



CONTENTS

目录

第一章 三角函数	1
§ 1 周期现象与周期函数	2
§ 2 角的概念的推广	5
§ 3 弧度制	10
§ 4 正弦函数	15
§ 5 余弦函数	20
§ 6 正切函数	26
§ 7 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	31
§ 8 同角三角函数的基本关系	38
整合提升	44
第二章 平面向量	49
§ 1 从位移、速度、力到向量	49
§ 2 从位移的合成到向量的加法	54
§ 3 从速度的倍数到数乘向量	58
§ 4 平面向量的坐标	63
§ 5 从力做的功到向量的数量积	68
§ 6 平面向量数量积的坐标表示	72
§ 7 向量应用举例	77
整合提升	82
第三章 三角恒等变形	88
§ 1 两角和与差的三角函数	88
§ 2 二倍角的正弦、余弦和正切	94
§ 3 半角的三角函数	99
§ 4 三角函数的和差化积与积化和差	104
§ 5 三角函数的简单应用	109
整合提升	116
模块综合测评	120

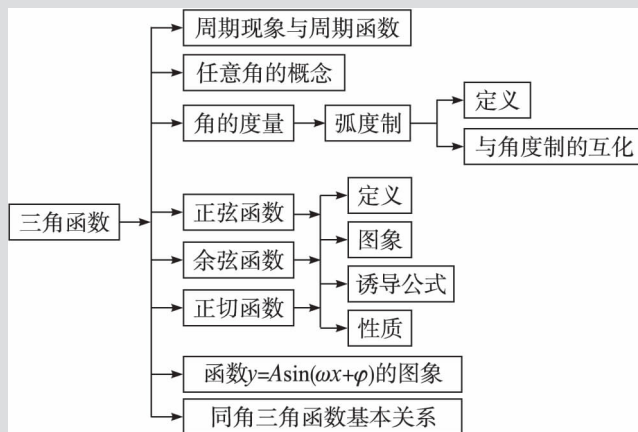


第一章 三角函数

本章概览

内容提要

1. 任意角的概念和弧度制, 弧度与角度的互化.
2. 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式, 用“五点法”作图.
3. 正弦函数、余弦函数在 $[0, 2\pi]$ 上, 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质 (如单调性、最大值和最小值、图象与 x 轴的交点等).
4. $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象, 观察参数 A, ω, φ 对函数图象变化的影响.
5. 用三角函数解决一些简单实际问题 (如单摆、弹簧振子、圆上一点的运动以及音乐、波浪、潮汐、四季变化等事例), 认识周期现象的广泛存在, 体会三角函数是表现周期现象的重要模型, 体会数学知识与现实世界的广泛联系.



学法指导

1. 解决问题时, 要运用单位圆中的三角函数法和三角函数的图象, 以形助数, 体会数形结合的思想.
2. 注意培养数学应用能力, 重视运算、作图、推理以及科学计算器的使用等基本技能.
3. 三角函数的图象和性质是学习的重点, 理解和记忆三角函数的性质都要以图象作为依托, 在图象中找出三角函数性质的具体表现.



§1 周期现象与周期函数



课前导引



问题导入

【问题】周期函数都有最小正周期吗？

思路分析：并不是所有周期函数都存在最小正周期，例如，常数函数 $f(x)=C$ (C 为常数) $x \in \mathbf{R}$ ，当 x 为定义域内的任何值时，函数值都是 C ，即对于函数 $f(x)$ 的定义域内的每一个值 x 都有 $f(x+T)=C$ ，因此 $f(x)$ 是周期函数，由于 T 可以是任意不为零的常数，而正数集中没有最小值，所以 $f(x)$ 没有最小正周期。

再如函数 $D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$

设 r 是任意一个有理数，那么当 x 是有理数时， $x+r$ 也是有理数，当 x 是无理数时， $x+r$ 也是无理数， $D(x)$ 与 $D(x+r)$ 或者等于 1 或者等于 0，因此在两种情况下，都有 $D(x+r)=D(x)$ ，所以 $D(x)$ 是周期函数， r 是 $D(x)$ 的周期，由于 r 可以是任一有理数，而正有理数集中没有最小值，所以 $D(x)$ 没有最小正周期。



知识预览

一般地，对于函数 $y=f(x)$ ，如果存在一个不为零的

常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时， $f(x+T)=f(x)$ 都成立，那么就把函数 $y=f(x)$ 叫做周期函数，不为零的常数 T 叫做这个函数的周期。

(1) 定义应对定义域中的每一个 x 值来说，只有个别的 x 值或只差个别的 x 值满足 $f(x+T)=f(x)$ 都不能说 T 是 $y=f(x)$ 的周期。例如： $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) =$

$\sin \frac{\pi}{4}$ ，但是 $\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \neq \sin \frac{\pi}{3}$ ，就是说 $\frac{\pi}{2}$ 不能对

x 在定义域内的每一个值都有 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$ ，因

此 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $y=\sin x$ 的周期。

(2) 从等式 $f(x+T)=f(x)$ 来看，应强调的是 T 才是周期，如 $f(2x+T)=f(2x)$ ， T 不是周期，而应写成

$f(2x+T)=f[2(x+\frac{T}{2})]=f(2x)$ ，则 $\frac{T}{2}$ 是 $y=f(x)$

的周期。

(3) 对于周期函数来说，如果所有的周期中存在着一个最小的正数，就称它为最小正周期，今后提到的三角函数的周期，如未特别指明，一般都是指它的最小正周期。

(4) 周期函数的周期不止一个，若 T 是周期，则 nT ($n \in \mathbf{N}^*$) 一定也是周期。



课堂导学

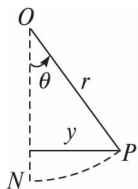


三点剖析

1. 周期函数与周期的意义

【例1】走路时，我们的手臂自然地随步伐周期性地摆动，那么，手臂的周期摆动满足什么规律呢？

解：如右图，以 ON 代表手臂的垂直位置，当手臂摆动到 OP 位置，设 $\theta=$



各个击破

类题演练 1

时钟钟摆的摆动呈什么规律，根据你平时的观察用文字叙述一下。

答案：钟表的钟摆呈周期性变化，它从最低点摆向右，再回到最低点，再摆向左，又回到最低点。完成一个周期。



$\angle PON$ 为摆动的幅角,而 y 为 P 点离开直线 ON 的水平距离, r 为手臂的长度,根据初中平面几何知识可知: $y = r \sin \theta$.

友情提示

实际生活中有许多呈周期性变化的规律,比如:月亮的圆缺;年、月、日、星期的记时;海水的涨落,这些都是呈周期性变化的.

2. 求函数的周期

【例2】已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x-2)$, 求证:函数 $y = f(x)$ 的周期为 4.

证明:令 $x-2=t$, 则 $x=t+2$, 于是由 $f(x+2) = f(x-2)$, 得 $f(t) = f[(t+2)+2] = f(t+4)$.

由周期函数的定义知:函数 $y = f(x)$ 的周期为 4.

友情提示

证明周期函数最常用的是定义,此类问题中常用换元法,把括号内的代数式看作整体,用新的自变量代替,再按定义求解.

3. 判断函数是否具有周期性

【例3】求下列函数的周期:(1) $y = \sin 2x$; (2) $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

思路分析:本题主要考查 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的周期的求法,利用周期函数定义及诱导公式求函数的周期.

