

第一章 集合与简易逻辑	1
1.1 集合的概念与运算	1
1.2 逻辑联结词、四种命题及反证法	6
1.3 充要条件	10
走进考场	15
第二章 函数	18
2.1 函数的概念	18
2.2 函数的表示	22
2.3 函数的单调性	27
2.4 函数的奇偶性	32
2.5 反函数	37
2.6 二次函数	41
2.7 指数与指数函数	46
2.8 对数与对数函数	51
2.9 函数的图象	55
2.10 函数的最值	61
2.11 函数的应用	66
走进考场	72
第三章 数列	76
3.1 数列的概念	76
3.2 等差数列	81
3.3 等比数列	86
3.4 数列的应用	91
走进考场	97
第四章 三角函数	101
4.1 任意角的三角函数	101
4.2 同角三角函数的基本关系与诱导公式	105
4.3 两角和与差的正弦、余弦、正切	110
4.4 二倍角的正弦、余弦、正切	115
4.5 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质	119
4.6 三角函数的应用	125
走进考场	131



CONTENTS



第五章 平面向量	135
5.1 向量的概念、向量的加法与减法、实数与向量的积	135
5.2 向量的数量积	140
5.3 两点间距离公式、线段的定比分点与图形的平移	144
5.4 解斜三角形	149
走进考场	154
第六章 不等式	157
6.1 不等式的性质	157
6.2 不等式的证明	162
6.3 不等式的解法(一)	166
6.4 不等式的解法(二)	170
走进考场	175
第七章 直线和圆的方程	179
7.1 直线的方程	179
7.2 两直线的位置关系	185
7.3 简单的线性规划	189
7.4 圆的方程	195
7.5 直线与圆的位置关系	200
走进考场	206
第八章 圆锥曲线方程	210
8.1 椭圆	210
8.2 双曲线	216
8.3 抛物线	222
8.4 直线与圆锥曲线的位置关系	227
8.5 轨迹问题	234
走进考场	239
第九章 直线、平面、简单几何体	244
9.1 平面、空间两条直线	245
9.2 直线与平面平行	250
9.3 直线与平面垂直	255
9.4 两个平面平行	260
9.5 两个平面垂直	265





CONTENTS 目录

9.6 空间向量及其坐标运算(B)	271
9.7 空间角	277
9.8 空间距离	284
9.9 棱柱与棱锥	290
9.10 球	297
走进考场	303
第十章 排列、组合和二项式定理	307
10.1 分类计数原理、分步计数原理	307
10.2 排列	312
10.3 组合	316
10.4 二项式定理	320
走进考场	324
第十一章 概率	327
11.1 随机事件的概率	327
11.2 互斥事件有一个发生的概率	332
11.3 相互独立事件同时发生的概率	337
走进考场	342
第十二章 概率与统计(理)	345
12.1 离散型随机变量的分布列	345
12.2 离散型随机变量的期望值和方差	350
12.3 统计	355
走进考场	360
第十二章 统计(文)	365
12.1 抽样方法与总体分布的估计	365
12.2 总体期望值和方差的估计	369
走进考场	374
第十三章 极限(理)	378
13.1 数学归纳法	378
13.2 数列的极限	384
13.3 函数的极限	390
走进考场	394



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS



第十三章 导数(文)	398
13.1 导数的概念与运算	398
13.2 导数的应用	402
走进考场	407
第十四章 导数(理)	411
14.1 导数的概念与运算	411
14.2 导数的应用	415
走进考场	419
第十五章 复数(理)	423
15.1 复数的概念与运算	423
走进考场	427
综合能力检测(一)	431
综合能力检测(二)	437
综合能力检测(三)	442



第一章 集合与简易逻辑

本章要览



1.1 集合的概念与运算



感受高考



考什么?



怎么考?



- 集合中的元素有三个明显的特征:
(1) 确定性; (2) 互异性; (3) 无序性.
- 元素与集合的关系: 属于“ $\in$ ”和不属于“ $\notin$ ”两种.
- 集合与集合之间有三种关系:
(1) 子集(包含与被包含)定义: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 任取 $x \in A \Rightarrow x \in B$.

- 2005 全国高考卷 I . 文 2 理 2 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()
 A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$
 B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
 C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$
 D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$





备课札记

(2) 真子集定义: $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 B 中至少有一元素不属于 A .

(3) 相等两集合: $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

4. 集合的运算及交、并、补集.

解析: $\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I, \therefore \complement_I(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \emptyset$,

即 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$.

答案: C

考试要求

1. 已知集合, 会判断某一个元素是否属于这个集合.
2. 已知两个集合, 会求这两个集合的交(并)集.
3. 已知一个集合, 会求这个集合的补集.
4. 已知两个集合 A, B , 会判断集合 A 是否是集合 B 的子集.



