \frac{1}{2} \alpha \cdot \left(\frac{C}{2 + \alpha} \right)^2$$

$$= \frac{C^2}{2} \alpha \cdot \frac{1}{4 + 4\alpha + \alpha^2} = \frac{C^2}{2} \cdot \frac{1}{4 + \alpha + \frac{4}{\alpha}}$$

$$\leq \frac{C^2}{2} \cdot \frac{1}{4 + 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{4}{\alpha}}} = \frac{C^2}{16},$$

当且仅当 $\alpha = \frac{4}{\alpha}$, 即 $\alpha = 2$ ($\alpha = -2$ 舍去) 时, 扇形



$$\therefore \text{环形 } BCED \text{ 的面积为 } S = \frac{50\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{42\pi}{3} =$$

14 π .

面积最大,最大面积是 $\frac{C^2}{16}$.

温馨提示

用弧度制表示的弧长和扇形面积公式 $l = |\alpha| \cdot r$ 和 $S = \frac{1}{2} l \cdot r$, 比角度制的求弧长和面积公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ 和 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ 更简单, 在实际中的应用也更广泛.



课后导练



基础达标

- 1 下列命题中的假命题是 ()

- A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
B. 一度的角是圆周的 $\frac{1}{360}$, 一弧度的角是圆周的 $\frac{1}{2\pi}$
C. 根据弧度的定义, 180° 一定等于 π 弧度
D. 不论是用角度制还是弧度制度量角, 它们均与圆的半径长短有关

解析: 根据角度与弧度的定义, 可知无论是角度制还是弧度制, 角的大小与圆的半径长短无关, 而是与弧长和半径的比值有关, 应选 D.

答案: D

- 2 下列各对角中, 终边相同的是 ()

- A. $\frac{3\pi}{2}$ 和 $2k\pi - \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$
B. $-\frac{\pi}{5}$ 和 $\frac{22\pi}{5}$
C. $-\frac{7\pi}{9}$ 和 $\frac{11\pi}{9}$
D. $\frac{20\pi}{3}$ 和 $\frac{122\pi}{9}$

解析: $\frac{11\pi}{9} = 2\pi - \frac{7\pi}{9}$.

答案: C

- 3 已知两弧度的圆心角所对的弦长为 2, 那么这个圆心角所对的弧长是 ()

- A. 2 B. $\sin 2$ C. $\frac{2}{\sin 1}$ D. $2\sin 1$

解析: $\because \sin 1 = \frac{1}{R}, \therefore R = \frac{1}{\sin 1}$.

又 $\because l = |\alpha| \cdot R, \alpha \in \mathbb{R}, \therefore l = 2 \cdot \frac{1}{\sin 1} = \frac{2}{\sin 1}$.

答案: C

- 4 扇形圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 半径长为 a , 则扇形内切圆的面积与扇形面积之比是 ()

- A. 1 : 3 B. 2 : 3 C. 4 : 3 D. 4 : 9

解析: $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} lR = \frac{\pi}{6} a^2$.

设内切圆的半径为 r , 则 $r = \frac{a}{3}$.

$\therefore S_{\text{圆}} = \frac{\pi a^2}{9}, \therefore \frac{S_{\text{圆}}}{S_{\text{扇形}}} = \frac{2}{3}$. 故选 B.

答案: B

- 5 集合 $A = \{\alpha | \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha | \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 的关系是 ()

- A. $A = B$ B. $A \subseteq B$
C. $B \subseteq A$ D. 以上都不对

解析: 集合 A 中 $k \in \mathbb{Z}$, 分为奇数和偶数表示, 即 $A = \{\alpha | \alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} = B$. 故选 A.

答案: A

- 6 扇形周长为 6, 面积为 2, 则其圆心角的弧度数是 ()

- A. 1 或 4 B. 1 或 2
C. 2 或 4 D. 1 或 5

解析: 设此扇形的半径为 r , 圆心角的弧度数是 $\alpha (0 <$

$$\alpha < 2\pi), \text{ 则有 } \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2 = 2, & \text{①} \\ 2r + \alpha \cdot r = 6. & \text{②} \end{cases}$$

解之, 得 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 4$.

答案: A

- 7 设 $0 \leq \alpha < 2\pi$, 将 -1485° 表示成 $2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$ 的形式是

解析: $-1485^\circ = -5 \times 360^\circ + 315^\circ = -10\pi + \frac{7\pi}{4}$.



答案: $-10\pi + \frac{7\pi}{4}$

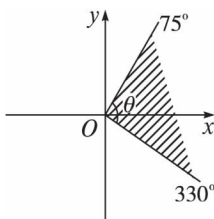
- 8 如图,阴影部分用弧度制可表示为_____.