解:(1)由于 $f(x+\pi) = \sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x = f(x)$, 所以由周期函数的定义知,原函数的周期为 π .

(2)由于 $f(x+\pi) = 2\sin[2(x+\pi) - \frac{\pi}{3}] = 2\sin[2x+2\pi - \frac{\pi}{3}] = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = f(x)$, 由周期函数的定义知,原函数的周期为 π .

变式提升 1

举出你生活中常见的具有周期性的实例.

答案:转动的车轮、月亮的圆缺、星期记时、红绿灯的变换.

类题演练 2

判断函数 $y = \lg x$ 是否是周期函数?如果是,求出它的一个周期.

解:取定义域内一个值 $x_0 = 1$. 由于 $f(x_0 + T) = \lg(x_0 + T) = \lg(1+T) \neq \lg 1$ ($T > 0$ 的常数), 于是 $f(x) = \lg x$ 不是周期函数.

变式提升 2

已知定义在实数集上的函数 $f(x)$ 始终满足 $f(x+2) = -f(x)$. 判断 $y = f(x)$ 是否是周期函数. 若是周期函数,求出它的一个周期.

解: $\because f(x+4) = f[2+(x+2)] = -f(x+2) = -[-f(x)] = f(x)$,
 $\therefore f(x)$ 是周期函数,且周期是 4.

类题演练 3

证明 $y = x^3$ 不是周期函数.

证明:因为 $y = x^3$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调,设 y 取值 a , 方程 $x^3 = a$ 不可能有两个不同的根,即不存在这样的常数 T , 使得 $f(x_0 + T) = f(x_0)$. 因此, $y = x^3$ 不是周期函数.

变式提升 3

证明 $f(x) = 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 是周期函数,但没有最小正周期.

证明: $f(x) = 1$ 对任意 $T \neq 0$, 都有 $f(x+T) = f(x) = 1$, 所以此函数为周期函数,其周期为任意非零实数,但所有正实数中没有最小值存在,故无最小正周期.



基础达标

1 今天是星期五,九天后的那一天是星期几 ... ()

A. 五 B. 六 C. 日 D. 一

解析:每个星期有 7 天, $9 \div 7 = 1 \cdots 2$, 故为星期日.

答案:C

2 下列函数是周期函数的是 ()

① $f(x) = x$ ② $f(x) = 2^x$ ③ $f(x) = 1$ ④ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

A. ①② B. ③ C. ③④ D. ①②③④



解析:① $f(x+T)=x+T \neq x$, $\therefore f(x)$ 不是周期函数,①错误. 只能从B、C中选,所以只需判断④即可, $f(x+T)=\begin{cases} 1, (x \text{ 为有理数}), \\ 0, (x \text{ 为无理数}), \end{cases}$ 是周期函数,故④正确.

答案:C

- 3 下列命题正确的是 ()

- A. 周期函数必有最小正周期
B. 只有 $y = \sin x$ 才是周期函数
C. $y = 1$ 的最小正周期为 1
D. 周期函数的定义域一定是无限集

解析:由周期函数的定义知 A、B、C 均错误.

答案:D

- 4 已知 $y = f(x)$ 为最小正周期为 2 的函数,且 $f(1) = 4$,则 $f(5)$ 等于 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

解析: $\because y = f(x)$ 中 $T = 2$,

$$\therefore f(5) = f(2 \times 2 + 1) = f(1) = 4.$$

答案:D

- 5 下列四个函数为周期函数的是 ()

- A. $y = 1$ B. $y = 3x^0$
C. $y = x^2$ D. $y = x$

解析:由周期函数定义知 $y = 1$ 是周期函数,对于 $y = 3x^0$,不存在常数 T ,使 $f(0+T) = f(0)$.

答案:A

- 6 设 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数,且 $f(1) = -1$,则 $f(11)$ 的值是 ()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

解析: $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-1) = -f(1) = 1$,
 $f(11) = f(11 - 3 \times 4) = f(-1) = 1$.

答案:B

- 7 若 $f(x)$ 是以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的函数,且 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$,则

$$f(-\frac{2\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解析: } f(-\frac{2\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{3}) = 1$$

答案:1

- 8 今天是星期一,158 天后那一天是星期几?

解析: $\because 158 = 7 \times 22 + 4$,而今天是星期一,
 $\therefore 158$ 天后那一天是星期五.

- 9 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x+1) = f(-x) (x \in \mathbf{R})$,证明 $f(x)$ 为周期函数.

证明:由 $f(x+2) = f[(x+1)+1] = f[-(x+1)] = -f(x+1) = -f(-x) = f(x)$ 得, $f(x)$ 是周期函数,周期为 2.

- 10 求证:若函数 $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的图象关于 $x = a$ 对称,且关于 $x = b$ 对称,则 $f(x)$ 为周期函数,且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

证明:设 x 是任意一个实数,

因为函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称,

$$\text{故 } f(a+x) = f(a-x),$$

$$\text{同理, } f(b+x) = f(b-x).$$

$$\text{于是 } f[x+2(b-a)]$$

$$= f[b+(b+x-2a)]$$

$$= f[b-(b+x-2a)]$$

$$= f(2a-x)$$

$$= f[a+(a-x)]$$

$$= f[a-(a-x)] = f(x).$$

所以, $f(x)$ 是周期函数,且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.



综合运用

- 11 设定义在实数集上的偶函数 $y = f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,且当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$,则当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x)$ 等于 ()

- A. $4+x$ B. $2+|x+1|$
C. $-2+x$ D. $3-|x+1|$

解析:当 $x \in [-1, 0]$ 时, $-x \in [0, 1]$, $-x+2 \in [2, 3]$,
 $f(x) = f(-x) = f(2-x) = 2-x$, 因为 $3-|x+1| = 2-x$,

$$\therefore f(x) = 3-|x+1|.$$

答案:D

- 12 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且以 3 为周期的奇函数, $f(1) > 1$, $f(2) = a$,则 ()

- A. $a > 2$ B. $a < -2$
C. $a > 1$ D. $a < -1$

解析: $f(2) = -f(-2) = -f(3-2) = -f(1) = a$,

$$\therefore f(1) = -a > 1,$$

$$\therefore a < -1.$$

答案:D

- 13 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 8,且等式 $f(4+x) = f(4-x)$ 对一切实数都成立,则 $f(x)$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 既奇又偶 D. 非奇非偶

解析: $\because T = 8$,且 $f(4+x) = f(4-x)$,

$$\therefore f(x) = f(x+8) = f[4+(4+x)]$$

$$= f[4-(4+x)] = f(-x),$$

$$\therefore f(x) \text{ 为偶函数.}$$

答案:B

- 14 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 2 为周期的周期函数,且 $f(x)$ 为偶函数,在区间 $[2, 3]$ 上, $f(x) = -2(x-3)^2 - 4$,求 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x)$ 的解析式.

解析:令 $x \in [-3, -2]$,则 $-x \in [3, 2]$,

$$\text{从而 } f(-x) = -2(-x-3)^2 - 4 = -2(x+3)^2 - 4.$$

又 $f(x)$ 为偶函数,故 $f(-x) = f(x)$. 即 $f(x) = -2(x+3)^2 - 4, x \in [-3, -2]$.