复习进行



三点剖析

=====



各个击破

一、用集合的概念解题

【例1】设集合 $A = \{1, 3, x\}, B = \{1, x^2\}$

且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 求满足条件的实数 x 有多少个.

思路导引: 根据条件 $A \cup B = A$ 知 $B \subseteq A$, 结合集合的“三性”, 找出相等元素列出方程就可求出 x 的值.

解: 由 $A \cup B = \{1, 3, x\} = A \Rightarrow B \subseteq A$,
 $\therefore x^2 = 3$ 或 $x^2 = x$. 解得 $x = \pm\sqrt{3}$ 或 $x = 0$ 与 $x = 1$. 当 $x = 1$ 时, 与集合中元素的互异性矛盾, 所以满足条件的实数 x 有 3 个.

友情提示: 集合中元素具有确定性、互异性和无序性, 特别是互异性筛选不具备条件的解是解题常用之方法. 集合运算性质应予重视(如 $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$), 这是解题的关键.

类题演练 1

已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}, N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为 ()

- A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$
 C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

解析: 因为集合 M 和 N 中的代表元素为有序实数对 (x, y) , 且 $M \cap N$ 的运算结果必定是点的集合, 所以只有答案 D 正确, 选 D.

答案: D

变式提升 1

2005 黄冈模拟 设 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}, B = \{9, a - 5, 1 - a\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 a 的值.

解析: $\because A \cap B = \{9\}, \therefore 9 \in A$.

若 $2a - 1 = 9$, 则 $a = 5$.

此时 $A = \{-4, 9, 25\}, B = \{9, 0, -4\}$,

$A \cap B = \{9, -4\}$, 与已知矛盾, 舍去.

若 $a^2 = 9$, 则 $a = \pm 3$.

当 $a = 3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}, B = \{-2, -2, 9\}$.

B 中有 2 个元素均为 -2 , 与集合中元素的互异性矛盾, 应舍去.

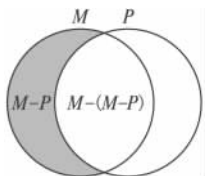
当 $a = -3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}, B = \{9, -8, 4\}$, 符合题意.

综上所述, $a = -3$.



二、用韦恩图解题

【例2】设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P)$ 等于 …… ()



- A. P B. $M \cap P$
C. $M \cup P$ D. M

思路导引: 将题中的 $M - P$ 用我们熟悉的交、并、补运算来表示, 根据差集定义, “ $x \in M$ 且 $x \notin P$ ” 等价于 “ $x \in M \cap \complement_U P$ ”.

解析: 设全集为 U , 则 $M - P = M \cap \complement_U P$. 于是有 $M - (M - P) = M - (M \cap \complement_U P) = M \cap \complement_U (M \cap \complement_U P)$, 由韦恩图可得 $M - (M - P) = M \cap P$. 故选 B.

答案: B

友情提示: 这是一道新定义的集合运算迁移题. 由于给出的新定义, 以及所解决的问题中的集合都是抽象的集合. 这时若类比于实数的运算, 则得出错误结论. 而用图示法, 则有助于对新定义的理解.

三、集合中并、交、补的运算

【例3】设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|2a - 1|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

思路导引: $\complement_U A = \{5\}$, 它说明了两层含义, 即 $5 \in U$ 且 $5 \notin A$. 这样解题的思路和方法就很明显了.

解: $\because \complement_U A = \{5\}, \therefore 5 \in U$ 且 $5 \notin A$.

$$\therefore a^2 + 2a - 3 = 5.$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -4$.

当 $a = 2$ 时, $|2a - 1| = 3 \neq 5$;

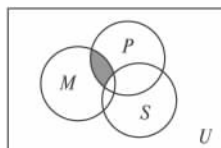
当 $a = -4$ 时, $|2a - 1| = 9 \neq 5$,

但 $9 \notin U, \therefore a = 2$.

友情提示: 由题设条件求得 $a = 2$ 或 $a = -4$ 后, 验证其是否符合隐含条件 $A \subseteq U$ 是必要的, 否则会把 $a = -4$ 也误认为是本题的答案. 集合是一种数学语言, 如果不能从这种语言中破译出它的全部意义, 就会出现失误.

类题演练 2

如图, U 是全集, M, P, S 是 U 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 …… ()



- A. $(M \cap P) \cap S$
B. $(M \cap P) \cup S$
C. $(M \cap P) \cap \complement_U S$
D. $(M \cap P) \cup \complement_U S$

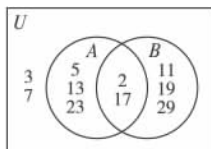
解析: 利用韦恩图的意义, 阴影部分所表示的集合中的元素一定属于 M , 也属于 P , 但不属于 S . 故选 C.