解析: 330° 可看成 -30° , 即 $-\frac{\pi}{6}$, 而 $75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$,

$$\therefore \{\theta | 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi +$$

$$\frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

答案: $\{\theta | 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\}$



综合运用

- 9 点 P 从 $(1,0)$ 出发,沿单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 按逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点,则 Q 的坐标为 ... ()

A. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ D. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

解析:由弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$, $l = \frac{2\pi}{3}$, $r = 1$, 得 P 点按逆时针方向转过的角度为 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 可确定直线 OP 的方程为 $y = -\sqrt{3}x (x < 0)$, 与圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ 联立可得 $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

答案:A

- 10 若一段圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长,则其圆心角的弧度数为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\sqrt{3}$ D. 2

解析:设正三角形 ABC 是半径为 r 的圆 O 的内接三角形.

$$\because AB = \sqrt{3}r, \therefore \text{弧长 } l = \sqrt{3}r.$$

$$\therefore \alpha = \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{3}r}{r} = \sqrt{3}. \text{ 故选 C.}$$

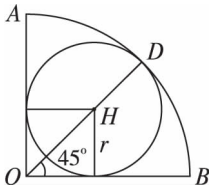
答案:C

- 11 在扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $\widehat{AB} = l$, 求此扇形的内切圆的面积.

解:如图, $\angle AOB = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

设扇形 AOB 的半径为 R ,

其内切圆半径为 r , 由弧长公式有 $l = \frac{\pi}{2}R$,



$$\text{所以 } R = \frac{2l}{\pi}.$$

①

$$\text{又因为 } OD = R, HD = r, OH = \sqrt{2}r,$$

$$\text{所以 } OD = OH + HD = (1 + \sqrt{2})r.$$

$$\text{所以 } r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)R.$$

②

$$\text{把①代入②,得 } r = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{2l}{\pi} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)l}{\pi}.$$

$$\text{所以内切圆的面积 } S = \pi r^2 = \pi \left[\frac{2(\sqrt{2} - 1)l}{\pi} \right]^2 =$$

$$\frac{(12 - 8\sqrt{2})l^2}{\pi}.$$

- 12 设半径为 12 cm, 长为 8π cm 的弧所对圆心角为 α , $\alpha \in (0, 2\pi)$, 求出与角 α 终边相同的角的集合 A , 并判断 A 是否为 $B = \{\theta | \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ 的真子集.

解:由 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 得 $\alpha = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$, $\therefore$ 与 α 终边相同的

角的集合 $A = \{\alpha | \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. 在 $B = \{\theta | \theta =$

$\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ 中, 令 $k = 4m + 1, m \in \mathbf{Z}$, 则 $\theta = \frac{\pi}{6} +$

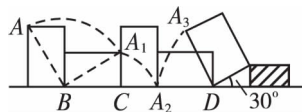
$\frac{\pi}{2} + 2m\pi = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi, m \in \mathbf{Z}$, $\therefore A \subseteq B$. 又 $\because \frac{\pi}{6} \in B$, 而

$\frac{\pi}{6} \notin A$, $\therefore A \subsetneq B$, 即 A 为 B 的真子集.



拓展探究

- 13 如图, 已知一长为 $\sqrt{3}$ cm, 宽为 1 cm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第三面时, 被一小木板挡住, 使木块底面与桌面成 30° 的角. 求点 A 走过的路程及走过的弧所在的三个扇形的面积的和.



解: $\widehat{AA_1}$ 所对的圆半径是 2, 圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, $\widehat{A_1A_2}$ 所对的

半径是 1, 圆心角是 $\frac{\pi}{2}$, $\widehat{A_2A_3}$ 所对的圆半径为 $\sqrt{3}$, 圆

心角为 $\frac{\pi}{3}$. 所以 A 点走过的路程是 3 段圆弧之和, 即

$$2 \times \frac{\pi}{2} + 1 \times \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{6} \pi \text{ cm.}$$

3 段弧所在

$$\text{的扇形总面积是 } \frac{1}{2} \times 2 \times \pi + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}\pi}{3} =$$

$$\frac{7\pi}{4} \text{ cm}^2.$$



1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义



情景导入

中央电视塔多高?为了测量中央电视塔的高度,假设在距离电视塔 233.9 米的地方测得中央电视塔的避雷针顶端的仰角为 60° ,你能推测出电视塔的高度吗?

提示:要回答此问题实质只要用初中学过的锐角三角函数即可.