令 $x \in [1, 2]$, 则 $x-4 \in [-3, -2]$,
有 $f(x-4) = f(x) = -2(x-1)^2 + 4$,
即 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = -2(x-1)^2 + 4$.

- 15 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于 $x=1$ 对称, 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, 都有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

(1) 设 $f(1)=2$, 求 $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{4})$;

(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数.

(1) 解析: 由 $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ 知 $f(x) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) \geq 0, x \in [0, 1]$,

故 $f(1) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{2}) = [f(\frac{1}{2})]^2$. 因此 $f(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}}$. 又 $f(1)=2$,

故 $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = [f(\frac{1}{4})]^2 = 2^{\frac{1}{2}}$.

即 $f(\frac{1}{4}) = 2^{\frac{1}{4}}$.

(2) 证明: 由 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 得

$f(x) = f(1+1-x), f(x) = f(2-x)$.

又 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(-x) = f(2-x)$,

$\therefore f(x+2) = f(x)$, 即 $f(x)$ 为周期函数.



拓展探究

- 16 函数满足 $f(x+2) = f(x-2)$, 且 $f(4+x) = f(4-x)$.

若 $2 \leq x \leq 6$ 时, $f(x) = x^2 - 2bx + c, f(-4) = -14$, 试比较 $f(b)$ 与 $f(c)$ 的大小.

解析: 由已知 $f(4+x) = f(4-x), x \in \mathbf{R}$, 得 $x=4$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴.

又 $\because 2 \leq x \leq 6, f(x) = x^2 - 2bx + c$,

$\therefore x=4$ 是 $f(x) = x^2 - 2bx + c, x \in [2, 6]$ 的对称

轴, 即 $-\frac{-2b}{2} = 4, \therefore b=4$.

又 $\because f(x+2) = f(x-2)$,

$\therefore f(x) = f[(x+2)-2] = f[(x+2)+2]$

$= f(x+4)$.

$\therefore f(x)$ 是周期函数, 周期为 $T=4$.

$\because f(-4) = -14$,

而 $f(-4) = f(-4+4 \times 2) = f(4), \therefore f(4) = -14$.

$\because 4 \in [2, 6], \therefore 4^2 - 2 \times 4 \times 4 + c = -14$,

$\therefore c=2$.

$\therefore$ 当 $x \in [2, 6]$ 时, $f(x) = x^2 - 8x + 2$.

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [2, 4]$ 上是减函数,

$\therefore f(2) > f(4)$, 即 $f(c) > f(b)$.

§2 角的概念的推广



课前导引



问题导入

【问题】已知 α 为第一象限角, 请你探求 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

思路分析: 因为 α 为第一象限角, 即 $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 则

(1) 2α 是第一或第二象限角, 或终边在 y 轴非负半轴上的角;

(2) $k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角; 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角; 所以, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角;

(3) $\frac{k \cdot 360^\circ}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{k \cdot 360^\circ}{3} + 30^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k =$

$3n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 为第一象限角;

当 $k = 3n+1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角;

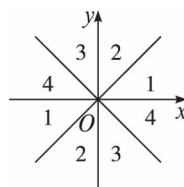
当 $k = 3n+2 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 为第三象限角.

所以, $\frac{\alpha}{3}$ 为第一、第二、第三象限角.

对 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$, 还有一种方法——八卦图法:

(1) $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的判断方法:

第一步: 画出直角坐标系 (如右图) 将每一象限分成两等份; 第二步: 标号. 从靠近 x 轴非负半轴的第一象限内区域开始, 按逆时

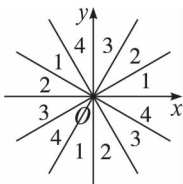




针方向,在图中依次标上1、2、3、4;1、2、3、4;第三步:选号。 α 为第一象限角,在图中将数字1的范围画出,可用阴影表示;第四步:定象限。阴影部分在哪一象限, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边就落在哪一象限。由以上步骤可知,若 α 为第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角。

(2) $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限的判断方法:

第一步:画出直角坐标系(如右图),将每一象限分成三等份;第二步:标号。从靠近非负半轴的第一象限内开始,按逆时针方向,在图中依次标上1、2、3、4;1、2、3、4;1、2、3、4;第三步:选号。 α 为第一象限角,在图中将数字1的范围画出,可用阴影表示;第四步:定象限。阴影部分在哪一象限, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边就落在哪一象限。由以上步骤可知,若 α 为第一象限角,则 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一、二、三象限角。



知识预览

1. 象限角、轴线角

角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴非负半轴重合,那么

(1)如果角的终边(除原点外)在第几象限,则就说这个角是第几象限角。

比如 60° 、 420° 、 -300° 都是第一象限角; 120° 、 480° 、 -240° 都是第二象限角; 210° 、 570° 、 -150° 都是第三象限角; 300° 、 660° 、 -60° 都是第四象限角。

特别注意的是:如果角的顶点不与坐标原点重合,或者角的始边不与 x 轴的非负半轴重合,则不能判断角在哪一象限,也就是它不能称作象限角。

(2)如果终边落在坐标轴上,则这个角不属于任何象限,称之为轴线角(或称为象限界角)。

比如 0° 、 90° 、 180° 、 270° 、 360° 、 -90° 、 -180° 、 -270° 、 -360° 、 -1080° 等都是轴线角。

2. 终边相同的角

(1)研究终边相同的角的前提条件是:角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合。

(2)所有与 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合: $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$,即任一个与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和。

(3)明确以下几点:① k 为整数;② α 为任意角;③ $k\cdot 360^\circ$ 与 α 之间用“+”连接,如 $k\cdot 360^\circ-30^\circ$ 应看成 $k\cdot 360^\circ+(-30^\circ)$;④终边相同的角不一定相等,但相等的角终边一定相同,如 120° 与 -240° 是终边相同的角,但它们不相等;⑤终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍。



课堂导学



三点剖析

1. 任意角和象限角的概念

【例1】在体操、花样滑冰、跳台跳水比赛中,常常听到“转体三周”“转体两周半”的说法,像这种动作名称表示的角度是多大?

思路分析:利用角的定义及正角、负角的概念,“转体三周”即转过3个 360° (或 -360°),“两周半”即2.5个 360° (或 -360°),则问题迎刃而解。

解:如果是逆时针转体,则分别是 $360^\circ\times 3=1080^\circ$ 和 $360^\circ\times 2.5=900^\circ$;若是顺时针转体,则分别为 -1080° 和 -900° 。

友情提示

分清正角是按逆时针转动的角,负角是按顺时针转动的角,是学习角的关键。



各个击破

类题演练 1

若将时钟拨慢5分钟,则分针转了_____度;时针转了_____度。

解析:将时钟拨慢了5分钟,分针、时针都是按逆时针方向转动,转过的是正角这时,分针转过的角度是:

$$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ; \text{时针转过的角度是:} \frac{30^\circ}{12}=2.5^\circ.$$

答案:30 2.5

变式提升 1

时针走过两小时,则分针转过_____度。

解析:分针按顺时针方向旋转,所以形成的角为负角。为 $-360^\circ\times 2=-720^\circ$ 。

答案:-720

2. 终边相同的符号表示

【例2】在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判定下列各角是哪个象限的角.