答案: C

变式提升 2

已知全集 $U = \{x | x \text{ 取不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, A, B 是 U 的两个子集, 且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{11, 19, 29\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$, 求 A 和 B .

解析: 由于涉及的集合个数较多, 信息也较多, 所以可用文氏图(如下图)直观求解.



$\because U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, 用图形表示 $A \cap (\complement_U B)$, $(\complement_U A) \cap B$ 及 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, 得 $\complement_U (A \cup B) = \{3, 7\}$, $A \cap B = \{2, 17\}$, $\therefore A = \{2, 5, 13, 17, 23\}$, $B = \{2, 11, 17, 19, 29\}$.

类题演练 3

若集合 $M = \{y | y = 2^{-x}\}$, $N = \{y | y = (x - 1)^2\}$, 则 $M \cap N$ 等于 …… ()

- A. $\{y | y > 1\}$ B. $\{y | y \geq 1\}$
C. $\{y | y > 0\}$ D. $\{y | y \geq 0\}$

解析: $\because M = \{y | y = 2^{-x}\} = \{y | y > 0\}$, $N = \{y | y \geq 0\}$,

$\therefore M \cap N = \{y | y > 0\}$. 故选 C.

答案: C

变式提升 3

已知集合 $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = ax + 2, y \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的值.

解析: A 是直线 $y = x + 1$ 除去点 $(2, 3)$, B 是过点 $(0, 2)$ 的旋转直线系. 要使 $A \cap B = \emptyset$, 需两直线平行, 此时, $a = 1$. 或者 $y = ax + 2$ 与 $y = x + 1$ 交于 $(2, 3)$ 点, 此时 $a = \frac{1}{2}$. 故 $A \cap B = \emptyset$ 时, $a = 1$ 或 $a = \frac{1}{2}$.

备考札记





备考札记



高考热身



基础达标

- 1 若集合 $M = \{y | y = x^{-2}\}$, $P = \{y | y = \sqrt{x-1}\}$, 那么 $M \cap P$ 等于 ()
- A. $(1, +\infty)$
B. $[1, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$
D. $[0, +\infty)$

解析: 由 $M = \{y | y > 0\}$, $P = \{y | y \geq 0\}$,
 $\therefore M \cap P = (0, +\infty)$. 故选 C.

答案: C

- 2 设集合 $A = \{x | x \leq 2\sqrt{3}\}$, $a = \sqrt{11}$, 则 ... ()
- A. $a \subseteq A$
B. $a \notin A$
C. $\{a\} \in A$
D. $\{a\} \subseteq A$

解析: $\because \sqrt{11} < \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\therefore a \in A$.

答案: D

- 3 2006 北京二模, 1 设 M, N, P 的三个集合, 则 $M \cap P = N \cap P$ 是 " $M = N$ " 的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

答案: B

- 4 2006 湖北八校联考一, 理 13 设满足 $y \geq |x-1|$ 的点 (x, y) 的集合为 A , 满足 $y \leq -|x|+2$ 的点 (x, y) 的集合为 B , 则 $A \cap B$ 所表示图形的面积是

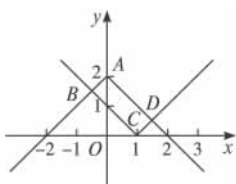
解析: $A \cap B$ 所表示的图形为矩形 $ABCD$,

如图所示, $|AB| =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, |AD| = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

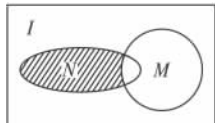
答案: $\frac{3}{2}$



- 5 2005 北京海淀三模, 1

设全集 I 是实数集 $\mathbf{R}$.

$M = \{x | x^2 > 4\}$ 与 $N =$



$\{x | \frac{2}{x-1} \geq 1\}$ 都是 I 的子集 (如上图所示), 则

阴影部分所表示的集合为

解析: $M = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -2\}$, $N = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 而阴影部分所表示的集合为 $(\complement_U M) \cap N$, 故阴影部分所表示的集合为 $\{x | 1 < x \leq 2\}$.

答案: $\{x | 1 < x \leq 2\}$

- 6 设集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 若 $a \in A$, $b \in B$, 试判断 $a+b$ 与集合 A, B, C 的关系.

解析: $\because a \in A$,

$\therefore$ 存在整数 k_1 , 使 $a = 2k_1$.

又 $\because b \in B$,

$\therefore$ 存在整数 k_2 , 使 $b = 2k_2 + 1$.

$\therefore a+b = 2(k_1 + k_2) + 1$.

$\therefore k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}$,

$\therefore a+b \in B$.

故 $a+b$ 不一定属于 C , 但 $k_1 + k_2 = 2n$ ($n \in \mathbf{N}$) 时, $a+b \in C$ 而 $a+b \notin A$.