图形	定义	定义域	函数值的符号
	$\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\tan A = \frac{a}{b}$	$A \in (0, \frac{\pi}{2})$	$\because a > 0, b > 0, c > 0,$ $\therefore \frac{a}{c} > 0, \frac{b}{c} > 0, \frac{a}{b} > 0$

从此表可以看到锐角三角函数的定义、定义域及函数值的符号.

所以根据定义可知中央电视塔的高度为 $233.9 \times \tan 60^\circ \approx 405$ 米.



知识预览

1. 设 α 是一个任意角, α 的终边上一点 P (除端点外) 的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 $r (r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 那么 $\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦, 记作 $\sin \alpha$, 即 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$;

$\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦, 记作 $\cos \alpha$, 即 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;

$\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$;

$\frac{x}{y}$ 叫做角 α 的余切, 记作 $\cot \alpha$, 即 $\cot \alpha = \frac{x}{y}$;

$\frac{r}{x}$ 叫做角 α 的正割, 记作 $\sec \alpha$, 即 $\sec \alpha = \frac{r}{x}$;

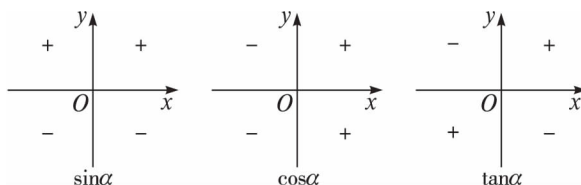
$\frac{r}{y}$ 叫做角 α 的余割, 记作 $\csc \alpha$, 即 $\csc \alpha = \frac{r}{y}$.

这些函数都是以角 α 为自变量, 以比值函数值, 我们将它们统称为三角函数.

2. 六个三角函数的定义域:

三角函数	定义域
$\sin \alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos \alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan \alpha$	$\{\alpha \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\cot \alpha$	$\{\alpha \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\sec \alpha$	$\{\alpha \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
$\csc \alpha$	$\{\alpha \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

3. 三角函数在各象限的符号:



4. 终边相同的角的三角函数值的关系.

公式一: $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$,

$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$,

$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.



课堂导学



三点剖析



各个击破

一、任意角的三角函数的定义

注意:(1)任意角的三角函数是在坐标系中定义的,角的范围(自变量取值)是全体实数.

(2)一个任意角 α 的三角函数值只依赖于 α 的大小(即只与这个角的终边位置有关),而与 P 点在终边上的位置无关.

(3)正弦、余弦、正切、余切、正割、余割都是以角为自变量,以比值为函数值的函数.

(4) $\sin\alpha$ 不是 $\sin$ 与 α 的乘积,而是一个比值;三角函数记号是一个整体,离开自变量的“ $\sin$ ”“ $\tan$ ”等是没有意义的.

每个词的第一个字母“s”或“c”或“t”都不能大写.

【例1】已知角 α 的终边经过点 $P(3a, -4a) (a \neq 0)$, 求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \sec\alpha, \csc\alpha, \cot\alpha$ 的值.

思路分析:在由三角函数的定义求三角函数时,应先确定 α 终边位置.由于含有参数 a ,而 a 的条件为 $a \neq 0$,所以必须对 a 进行讨论,这一点不可忽视.

解: $\because x=3a, y=-4a$,

$$\therefore r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = 5|a| (a \neq 0).$$

(1)当 $a > 0$ 时, $r=5a, \alpha$ 是第四象限角.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5},$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}, \cot\alpha = -\frac{3}{4},$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{5a}{3a} = \frac{5}{3}, \csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{5a}{-4a} = -\frac{5}{4}.$$

(2)当 $a < 0$ 时, $r=-5a, \alpha$ 是第二象限角.

$$\text{于是 } \sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = -\frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3},$$

$$\cot\alpha = -\frac{3}{4}, \sec\alpha = -\frac{5}{3}, \csc\alpha = \frac{5}{4}.$$

温馨提示

(1)当角 α 的终边上点的坐标以参数形式给出时,要根据问题的实际及解题的需要对参数进行分类讨论.

(2)求任意角的三角函数,有时需要确定角所在的象限,相应地以此来确定三角函数的符号,这是容易出现错误的地方.

类题演练1

已知角 α 的终边经过 $P(-2, -3)$, 求角 α 的正弦、余弦、正切值.

解: $\because x=-2, y=-3, r=\sqrt{13}$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

变式提升1

已知角 α 的终边在直线 $y=-3x$ 上, 则 $10\sin\alpha + 3\sec\alpha =$

思路分析:由角 α 的终边落在直线 $y=-3x$ 上,所以可设其终边上一点为 $P(k, -3k) (k \neq 0)$,再分 $k > 0$ 与 $k < 0$ 求解.