(1) $908^\circ 28'$; (2) -734° .

思路分析: 将题中角化成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, α 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的形式即可.

解: (1) $908^\circ 28' = 188^\circ 28' + 2 \times 360^\circ$, 则 $188^\circ 28'$ 即为所求的角, 因为它是第三象限角, 从而 $908^\circ 28'$ 也是第三象限角;

(2) $-734^\circ = 346^\circ - 3 \times 360^\circ$, 则 346° 即为所求的角, 因为它是第四象限角, 从而 -734° 也是第四象限角.

友情提示

一般地, 化角 x 为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 时, 可由 x 除以 360° 来确定 k 及 α 的值, 对不合要求的 α 可以通过修正 k 来进一步求解.

3. 任意角的概念

【例3】下列命题中, 正确的是 ()

- A. 终边相同的角一定相等
- B. 锐角都是第一象限角
- C. 第一象限的角都是锐角
- D. 小于 90° 的角都是锐角

解析: 终边相同的两个角彼此相差 360° 的整数倍, 它们可能相等也可能不等, 所以排除 A; 第一象限的角是指 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 所以锐角组成的集合是第一象限的角所成集合的子集, 故 C 错; 小于 90° 的角也可以是负角, 因此 D 错; 正确答案为 B.

答案: B

友情提示

(1) 准确区分各类型的角以及它们的差异是解决本题的关键. 小于 90° 的角不要误认为就是锐角, 它包括锐角、零角和负角, 只有小于 90° 的正角才是锐角, 要特别注意从现在起角已经推广到了零角和负角. (2) 对于本题, 还可结合集合知识推广出去.

类题演练 2

在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间, 写出与 60° 角终边相同的角的集合 S .

解析: 与 60° 角终边相同的角的集合为: $\{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 令 $-720^\circ \leq 60^\circ + k \cdot 360^\circ \leq 720^\circ$, 得 $k = -2, -1, 0, 1$, 相应的角为 $-660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ$, 从而 $S = \{-660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ\}$.

变式提升 2

求终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合.

解析: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内满足条件的角为 135° 和 315° , $\therefore$ 终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合为

$$\begin{aligned} & \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 135^\circ, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

类题演练 3

设 $E = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $F = \{\text{锐角}\}$, $G = \{\text{第一象限的角}\}$, $M = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 但不小于 } 0^\circ \text{ 的角}\}$, 那么有 ()

- A. $F \subsetneq G \subsetneq E$
- B. $F \subsetneq E \subsetneq G$
- C. $M \subsetneq (E \cap G)$
- D. $(E \cap G) \cap M = F$

解析: $E = \{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$, $F = \{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$, $G = \{\alpha | 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $M = \{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$,

$\therefore (E \cap G) \cap M = F$, 故选 D.

答案: D

变式提升 3

设集合 $M = \{\text{大于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $N = \{\text{第二象限角}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. $\{\text{钝角}\}$
- B. $\{\text{大于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$
- C. $\{\text{第二象限角}\}$
- D. 以上均不对

解析: 第二象限角包括钝角和终边落在第二象限的角; 大于 90° 的角也包括钝角和第二象限角, 故选 D.

答案: D



课后导练



基础达标

- 1 与 30° 终边相同的角的集合是 ()

A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ - 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

解析:与 30° 终边相同的角 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ$.

答案:A

- 2 下面属于第三象限角的是 ()

A. 270° B. 179° C. 550° D. $1\ 000^\circ$

解析: 270° 不是象限角, 179° 是第二象限角, $550^\circ = 360^\circ + 190^\circ$ 为第三象限角, $1\ 000^\circ = 720^\circ + 280^\circ$ 为第四象限角, 故选 C.

答案:C

- 3 给出下列四个命题:① -15° 是第四象限的角;② 185° 是第三象限的角;③ 475° 是第二象限的角;④ -350° 是第一象限的角. 其中正确的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析:将题中的角化成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, α 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的形式即可判断四个命题都正确.

答案:D

- 4 集合 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$ 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{-36^\circ, 54^\circ\}$
 B. $\{-126^\circ, 144^\circ\}$
 C. $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$
 D. $\{-126^\circ, 54^\circ\}$

解析:在集合 A 中, 令 k 取不同的整数, 找出既属于 A 又属于 B 的角度即可. $k = -1, 0, 1, 2$ 验证可知 $A \cap B = \{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$.

答案:C

- 5 若 α 是第一象限角, 下列各角中为第四象限角的是 ()

A. $90^\circ - \alpha$ B. $90^\circ + \alpha$
 C. $360^\circ - \alpha$ D. $180^\circ + \alpha$

解析:取 $\alpha = 30^\circ$, 把它代入选项中检验, 选 C.

答案:C

- 6 时针走过 2 小时 40 分, 则分针转过的角度是

解析:要注意角的方向, 钟表上时针和分针转过的角都是负角.

答案: -960°

- 7 已知 $-1\ 000^\circ < \alpha < -640^\circ$, 且 α 与 120° 角的终边相同, 则 $\alpha =$

解析: $\because \alpha$ 与 120° 终边相同,

故 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

又 $\because -1\ 000^\circ < \alpha < -640^\circ$,

$\therefore -1\ 000^\circ < k \cdot 360^\circ + 120^\circ < -640^\circ$.

即 $-1\ 120^\circ < k \cdot 360^\circ < -760^\circ$.

当 $k = -3$ 时, $\alpha = (-3) \times 360^\circ + 120^\circ = -960^\circ$.

答案: -960°

- 8 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解析:在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 终边在

y 轴上的角有两个, 即 $90^\circ, 270^\circ$

角. 因此, 所有与 90° 角终边相同

的角构成集合

$S_1 = \{\beta | \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,

而所有与 270° 角终边相同的角构成集合

$S_2 = \{\beta | \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

于是, 终边在 y 轴上的角的集合

$S = S_1 \cup S_2 = \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\beta | \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$.

- 9 已知 $A = \{\text{锐角}\}$, $B = \{0^\circ \text{ 到 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $C = \{\text{第一象限角}\}$,

$D = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$. 求 $A \cap B, A \cup C, C \cap D, A \cup D$.

解析: $A = \{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$;

$B = \{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$;

$C = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

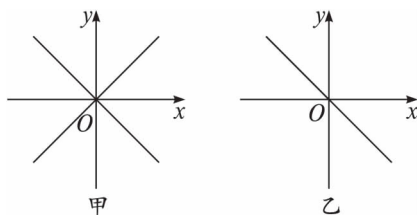
$D = \{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$.

所以 $A \cap B = \{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$; $A \cup C = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,

$C \cap D = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \text{ 为非正数}\}$; $A \cup D = \{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$.

- 10 设两个集合 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ - 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 试求 M, N 之间的关系.

解析:集合 M, N 分别如图甲和图乙所示:



由上图可知: $N \subseteq M$.



综合运用

- 11 如果 α 与 $x+45^\circ$ 具有同一条终边, 角 β 与 $x-45^\circ$ 具有同一条终边, 那么 α 与 β 间的关系是 ()

- A. $\alpha+\beta=0$
B. $\alpha-\beta=0$
C. $\alpha+\beta=k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
D. $\alpha-\beta=k \cdot 360^\circ+90^\circ, k \in \mathbf{Z}$

解析: 利用终边相同的角的关系, 分别写出 α, β , 找出它们的关系即可.