- 7 已知 $A = \{x | x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

解析: 当 $A = \emptyset$ 时, $\Delta < 0$, 得 $-4 < m < 0$;

当 $A \neq \emptyset$ 时, 由 $\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 0, \text{ 即} \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} (m+2)^2 - 4 \geq 0 \\ -(m+2) \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \text{ 或 } m \leq -4, \\ m \geq -2, \end{cases} \text{ 得 } m \geq 0.$$

综上所述, m 的取值范围是 $\{m | m > -4, m \in \mathbf{R}\}$.

- 8 设集合 $A = \{(x, y) | 2x + y = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | a^2x + 2y = a, x, y \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的值.

思路分析: 集合 A, B 为点集, $A \cap B = \emptyset$ 说明直线 $2x + y = 1$ 和直线 $a^2x + 2y = a$ 没有交点, 即两条直线平行, 布列关于 a 的方程求解.

解: 因集合 A 是直线 $l_1: 2x + y = 1$ 上的所有点的集合, 集合 B 是直线 $l_2: a^2x + 2y = a$ 上的所有点的集合, 要使 $A \cap B = \emptyset$, 则应有 $l_1 \parallel l_2$.

由解析几何知识得

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{a} (a \neq 0), \text{ 解之得 } a = -2.$$

当 $a = 0$ 时, 易得 $A \cap B = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$, 与





$A \cap B = \emptyset$ 矛盾, 故 $a = -2$.

综合训练

- 9 2006 四川成都一诊, 文 12 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q < 0\}$ 满足 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 则 p 与 q 的关系为 ()

- A. $p - q = 0$
B. $p + q = 0$
C. $p + q = -5$
D. $2p + q = -4$

解析: $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$.

$\because A \cap B$ 非空,

$\therefore B$ 非空.

设 $B = \{x | x_1 < x < x_2\}$, 观察数轴, 有 $x_1 < -1, x_2 = 2$,

即 $x = 2$ 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根, 把 $x_2 = 2$ 代入 $x^2 + px + q = 0$, 有 $4 + 2p + q = 0$. 选 D.

答案: D

- 10 2004 西城抽测 设集合 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 k 映射到 B 中的元素 $|k|$, 则在映射 f 下, -2 的象是

若集合 B 中每个元素都有原象, 则集合 B 中的元素个数是 个.

解析: 在映射 f 下, -2 的象是 $|-2| = 2$.

若集合 B 中每个元素都有原象, 则 $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

故集合 B 中的元素个数是 4.

答案: 2 4

- 11 2004 东北三校第一次联考 已知集合 $A = \{x | (\frac{1}{2})^{x^2 - x - 6} < 1\}$, $B = \{x | \log_4(x + a) < 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

解析: 由 $(\frac{1}{2})^{x^2 - x - 6} < 1$, 得 $x^2 - x - 6 > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < -2$.

$\therefore A = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -2\}$.

由 $\log_4(x + a) < 1$, 得 $0 < x + a < 4$.

$\therefore B = \{x | -a < x < 4 - a\}$.

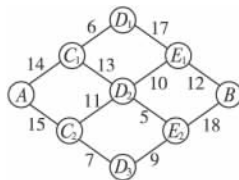
$\because A \cap B = \emptyset$,

$\therefore \begin{cases} -a \geq -2, \\ 4 - a \leq 3. \end{cases}$

$\therefore 1 \leq a \leq 2$, 即 a 的取值范围是 $\{a | 1 \leq a \leq 2\}$.

拓展探究

- 12 (理) 下图是一人出差从 A 城出发到 B 城去, 沿途可能经过的城市的示意图, 通过两城市所需时间标在两城市之间的连线上(单位: h), 试求此人从 A 城出发到 B 城所需时间最少要多少小时?



思路导引: 如果从 A 开始逐一计算所有可能的路线所需的时间, 工作量显然较大, 且易出现遗漏. 注意到最优路线图中的某一城市必存在这样的事实: 不管前面的路线如何, 从本城市出发到终点的路线耗时仍然是最短的. 否则就会存在耗时更短的路线, 产生与最优路线的假设相矛盾. 这就启示我们可以从终点 B 出发, 倒溯着局部选择耗时最短的最优路线.

解: 设各城市至 B 城市所需时间的最短时间为 $S(x)$, x 为城市记号, 则 $S(E_1) = 12$, $S(E_2) = 18$, $S(D_1) = 17 + S(E_1) = 29$, $S(D_2) = \min\{10 + S(E_1), 5 + S(E_2)\} = 22$, $S(D_3) = 9 + S(E_2) = 27$, $S(C_1) = \min\{6 + S(D_1), 13 + S(D_2)\} = 35$, $S(C_2) = \min\{11 + S(D_2), 7 + S(D_3)\} = 33$, $S(A) = \min\{14 + S(C_1), 15 + S(C_2)\} = 48$. 故从 A 城到 B 城所需时间最少为 48 h, 其最短的路线是 $A - C_2 - D_2 - E_1 - B$.