解:设角 α 终边上任一点为 $P(k, -3k) (k \neq 0)$, 则 $x=k, y=-3k, r=\sqrt{k^2 + (-3k)^2} = \sqrt{10}|k|$.

(1)当 $k > 0$ 时, $r=\sqrt{10}k, \alpha$ 是第四象限角,

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3k}{\sqrt{10}k} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{10}k}{k} = \sqrt{10},$$

$$\therefore 10\sin\alpha + 3\sec\alpha = 10 \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) + 3\sqrt{10} = -3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 0.$$

(2)当 $k < 0$ 时, $r=-\sqrt{10}k, \alpha$ 为第二象限角,

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3k}{-\sqrt{10}k} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{-\sqrt{10}k}{k} = -\sqrt{10},$$

$$\therefore 10\sin\alpha + 3\sec\alpha = 10 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} + 3 \times (-\sqrt{10}) =$$

$$3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 0.$$

综合以上两种情况均有 $10\sin\alpha + 3\sec\alpha = 0$.

答案:0

温馨提示

要清楚当 $k > 0$ 时, $P(k, -3k)$ 是第四象限内的点,角 α 的终边在第四象限;当 $k < 0$ 时, $P(k, -3k)$ 是第二象限内的点,角 α 的终边在第二象限,这与角 α 的终边在 $y=-3x$ 上是一致的.



二、三角函数的定义域

【例2】求下列函数的定义域:

(1) $y = \sin x + \cos x$;

(2) $y = \sqrt{\sin x} + \tan x$.

解:(1) $\because$ 使 $\sin x, \cos x$ 有意义的 $x \in \mathbf{R}$,

$\therefore y = \sin x + \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 当 $\sin x \geq 0$ 且 $\tan x$ 有意义时,函数有意义,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbf{Z}).$$

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt{\sin x} + \tan x$ 的定义域为 $[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cup (2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

三、三角函数值的符号

【例3】确定下列式子的符号:

(1) $\tan 125^\circ \cdot \sin 273^\circ$;

(2) $\frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ}$;

(3) $\sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \tan \frac{11\pi}{6}$;

(4) $\frac{\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \tan \frac{11\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$;

(5) $\tan 191^\circ - \cos 191^\circ$;

(6) $\sin 3 \cdot \cos 4 \cdot \tan 5 \cdot \cot 6$.

解:(1) $\because 125^\circ$ 是第二象限角, $\therefore \tan 125^\circ < 0$;

$\because 273^\circ$ 是第四象限角, $\therefore \sin 273^\circ < 0$.

从而 $\tan 125^\circ \sin 273^\circ > 0$.

$\therefore$ 式子符号为正.

(2) $\because 108^\circ$ 是第二象限角, $\therefore \tan 108^\circ < 0$.

$\because 305^\circ$ 是第四象限角, $\therefore \cos 305^\circ > 0$.

从而 $\frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ} < 0$,

$\therefore$ 式子符号为负.

(3) $\because \frac{5\pi}{4}$ 是第三象限角, $\frac{4\pi}{5}$ 是第二象限角, $\frac{11\pi}{6}$

是第四象限角.

$\therefore \sin \frac{5\pi}{4} < 0, \cos \frac{4\pi}{5} < 0, \tan \frac{11\pi}{6} < 0$, 从而

$$\sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \tan \frac{11\pi}{6} < 0.$$

类题演练2

求函数 $y = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ 的定义域.

思路分析: $\because y = \tan x$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$,

$\therefore$ 本题中将 $x - \frac{\pi}{4}$ 看作一个角即可解得 x 的取值范围.

解: 设 $\theta = x - \frac{\pi}{4}$, 在 $y = \tan x$ 中, $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

$$\therefore x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \therefore x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore$ 定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$.

变式提升2

x 取什么值时, $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$ 有意义?

$$\text{解: 由题意得} \begin{cases} \tan x \neq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 即 } x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

所以当 $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ 时, $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$ 有意义.

类题演练3

判定下列各式的符号:

(1) $\sin 105^\circ \cdot \cos 230^\circ$;

(2) $\sin \frac{7\pi}{8} \cdot \tan \frac{7\pi}{8}$;

(3) $\cos 6 \cdot \tan 6$;

(4) $\sin 4 \cdot \tan(-\frac{23\pi}{4})$.

解:(1) $\because 105^\circ, 230^\circ$ 分别为第二、第三象限角,

$\therefore \sin 105^\circ > 0, \cos 230^\circ < 0$.