由题意知, $\alpha=k \cdot 360^\circ+x+45^\circ, k \in \mathbf{Z}$;
 $\beta=n \cdot 360^\circ+x-45^\circ, n \in \mathbf{Z}$. 两式相减得 $\alpha-\beta=(k-n) \cdot 360^\circ+90^\circ, (k-n) \in \mathbf{Z}$.

答案: D

- 12 已知 2α 的终边在 x 轴的上方 (不与 x 轴重合), 则 α 的终边在 ()

- A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第一或第三象限

解析: $360^\circ \cdot k < 2\alpha < 360^\circ \cdot k + 180^\circ$,

$$180^\circ \cdot k < \alpha < 180^\circ \cdot k + 90^\circ.$$

$$\text{令 } k=0, 1 \text{ 得 } 0^\circ < \alpha < 90^\circ,$$

$$180^\circ < \alpha < 270^\circ, \text{ 故选 D.}$$

答案: D

- 13 角 α 小于 180° 而大于 -180° , 它的 7 倍角的终边又与自身终边重合, 则满足条件的角 α 的集合为 _____.

解析: 终边相同的角的大小相差 360° 的整数倍.

与角 α 终边相同的角连同角 α 在内可表示为:

$$\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$\therefore$ 它的 7 倍角的终边与其终边相同,

$$\therefore 7\alpha = \alpha + k \cdot 360^\circ,$$

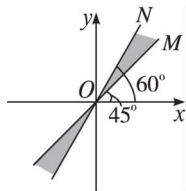
$$\text{解得 } \alpha = k \cdot 60^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore$ 满足 α 的集合为: $\{-120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$.

答案: $\{-120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$

- 14 如右图所示, 分别写出适合下列条件的角的集合:

- (1) 终边落在射线 OM 上;
(2) 终边落在直线 OM 上;
(3) 终边落在阴影区域内 (含边界).



解析: (1) 终边落在射线 OM 上的角的集合

$$A = \{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

(2) 终边落在射线 OM 上的角的集合为

$$A = \{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

终边落在射线 OM 反向延长线上的角的集合为

$$B = \{\alpha | \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

所以终边落在直线 OM 上的角的集合为

$$A \cup B = \{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 45^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 45^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 45^\circ + 180^\circ \text{ 的偶数倍}\} \cup \{\alpha | \alpha = 45^\circ + 180^\circ \text{ 的奇数倍}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 45^\circ + 180^\circ \text{ 的整数倍}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 45^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) 同理可得终边落在直线 ON 上的角的集合为 $\{\beta | \beta = 60^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$,

所以终边落在阴影区域内 (含边界) 的角的集合为:

$$\{\alpha | 45^\circ + n \cdot 180^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$$

- 15 若 θ 角的终边与 168° 角的终边相同, 求在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

解析: $\therefore \theta = k \cdot 360^\circ + 168^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

$$\therefore \frac{\theta}{3} = k \cdot 120^\circ + 56^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{而 } 0^\circ \leq k \cdot 120^\circ + 56^\circ < 360^\circ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{则 } k=0, 1, 2,$$

$$\text{即在 } [0^\circ, 360^\circ) \text{ 内有 } \frac{\theta}{3} = 56^\circ, 176^\circ, 296^\circ.$$



拓展探究

- 16 今天是星期三, 那么 $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天后的第一天是星期几? $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天前的第一天是星期几? 100 天后的第一天是星期几?

解析: 每星期, 从星期一直到星期日, 每星期 7 天, 呈现周期性变化, 每 7 天都要重复出现.

$\therefore$ 今天是星期三,

$\therefore 7k (k \in \mathbf{Z})$ 天后的第一天仍是星期三,

$7k (k \in \mathbf{Z})$ 天前的第一天仍是星期三.

$$\therefore 100 = 7 \times 14 + 2,$$

又 $\therefore$ 今天是星期三,

$\therefore$ 100 天后的第一天是星期五.



§3 弧度制



课前导引



问题导入

【问题】在弧度制下,探索角 α 与角 β 的终边具有下列关系时,分别应该满足的条件:

- (1)关于 x 轴对称;(2)关于 y 轴对称;(3)关于原点对称;(4)关于 $y=x$ 对称;(5)在同一条直线上;(6)互相垂直.

思路分析:(1)若 α 与 β 终边关于 x 轴对称,则 $\alpha+\beta=2k\pi(k\in\mathbb{Z})$;

(2)若 α 与 β 终边关于 y 轴对称,则 $\alpha+\beta=(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z})$;

(3)若 α 与 β 终边关于原点对称,则 $\alpha-\beta=(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z})$;

(4)若 α 的终边与 β 的终边关于 $y=x$ 对称,则 $\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$;

(5)若 α 与 β 终边在同一直线上,则 $\alpha-\beta=k\pi(k\in\mathbb{Z})$;

(6)若 α 的终边与 β 的终边互相垂直,则 $\alpha-\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.



知识预览

1. 有关概念

- (1)弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度.
- (2)1弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小;任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\frac{l}{r}$,其中 l 为以角 α 作为圆心角时的所对圆弧长, r 为圆的半径.
- (3)不管是“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径大小无关的定值.
- (4)用弧度为单位表示角的大小时,“弧度”两字可以省略不写,这时弧度数在形式上虽是一个不名数,

但我们应当把它理解为名数,如 $\sin 2$ 指 $\sin(2$ 弧度), $\pi=180^\circ$ 指 π 弧度 $=180^\circ$,如果以度($^\circ$)为单位表示角时,度($^\circ$)就不能省去.

- (5)用弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成含 π 的形式,如无特殊要求,不必把 π 写成小数.
- (6)弧度制和角度制一样,只是一种度量角的方法,弧度制与角度制相比有一定的优点,其一是进位上,角度制在度、分、秒上是60进位制,计算起来比较复杂,而弧度制是十进位制,给运算带来方便;表现在弧长公式与扇形面积公式的表达上,弧度制下的公式远比角度制下的公式简单,运用起来方便.
- (7)用角度制和弧度制来度量零角,虽然单位不同,但量数相同;对于其他非零角度,由于单位不同,量数也不同.
- (8)需要注意的一个问题:在今后表示角的时候,由于弧度制的优点,常常使用弧度来表示角,但也要注意,用弧度制表示角时,不能与角度制混用,比如 $\alpha=2k\pi+30^\circ(k\in\mathbb{Z})$, $\beta=k\cdot 360^\circ+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ 都是不允许的.

2. 角度与弧度之间的互化

“弧度”和“角度”都是度量角的单位,就像“米”和“尺”都是度量长度的单位一样,它们之间存在着换算关系:

- (1)将角度化为弧度:

$$360^\circ=2\pi; 180^\circ=\pi; 1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\approx 0.01745.$$

- (2)将弧度化为角度:

$$2\pi=360^\circ; \pi=180^\circ; 1=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx 57.3^\circ.$$

- (3)弧度制与角度制在互化时计算复杂,极易出错.如果能够认清这一互化的实质仅仅是一种比例关系,问题就迎刃而解了.具体的做法如下:首先牢记最基本的对应关系: $180^\circ=\pi$,然后将所需转化之值按要求填入下式:

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\text{这个角的弧度数}}{\text{这个角的角度数}},$$

最后,将未填的部分解出,再填上相应的单位即可.