(文) 已知集合 $A = \{x | 2^{x^2 - 3x + 2} = 1\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求实数 a 及 m 的值或范围.

解析: $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | (x - 1)[x - (a - 1)] = 0\}$,

$\because A \cup B = A$, $\therefore B \subseteq A$.

当 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$ 时, $B = \{1\}$, 满足 $B \subseteq A$;

当 $a - 1 \neq 1$, 即 $a \neq 2$ 时, $B = \{1, a - 1\} \subseteq A$,

$\therefore a - 1 = 2$, $\therefore a = 3$.

$\therefore a = 2$ 或 $a = 3$.

由 $A \cap C = C$, 得 $C \subseteq A$.

(1) 当 $C = \emptyset$ 时, $\Delta = m^2 - 8 < 0$,

即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$;

$\Delta = m^2 - 8 = 0$,

(2) 当 $C = \{1\}$ 时, $\begin{cases} 1 + 1 = m, \\ 1 \cdot 1 = 2, \end{cases}$ 无解;





备课札记

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 当 } C = \{2\} \text{ 时, } & \begin{cases} \Delta = m^2 - 8 = 0, \\ 2 + 2 = m, & \text{无解;} \\ 2 \cdot 2 = 2, \end{cases} \\
 (4) \text{ 当 } C = \{1, 2\} \text{ 时, } & \begin{cases} \Delta = m^2 - 8 > 0, \\ 1 + 2 = m, & \text{解得} \\ 1 \cdot 2 = 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$m = 3.$$

$$\therefore m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ 或 } m = 3.$$

$$\therefore a = 2 \text{ 或 } a = 3; m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ 或 } m = 3.$$

1.2 逻辑联结词、四种命题及反证法



复习准备



感受高考



考什么?



怎么考?



1. 可以判断真假的语句叫命题.
2. 逻辑联结词有“或”“且”“非”, 可与集合的“并”“交”“补”沟通理解.
3. 不含逻辑联结词的命题叫简单命题; 由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题. 复合命题有三种形式: p 或 q ; p 且 q ; 非 p .
4. 判断复合命题的真假(真值表)
5. 四种命题的形式.
6. 反证法就是依据于互为逆否命题同时为真或同时为假(即等价).

1. 2004 湖北高考, 理 15 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$; ② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$; ④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.

其中真命题的序号是 _____. (把符合要求的命题序号都填上)

解析: 对①, 设 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$, 满足 $A \not\subseteq B$, 但 $3 \in A$ 且 $3 \in B$, 排除①;

对②, 根据①中 $A \cap B = \{3, 4\} \neq \emptyset$, 排除②;

对③, 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}$, $\therefore A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$, 排除③; 由子集的定义知④正确.

答案: ④



考试要求

1. 已知命题, 会判断真假.
2. 已知命题, 能写出此命题的四种命题, 并会判断真假.
3. 已知命题, 会用逆否命题来判断原命题的真假.





复习进行



三点剖析

○○○



各个击破

一、逻辑联结词“或”“且”“非”的含义

【例1】分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题:

- (1) $x=2$ 或 $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根;
 (2) π 是大于 3 的无理数;
 (3) 直角不等于 90° .

思路导引: 先找出复合命题中的“非”“且”“或”, 若没有, 则自己填进逻辑联结词即可.

解: (1) 这个命题是 p 或 q 的形式. 其中 $p: x=2$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根, $q: x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

(2) 这个命题是 p 且 q 的形式. 其中 $p: \pi$ 大于 3, $q: \pi$ 是无理数.

(3) 这个命题是非 p 形式, 其中 $p: \text{直角等于 } 90^\circ$.

友情提示: 有的复合命题字面上没有出现逻辑联结词, 要从它的结构本质上分析, 填进有关逻辑联结词就变得一目了然了. 如命题(2)没含逻辑联结词, 但它含有两层意义: 一是 π 大于 3; 二是 π 是无理数. 这两层意义可以用逻辑联结词“且”连结. 对于含有“不”字的命题, 一般都可以看作非 p 命题.

二、利用四种命题的关系判断一个命题的真假

【例2】写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断其真假.

- (1) 全等三角形一定相似;
 (2) 末位数字是零的自然数能被 5 整除.

思路导引: 解此题关键是分清原命题的条件和结论. 命题(1)的题设是全等三角形, 结论是相似三角形. 命题(2)的题设是自然数的末位数字是零, 结论是自然数能被 5 整除.

解: (1) 逆命题: 若两个三角形相似, 则一定全等. 逆命题为假.