$\therefore \sin 105^\circ \cdot \cos 230^\circ < 0$.

(2) $\because \frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{8} < \pi$, $\therefore \frac{7\pi}{8}$ 是第二象限角.

$\therefore \sin \frac{7\pi}{8} > 0, \tan \frac{7\pi}{8} < 0$.

$\therefore \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \tan \frac{7\pi}{8} < 0$.

(3) $\because \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, $\therefore 6$ 弧度的角是第四象限角.

$\therefore \cos 6 > 0, \tan 6 < 0$. $\therefore \cos 6 \cdot \tan 6 < 0$.

(4) $\because \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, $\therefore \sin 4 < 0$.

又 $-\frac{23\pi}{4} = -6\pi + \frac{\pi}{4}$,

$\therefore -\frac{23\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 终边相同. $\therefore \tan(-\frac{23\pi}{4}) > 0$.

$\therefore \sin 4 \cdot \tan(-\frac{23\pi}{4}) < 0$.



∴式子符号为负.

(4) ∵ $\frac{5\pi}{6}$ 是第二象限角, $\frac{11\pi}{6}$ 是第四象限角, $\frac{2\pi}{3}$

是第二象限角.

$$\therefore \cos \frac{5\pi}{6} < 0, \tan \frac{11\pi}{6} < 0, \sin \frac{2\pi}{3} > 0.$$

$$\text{从而 } \frac{\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \tan \frac{11\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{3}} > 0.$$

∴式子符号为正.

(5) ∵ 191° 是第三象限角,

$$\therefore \tan 191^\circ > 0, \cos 191^\circ < 0.$$

$$\therefore \tan 191^\circ - \cos 191^\circ > 0.$$

∴式子符号为正.

$$(6) \because \frac{\pi}{2} < 3 < \pi, \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi,$$

$$\therefore \sin 3 > 0, \cos 4 < 0, \tan 5 < 0, \cot 6 < 0.$$

$$\therefore \sin 3 \cdot \cos 4 \cdot \tan 5 \cdot \cot 6 < 0.$$

∴式子符号为负.

变式提升 3

若 α 同时满足 $\tan \alpha < 0, \cos \alpha > 0$,

(1) 求 α 的集合;

(2) 判断 $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}$ 的符号.

解: (1) 由 $\cos \alpha > 0$ 知 α 的终边在第一或第四象限, 或在 x 轴的非负半轴上. 由 $\tan \alpha < 0$, 得 α 终边又在第二、四象限. 因此, α 的终边在第四象限.

$$\therefore \text{角 } \alpha \text{ 的集合为 } \{\alpha \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(2) \because 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore k\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{当 } k = 2n (n \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } 2n\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi.$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} < 0, \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \tan \frac{\alpha}{2} < 0;$$

$$\text{当 } k = 2n + 1 (n \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } 2n\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \pi.$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \tan \frac{\alpha}{2} < 0.$$

温馨提示

(1) 要熟记三角函数值在各象限的符号.

(2) α 为象限角, 求 $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限角的方法:

根据 α 所在象限写出 α 的不等式, 进而得 $\frac{\alpha}{2}$ 的不等式. 再对 k 为奇数、偶数两种情况讨论.



基础达标

1 下列函数中与函数 $y = \tan \alpha$ 有相同定义域的是 ()

$$\textcircled{1} y = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \textcircled{2} y = \sec \alpha \quad \textcircled{3} y = \csc \alpha \quad \textcircled{4} y = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析: 要使 $y = \tan \alpha = \frac{y}{x}$ 有意义, 只需角 α 的终边上异于原点的点 $P(x, y)$ 的横坐标 $x \neq 0$, 显然函数 $\textcircled{2} \textcircled{4}$ 与之相同.

答案: B

2 若 $\sin \theta \cos \theta > 0$, 则 θ 在 ()

A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第一、四象限 D. 第二、四象限

解析: 由 $\sin \theta \cos \theta > 0$, 可知若 $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta > 0$, 则 θ 角的终边位于第一象限; 若 $\sin \theta < 0$ 且 $\cos \theta < 0$, 则 θ 角的终边位于第三象限. 综上, 可知 θ 角的终边位于第一或第三象限.

答案: B

3 已知 $P(x, 4)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\tan \theta = -\frac{2}{5}$, 则 x 的值为 ()

A. 10 B. $\frac{4}{5}$ C. -10 D. $-\frac{1}{5}$

解析: 由任意角的三角函数的定义, 可知 $\tan \theta = \frac{y}{x} =$

$$\frac{4}{x} = -\frac{2}{5}, \therefore x = -10.$$

答案: C