3. 弧度制下弧长 l 的公式、扇形面积 S 的公式

$$l=|\alpha|r; S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2.$$

其中 r 为扇形的半径, α 为扇形圆心角的弧度数.



课堂导学



三点剖析



各个击破

1. 角度与弧度之间的换算

【例1】化下列角度为弧度制：(1) 540° ；(2) $112^\circ 30'$ ；(3) 36° .

思路分析：根据 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ 就可将角度化为弧度.

解：(1) $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \therefore 540^\circ = 3\pi \text{ rad}.$

(2) $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$

$\therefore 112^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \times 112.5 \text{ rad} = \frac{5\pi}{8} \text{ rad}.$

(3) $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \therefore 36^\circ = \frac{\pi}{180} \times 36 \text{ rad} = \frac{\pi}{5}.$

友情提示

(1) 角度数的单位不能省略、弧度数的单位可以省略. (2) 一般情况下没有精确度要求，保留 π 即可，不必将 π 化成小数.

2. 弧度的综合应用

【例2】集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x =$

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则有 ()

A. $M=N$

B. $M \supsetneq N$

C. $M \subsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

思路分析：本题是考查用弧度制表示角的集合之间的关系. 可以用取特殊值法分别找到集合 M 、 N 所表示的角的终边的位置.

解：对集合 M 中的整数 k 依次取 $0, 1, 2, 3$,

得角 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$

于是集合 M 中的角与上面 4 个角的终边相同，如图(1)所示.

同理，集合 N 中的角与 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4},$

$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$ 角的终边相同，如图(2)所示.

类题演练 1

把 $130^\circ, -270^\circ$ 化为弧度为 _____.

解析： $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \therefore 130^\circ = \frac{\pi}{180} \times 130 \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \text{ rad} -$

$270^\circ = -\frac{\pi}{180} \times 270 \text{ rad} = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$

答案： $\frac{13\pi}{18} \quad -\frac{3\pi}{2}$

变式提升 1

(1) 将 -225° 化为弧度；(2) 将 $-\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ 化为度.

解：(1) $\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$

$\therefore -225^\circ = -\frac{\pi}{180} \times 225 \text{ rad} = -\frac{5\pi}{4} \text{ rad}.$

(2) $\because 1 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ,$

$\therefore -\frac{5\pi}{12} \text{ rad} = -(\frac{5\pi}{12} \times \frac{180}{\pi})^\circ = -75^\circ.$

类题演练 2

已知某角是小于 2π 的非负角且此角的终边与它的 5 倍角的终边相同，求此角的大小.

解析：设这个角是 α ，则 $0 \leq \alpha < 2\pi.$

$\because 5\alpha$ 与 α 终边相同，

$\therefore 5\alpha = \alpha + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}),$

$\therefore \alpha = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

又 $\because \alpha \in [0, 2\pi)$ ，令 $k=0, 1, 2, 3.$

得 $\alpha=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$ 即为所求值.

变式提升 2

(1) 分别写出终边落在 OA, OB 位置上的角的集合；

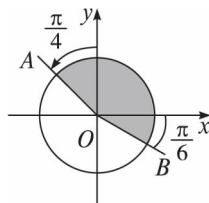
(2) 写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.

解析：(1) 在 0 到 2π 之间，终边落

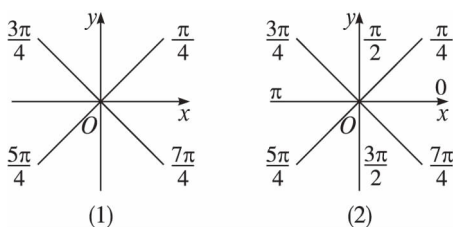
在 OA 位置上的角是 $\frac{\pi}{2} +$

$\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ，终边落在 OB 位置

上的角是 $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6},$



故终边落在 OA 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{4},$



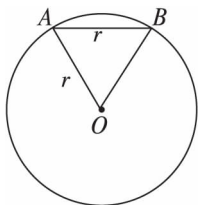
故 $M \subseteq N$, $\therefore$ 选 C.

答案:C

【例3】一条弦的长度等于半径 r , 求:(1)这条弦所对的劣弧长;(2)这条弦与劣弧所组成的弓形的面积.

思路分析:由已知可知圆心角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 然后用弧长和扇形面积公式求解即可. 注意弓形面积等于扇形面积减去对应的三角形面积.

解:(1)如右图,因为半径为 r 的圆 O 中弦 $AB=r$, 则 $\triangle OAB$ 为等边三角形,所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. 则



弦 AB 所对的劣弧长为 $\frac{\pi}{3}r$.

$$(2) \because S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2,$$

$$S_{\text{扇形} OAB} = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times r^2 = \frac{\pi}{6} r^2, \therefore S_{\text{弓形}} =$$

$$S_{\text{扇形} OAB} - S_{\triangle OAB} = \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2.$$

友情提示

图形的分解与组合是解决数学问题的基本方法之一,本例是把弓形看成是扇形与三角形的差组成的,即可运用已有知识解决要求解的问题.

3. 弧度的意义

【例4】下列各命题中,假命题是 ()

- A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
- B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$, 一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$
- C. 根据弧度的定义, 180° 一定等于 π 弧度
- D. 不论用角度制还是用弧度制度量角,它们都与圆的半径长短有关

思路分析:由角和弧度的定义,可知无论是角度制还是弧度制,角的大小与半径的长短无关,而是与弧长与半径的比值有关. 故应选 D.

答案:D

友情提示

掌握定义的准确表述,弧度是角的单位,不是弧的单位.

$k \in \mathbb{Z}$,

终边落在 OB 上的角的集合为 $\{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{11\pi}{6},$

$k \in \mathbb{Z}\}$.

(2)终边落在阴影部分角的集合为 $\{\alpha | 2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq$

$\alpha \leq 2k\pi + \frac{3}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

类题演练 3

求解:

(1)已知扇形的周长为 10 cm, 面积为 4 cm^2 , 求扇形圆心角的弧度数.

(2)已知一扇形的圆心角是 72° , 半径等于 20 cm, 求扇形的面积.

解析:(1)设扇形圆心角的弧度数为 $\theta (0 < \theta < 2\pi)$, 弧长

$$\text{为 } l, \text{ 半径为 } r, \text{ 依题意有 } \begin{cases} l + 2r = 10, \\ \frac{1}{2}lr = 4. \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

①代入②得 $r^2 - 5r + 4 = 0$, 解之得 $r_1 = 1, r_2 = 4$.

当 $r = 1$ 时, $l = 8(\text{cm})$, 此时, $\theta = 8 \text{ rad} > 2\pi \text{ rad}$ 舍去.

当 $r = 4$ 时, $l = 2(\text{cm})$, 此时, $\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ rad}$.

(2)设扇形弧长为 l , $\because 72^\circ = 72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}(\text{rad})$,

$$\therefore l = \alpha R = \frac{2\pi}{5} \times 20 = 8\pi(\text{cm}). \therefore S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2} \times 8\pi \times 20 = 80\pi(\text{cm}^2).$$

变式提升 3

一扇形圆心角为 150° , 半径为 10, 则扇形面积为多少?