否命题: 若两个三角形不全等, 则一定不相似. 否命题为假.

逆否命题: 若两个三角形不相似, 则一定

类题演练 1

分别指出由下列命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”形式的复合命题的真假.

- (1) $p: 1$ 是奇数, $q: 1$ 是质数;
 (2) $p: 0 \in \emptyset$, $q: \{x | x^2-3x-5 < 0\} \subseteq \mathbb{R}$;

解析: (1) 因为 p 真 q 假, 所以“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, “非 p ”为假.

(2) 因为 p 假 q 真, 所以“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, “非 p ”为真.

变式提升 1

已知两个命题, p : 方程 $x^2+1=0$ 的两根为复数, q : 方程 $x^2+1=0$ 的两根相等. 试写出这组命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”形式的复合命题, 并判断它们的真假.

解析: p 或 q : 方程 $x^2+1=0$ 的两根都是复数或两根相等,

$\because p$ 真 q 假, $\therefore p$ 或 q 为真命题.

p 且 q : 方程 $x^2+1=0$ 的两根是相等的复数根,

$\because p$ 真 q 假, $\therefore p$ 且 q 为假命题.

非 p : 方程 $x^2+1=0$ 的两根不都是复数,

$\because p$ 真, $\therefore$ 非 p 为假命题.

类题演练 2

写出下列命题的否定形式及命题的否命题, 并分别判断它们的真假.

- (1) 面积相等的三角形是全等三角形;
 (2) 有些质数是奇数.

解析: (1) 原命题的否定形式: 面积相等的三角形不都是全等三角形. (真)

原命题的否命题: 面积不相等的三角形不是全等三角形. (真)

(2) 原命题的否定形式: 有些质数不是奇数. (真)

原命题的否命题: 所有的质数都不是奇数. (假)





备课札记

不全等. 逆否命题为真.

(2) 逆命题: 若一个自然数能被 5 整除, 则末位数字是零. 逆命题为假.

否命题: 若一个自然数的末位数字不是零, 则不能被 5 整除. 否命题为假.

逆否命题: 若一个自然数不能被 5 整除, 则末位数字不是零. 逆否命题为真.

友情提示: 逆命题是将条件与结论对调, 否命题是对条件的否定和对结论的否定, 逆否命题即将条件和结论对调又对其进行否定.

三、运用反证法证明

【例3】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中的 a, b, c 均为整数, 且 $f(0), f(1)$ 均为奇数, 求证: 方程 $f(x) = 0$ 无整数根.

思路导引: 用反证法证明数学问题, 首先要反设, 即假设结论的反面成立. 本题的反设为: 假设方程有整数根.

证明: 设方程 $f(x) = 0$ 有一个整数根 k , 则 $ak^2 + bk = -c$. ①

又 $f(0) = c, f(1) = a + b + c$ 均为奇数, 所以 $a + b$ 是偶数.

当 k 为偶数时, $-c = ak^2 + bk$ 为偶数, 与已知 $f(0) = c$ 是奇数矛盾.

当 k 为奇数时, 设 $k = 2n + 1 (n \in \mathbb{Z})$, 则 $-c = ak^2 + bk = (2n + 1)(2na + a + b)$ 为偶数, 也与已知 $f(0) = c$ 是奇数矛盾.

所以方程 $f(x) = 0$ 无整数根.

友情提示: 关于反证法证明命题“若 p 则 q ”的步骤: (1) 否定欲证结论, 假设它的反面成立; (2) 进行正确推理, 推出矛盾; (3) 矛盾的出现说明结论的反面不成立, 从而得出原结论成立.

变式提升 2

判断下列命题的真假, 并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题并判断其真假.

(1) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

(2) 若在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $b^2 - 4ac < 0$, 则该函数的图象与 x 轴有交点.

解析: (1) 该命题为假. 如 $c = 0$ 时, $ac^2 = bc^2$.

逆命题: $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$, 为真;

否命题: 若 $a \leq b$, 则 $ac^2 \leq bc^2$, 为真;

逆否命题: 若 $ac^2 \leq bc^2$, 则 $a \leq b$, 为假.

(2) 该命题为假.

逆命题: 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有公共点, 则 $b^2 - 4ac < 0$, 为假.

否命题: 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $b^2 - 4ac \geq 0$, 则函数图象与 x 轴无公共点, 为假.

逆否命题: 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴无公共点, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$, 为假.

类题演练 3

已知 x 为实数, $a = x^2 + \frac{1}{2}, b = 2 - x, c = x^2 - x + 1$, 用反证法证明 a, b, c 中至少有一个不小于 1.

证明: 假定 a, b, c 均小于 1, 则有 $a + b + c < 3$,

而 $a + b + c = x^2 + \frac{1}{2} + 2 - x + x^2 - x + 1 = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} + 3 = 3 + 2(x - \frac{1}{2})^2 \geq 3$.

这与 $a + b + c < 3$ 矛盾,

所以 a, b, c 中至少有一个不小于 1.

变式提升 3

若下列三个关于 x 的方程: (1) $x^2 - ax + 4 = 0$,

(2) $x^2 + (a - 1)x + 16 = 0$,

(3) $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ 中至少有一个方程有实根, 求实数 a 的取值范围.

解析: 假设三个方程均无实根, 则有

$$\begin{cases} a^2 - 16 < 0, \\ (a - 1)^2 - 64 < 0, \\ 4a^2 - 4(3a + 10) < 0, \end{cases}$$

$\therefore -2 < a < 4$.

故三个方程至少有一个方程有实根时 a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $a \geq 4$.





基础达标

- 1 2006 辽宁沈阳高三质测一.4 给出两个命题: $p:|x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数; q : 存在反函数的函数一定是单调函数,则下列复合命题中真命题是 ()

A. p 且 q
B. p 或 q
C. 非 p 且 q
D. 非 p 或 q

解析:命题 p 是假命题,命题 q 也为假命题,故 A、B、C 均不对. 选 D.

答案:D

- 2 对命题 $p:A \cap \emptyset = \emptyset$, 命题 $q:A \cup \emptyset = A$, 下列说法正确的是 ()

A. p 且 q 为假
B. p 或 q 为假
C. 非 p 为真
D. 非 p 为假

解析:因为 p 为真 q 为真,所以非 p 为假.

答案:D

- 3 2006 北京东城期末.2 已知命题 p, q , 则“命题 p 或 q 为真”是“命题 p 且 q 为真”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

解析:命题 p 或 q 为真,则 p 和 q 中至少有一个为真,并不能说明 p 和 q 都为真,即 p 且 q 不一定为真,而命题 p 且 q 为真,则 p 和 q 都为真,所以命题 p 或 q 为真.

所以应是必要不充分条件. 故选 B.

答案:B

- 4 “ $\tan \alpha \neq \tan \beta$ ”的 _____ 条件是“ $\alpha \neq \beta$ ”.

解析:“ $\alpha \neq \beta$ ”是条件,且 $\tan \alpha \neq \tan \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$; 而 $\alpha \neq \beta \nRightarrow \tan \alpha \neq \tan \beta$.

“ $\tan \alpha \neq \tan \beta$ ”的必要不充分条件是“ $\alpha \neq \beta$ ”. 故应填“必要不充分”.

答案:必要不充分

- 5 命题 p 的逆命题 q , 命题 q 的逆否命题 r , 命题 p 的逆否命题为 s , 则 r 是 s 的 _____ 命题.

解析:设命题 p 为“若 A 则 B ”, 则 q 为“若 B 则 A ”, 它的逆否命题 r 为“若 $\neg A$ 则 $\neg B$ ”, 同

理 s 为“若 $\neg B$ 则 $\neg A$ ”. $\therefore r$ 是 s 的逆命题.

答案:逆

- 6 判断下列命题的真假:

- (1) 命题“若 $ab=0$, 则 $b=0$ ”的否命题;
(2) 命题“若 $a \neq 0$, 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ ”的逆否命题;
(3) 命题“若 $a=0$ 或 $b=0$, 则 $a^2+b^2=0$ ”的逆否命题.

解析:(1) 否命题:“若 $ab \neq 0$, 则 $b \neq 0$.”这是真命题.

(2) 逆否命题:“若 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$.”这是真命题.

(3) 因原命题是假命题, 所以它的逆否命题也是假命题.

- 7 写出命题“已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b \leq 0$ 有非空解集, 则 $a^2 \geq 4b$ ”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.

解析:逆命题:已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 如果 $a^2 \geq 4b$, 则 $x^2+ax+b \leq 0$ 有非空解集. 为真命题.

否命题:已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 如果关于 x 的不等式 $x^2+ax+b \leq 0$ 没有非空解集, 则 $a^2 < 4b$. 为真命题.

逆否命题:已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 如果 $a^2 < 4b$, 则 $x^2+ax+b \leq 0$ 没有非空解集. 为真命题.

- 8 已知非零实数 a, b, c 两两不相等, 求证: 若

$$2b=a+c, \text{ 则 } \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ 不成立.}$$

证明:假设 $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 成立, 则 $2ac=b(a+c)$, 即 $4ac=(a+c)^2$, 即 $(a-c)^2=0$, $\therefore a=c$, 这与 a, b, c 两两不相等矛盾.

$$\text{故 } \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ 不成立.}$$

综合训练

- 9 命题“平行四边形的对角线相等且互相平分”是 ()

- A. 简单命题
B. “ p 或 q ”形式的复合命题
C. “ p 且 q ”形式的复合命题
D. “非 p ”形式的复合命题

解析: p : 平行四边形对角线相等, q : 平行四边形对角线互相平分. 显然, 这个命题是“ p 且





备课札记

q ”形式的复合命题.