解析: $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$, $S = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times 10^2 = \frac{125}{3}\pi$.

类题演练 4

下列各命题中,真命题是 ()

- A. 一弧度是一度的圆心角所对的弧
- B. 一弧度是长度为半径的弧
- C. 一弧度是一度的弧与一度的角之和
- D. 一弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角,它是角的一种度量单位

解析:根据一弧度的定义:把长度等于半径长的弧所对圆心角叫做一弧度的角,由选项知, D 为真命题.

答案:D

变式提升 4

在半径不等的圆中,1 弧度的圆心角所对的 ... ()

- A. 弦长相等
- B. 弧长相等
- C. 弦长等于所在圆的半径
- D. 弧长等于所在圆的半径

解析:由弧度的定义可知选 D.

答案:D



基础达标

1. $\frac{4\pi}{5}$ 化为角度是 ()

A. 140° B. 139° C. 144° D. 159°

解析: $\frac{4\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$.

答案: C

2. 72° 化为弧度是 ()

A. $\frac{2\pi}{5}$ B. $\frac{\pi}{5}$ C. $\frac{3\pi}{5}$ D. $\frac{3\pi}{7}$

解析: $72^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$.

答案: A

3. 若 $\alpha = -4$ 弧度, 则 α 是 ()

A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

解析: $\because -\frac{3\pi}{2} < -4 < -\pi$,

$\therefore \alpha$ 是第二象限角.

答案: B

4. 将 $1\,008^\circ$ 化为 $\alpha + 2k\pi$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) 的形式 ()

A. $2\pi + \frac{8\pi}{5}$ B. $2\pi - \frac{\pi}{5}$
C. $3\pi + \frac{\pi}{5}$ D. $3\pi - \frac{8\pi}{5}$

解析: $1\,008^\circ = 720^\circ + 288^\circ = 2\pi + \frac{8\pi}{5}$.

答案: A

5. 若扇形的面积是 1 cm^2 , 它的周长是 4 cm , 则扇形圆心角的弧度数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析: 确定扇形的条件有两个, 最直接的条件是给出扇形的半径、弧长和圆心角中的两个. 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 由已知条件可知:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}lR = 1, \\ 2R + l = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} l = 2, \\ R = 1, \end{cases} \text{ 所以扇形的圆心角度}$$

数为 $\frac{l}{R} = 2$.

答案: B

6. 圆的半径变为原来的 2 倍, 而弧长不变, 设弧所对的圆心角是原来的 ____ 倍.

解析: 由 $\alpha = \frac{l}{R}$ 可知该弧所对的圆心角是原来的

$\frac{1}{2}$ 倍.

答案: $\frac{1}{2}$

7. α 是第二象限角, 则 $\pi + \alpha$ 是第 ____ 象限角.

解析: 取 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\pi + \alpha = \frac{5\pi}{3}$, 故 α 在第四象限.

答案: 四

8. 一弧度的圆心角所对的弦长为 2, 求这个圆心角所对的弧长及扇形的面积.

解析: 如右图, 作 $OC \perp AB$ 于 C , 则 C 为 AB 的中点,

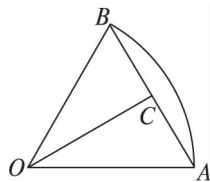
且 $AC = 1, \angle AOC = \frac{1}{2}$,

所以 $r = OA = \frac{AC}{\sin \angle AOC} =$

$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$.

则弧长 $l = |\alpha| \cdot r = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$,

面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2\sin^2 \frac{1}{2}}$.



9. 在直径为 10 cm 的轮子上有一长为 6 cm 的弦, P 为弦的中点, 轮子以每秒 5 弧度的角速度旋转, 求经过 5 秒钟后, 点 P 转过的弧长.

解析: P 到圆心 O 的距离 $PO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$,

即为点 P 所在新圆的半径,

又点 P 转过的角的弧度数 $\alpha = 5 \times 5 = 25$,

所以弧长为 $\alpha \cdot OP = 25 \times 4 = 100(\text{cm})$.

10. 如右图, 动点 P, Q 从点 $A(4, 0)$

出发沿圆周运动, 点 P 按逆时

针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{3}$ 弧度, 点 Q

按顺时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{6}$ 弧

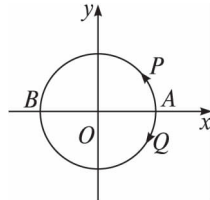
度, 求 P, Q 第一次相遇时所用的时间, 相遇点的坐标及 P, Q 点各自走过的弧长.

解析: 设 P, Q 第一次相遇时所用的时间是 t ,

则 $t \cdot \frac{\pi}{3} + t \cdot \left| -\frac{\pi}{6} \right| = 2\pi$, 所以 $t = 4(\text{s})$, 即第一

次相遇的时间为 4 s .

设第一次相遇点为 C , 第一次相遇时已运动到终边在 $\frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$ 的位置, 则 $x_C = -\cos \frac{\pi}{3} \times 4 = -2$,





$y_C = -\sin \frac{\pi}{3} \times 4 = -2\sqrt{3}$, 所以 C 点的坐标为 $(-2, -2\sqrt{3})$, P 点走过的弧长为: $\frac{4\pi}{3} \times 4 = \frac{16\pi}{3}$; Q 点走过的弧长为 $\frac{8\pi}{3}$.



综合运用

- 11 下列四个命题中,不正确的一个是 ()

- A. 半圆所对的圆心角是 π rad
B. 周角的大小等于 2π
C. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于该圆的半径
D. 长度等于半径的弦所对的圆心角的大小是 1 弧度

解析: 本题考查弧度制下,角的度量单位:1 弧度的概念. 根据一弧度的定义:我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做一弧度的角. 对照各选项,可知 D 不正确.

答案: D

- 12 已知集合 $A = \{\alpha | 2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\emptyset$
B. $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
C. $\{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$
D. $\{\alpha | -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$

解析: 取 $k=0, -1$, 写出 A 在 k 取值 $-1, 0$ 时的 α , 画数轴求解.

答案: D

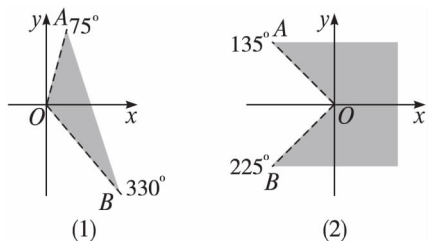
- 13 2006 辽宁高考, 文 1 函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x + 3)$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π
C. 2π D. 4π

解析: 函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x + 3)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

答案: D

- 14 如下图所示, 用弧度表示顶点在原点, 始边重合于 x 轴的非负半轴, 终边落在阴影部分内的角的集合, (不包括边界).



解析: (1) 中 OB 为终边的角为 330° , 可看成 -30° , 化为弧度, 即 $-\frac{\pi}{6}$, 而 $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$,

$\therefore$ 阴影部分内的角的集合为

$$\{\theta | 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(2) 中 OB 为终边的角是 225° , 可看成 -135° ,

化为弧度, 即 $-\frac{3}{4}\pi$, 而 $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

$\therefore$ 阴影部分内的角的集合为

$$\{\theta | 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < \theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

- 15 用 30 cm 长的铁丝围成一个扇形, 应怎样设计, 才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?

解析: 设扇形半径为 r , 弧长为 l , 扇形面积为 S .

则 $l + 2r = 30$, 即 $l = 30 - 2r$.

①

$$\text{将①式代入 } S = \frac{1}{2}lr, \text{ 得 } S = \frac{1}{2}(30 - 2r) \cdot r = -r^2 + 15r = -(r - \frac{15}{2})^2 + \frac{225}{4}.$$

所以当 $r = \frac{15}{2}$ 时, 扇形面积最大, 且最大面积为 $\frac{225}{4} \text{ cm}^2$.

$$\text{此时圆心角 } \theta = \frac{30 - 15}{\frac{15}{2}} = 2.$$



拓展探究

- 16 在炎炎夏日, 用纸扇驱走闷热, 无疑是很好的办法. 纸扇在美观的设计上, 可考虑用料、图案和形状. 若从数学角度看, 我们能否利用黄金比例(0.618)去设计一把有美感的白纸扇呢?

思路分析: 在设计纸扇张开角(θ)时, 可以考虑从一圆形(半径为 r)分割出来的扇形的面积(A_1)与剩余面积(A_2)的比值. 若这一比值等于黄金比例, 便可找到 θ .

$$\text{解析: 若 } \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}r^2\theta}{\frac{1}{2}r^2(2\pi - \theta)} = 0.618, \theta \text{ 以弧度表示,}$$

$$\text{则 } \theta = 0.618(2\pi - \theta).$$

$$\text{所以 } \theta = 0.764\pi \approx 140^\circ (\text{精确到度}).$$

我们可以找市面上的纸扇去检验其张开的角度是否接近 140° , 也可以自制不同形状的纸扇, 去测试一下是否 θ 接近 140° 时纸扇的形状最美观.

§ 4 正弦函数



课前导引



问题导入

【问题】如何确定三角函数的单调区间？

思路分析：函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的单调区间的确定，基本思想是把 $\omega x + \varphi$ 看作一个整体，

比如：由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，解出

x 的范围所得区间即为单调递增区间，由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq$

$\omega x + \varphi \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，解出的 x 的范围所得区间

即为单调递减区间。

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega < 0$) 可利用诱导公式将函数变为： $y = -A\sin(-\omega x - \varphi)$ ，

则 $y = A\sin(-\omega x - \varphi)$ 的单调递增区间为原函数的单调递减区间，减区间为原函数的单调递增区间。

对于函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega < 0$) 及 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega < 0$) 的单调性讨论同上。



知识预览

一、正弦的诱导公式

1. 诱导公式的内容

函数名称	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$)
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$

2. 诱导公式的规律

$-\alpha, \pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号，为了便于记忆，可以说成“函数名不变，符号看象限”。例如： $\sin(180^\circ - 300^\circ) = \sin 300^\circ$ ，我们把 300° 看成一个锐角 α ，则 $180^\circ - 300^\circ = 180^\circ - \alpha$ 为钝角，所以 $\sin(180^\circ - 300^\circ)$ 的符号为正，即 $\sin 300^\circ$ 前面所带符号也为正。

二、正弦函数的图象的作法

1. 利用三角函数线作图，可借助单位圆中的三角函数线

作出。

2. “五点法”作图

$y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象上有五点起决定作用，它

们是 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$ 。因此，

在精确度要求不太高时，我们常常先找出这五个点，描出这五点后再用平滑的曲线将它们连接起来，就得到在相应区间内正弦函数的简图，这种方法叫“五点法”。

注意：(1)“五点法”是我们画三角函数图象的基本方法，要切实掌握好，与“五点法”作图有关的问题曾出现在历届高考试题中。

(2)作图象时，函数自变量要用弧度制，这样自变量与函数值均为实数，因此，在 x 轴、 y 轴上可以统一单位，作出的图象正规，利于应用。

三、正弦函数的性质

函数		$y = \sin x$
性质		
定义域		$\mathbf{R}$
值域		$[-1, 1]$
周期		2π
奇偶性		奇函数
单调性	增区间	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$
	减区间	$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$
对称性	对称中心	$(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$
	对称轴	$x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$

注意：(1)正弦函数的性质都能从其图象上得到体现，所以熟练掌握函数图象是理解性质的关键，而理解性质又可帮助我们正确地作出函数的图象，因此图象与性质相辅相成，图象是性质的载体，性质又决定了图象的特征。(2)正弦曲线的对称轴一定分别过正弦曲线的最高或最低点，即此时的正弦值为最大值或最小值；正弦曲线的对称中心一定过正弦曲线与 x 轴的交点，即此时的正弦值为 0。



三点剖析

1. 正弦函数的定义及诱导公式

【例1】 $\sin(-2\ 010^\circ)$ 的值是..... ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析: $\because -2\ 010^\circ = -6 \times 360^\circ + 150^\circ$,

$\therefore -2\ 010^\circ$ 的终边与 150° 角的终边相同.

$\therefore \sin(-2\ 010^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

答案:C

友情提示

求解任意角的三角函数值时,应先将该任意角化负为正,化大为小(在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内),再利用诱导公式求值.

2. 正弦函数性质的综合应用

【例2】判断函数 $f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$ 的奇偶性.

思路分析:判断函数的奇偶性,主要依据定义,要注意一下两个要点:(1)定义域是否关于原点对称;

(2)是否满足 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$.

解:显然 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$$f(-x) = \lg[\sin(-x) + \sqrt{1 + \sin^2(-x)}]$$

$$= \lg(-\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$$

$$= \lg\left(\frac{1}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}\right)$$

$$= -\lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

友情提示

有些同学容易被函数解析式的复杂性所迷惑,当函数的式子较复杂时,我们可以用变形 $f(-x) + f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 为奇函数; $f(-x) - f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 为偶函数.



各个击破

类题演练 1

求下列各式的符号:(1) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; (2) $\sin \frac{11\pi}{3}$.

解:(1) $\because -\frac{\pi}{4}$ 是第四象限角, $\therefore \sin(-\frac{\pi}{4}) < 0$.

(2) $\because \sin(\frac{11\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{5\pi}{3})$, 而 $\frac{5\pi}{3}$ 是第四象

限角, $\therefore \sin \frac{11\pi}{3} < 0$.

变式提升 1

已知 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, 且 $\sin x = 2m + 1$, 则 m 的取值范围是

解析: 由于 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, 且 $y = \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上为增函数,

$\therefore \sin 0 \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{6}$, 即 $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$. $\therefore 0 \leq 2m + 1 \leq$

$\frac{1}{2}$, 从而 $-\frac{1}{2} \leq m \leq -\frac{1}{4}$.

答案: $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$

类题演练 2

求函数 $y = \sqrt{2\sin x + 1}$ 的定义域.

解析: 由题意知, 需 $2\sin x + 1 \geq 0$, 也即需 $\sin x \geq -\frac{1}{2}$,

①

在一周期 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上符合①的角为 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$,

由此可得函数定义域为

$$[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z}).$$

变式提升 2

2005 上海高考 函数 $f(x) =$

$\sin x + 2|\sin x|, x \in [0, 2\pi]$ 的

图象与直线 $y = k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是

解析: $f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & x \in [0, \pi], \\ -\sin x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$

由图象知 $1 < k < 3$.

答案: $1 < k < 3$