答案:C

- 10 2005 江苏高考,13 命题“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为_____.

解析:原命题: $p \Rightarrow q$, 否命题: $\neg p \Rightarrow \neg q$.

答案:“若 $a \leq b$, 则 $2^a \leq 2^b - 1$ ”

- 11 2006 山东潍坊高三质检一,文 17 已知命题

$P: \lg(x^2 - 2x - 2) \geq 0$; 命题 $Q: |1 - \frac{x}{2}| < 1$.

若 P 是真命题, Q 是假命题, 求实数 x 的取值范围.

解析:由 $\lg(x^2 - 2x - 2) \geq 0$, 得 $x^2 - 2x - 2 \geq 1$,
 $\therefore x \geq 3$ 或 $x \leq -1$.

由 $|1 - \frac{x}{2}| < 1$, 得 $-1 < 1 - \frac{x}{2} < 1$,

$\therefore 0 < x < 4$.

$\therefore$ 命题 Q 假, $\therefore x \leq 0$ 或 $x \geq 4$.

则 $\{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\} \cap \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$
 $= \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

$\therefore$ 满足条件的实数 x 的取值范围为
 $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$.



拓展探究

- 12 (理) 设函数 $f(x) = 2x^2 + mx + n$, 求证:
 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 1.

思路分析: 由于欲证结论的情况繁杂, 因而不

妨从其反面入手, 故用反证法.

证明: 假设原命题不成立,

即 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 都小于 1.

$$\text{则} \begin{cases} |f(1)| < 1 \\ |f(2)| < 1 \\ |f(3)| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < 2 + m + n < 1, & \text{①} \\ -1 < 8 + 2m + n < 1, & \text{②} \\ -1 < 18 + 3m + n < 1. & \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < 2 + m + n < 1, & \text{①} \\ -1 < 8 + 2m + n < 1, & \text{②} \\ -1 < 18 + 3m + n < 1. & \text{③} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < 2 + m + n < 1, & \text{①} \\ -1 < 8 + 2m + n < 1, & \text{②} \\ -1 < 18 + 3m + n < 1. & \text{③} \end{cases}$$

①+③得 $-11 < 2m + n < -9$, 与②矛盾,

所以假设不成立.

即 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 1.

(文) 已知 $p: |2 - \frac{x-1}{2}| > \frac{3}{4}$, $q: \frac{1}{3}x^2 +$

$\frac{3}{2}x - 3 < 0$. 求 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

解析: p, q 可转化为

$$p: \{x | x < \frac{7}{2} \text{ 或 } x > \frac{13}{2}\},$$

$$q: \{x | -6 < x < \frac{3}{2}\}.$$

$$\therefore \neg p: A = \{x | \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}\},$$

$$\neg q: B = \{x | x \leq -6 \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}\}.$$



观察上图知, $A \not\subseteq B$.

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件.

1.3 充要条件



复习准备



感受高考



考什么?



怎么考?



1. 如果已知 $p \Rightarrow q$, 那么 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

2. 如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 记作

1. 2005 上海高考, 文 15 条件甲: “ $a > 1$ ”是条件乙: “ $a > \sqrt{a}$ ”的 ()

A. 既不充分也不必要条件



$p \Leftrightarrow q$, 那么 p 是 q 的充分必要条件, 简称充要条件.

3. 如果 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$, 那么 p 是 q 的充分而不必要条件, q 是 p 的必要而不充分条件.

B. 充要条件

C. 充分不必要条件

D. 必要不充分条件

解析: $a > \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > 1 \text{ 或 } a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$, 故条件

甲与条件乙相同, 即甲是乙的充要条件.

答案: B



考试要求

1. 给定两个条件 A, B , 会判断 A 是 B 的什么条件.
2. 给定一个题目, 会用充要条件的思想证明.



复习进行



三点剖析



各个击破

一、关于充要条件的判断

【例1】判断下列命题的真假.

- (1) “ $(x-2)(y+3)=0$ ”是“ $(x-2)^2+(y+3)^2=0$ ”的充要条件;
- (2) “ $x^2=4x+5$ ”是“ $x \sqrt{4x+5}=x^2$ ”的必要条件;
- (3) “内错角相等”是“两直线平行”的充要条件;
- (4) “ $ab < 0$ ”是“ $|a+b| < |a-b|$ ”的必要而不充分条件.

思路导引: 首先分清命题的条件和结论, 再看推理方向, 可举出反例辨真假.

解: (1) 是假命题. 因为由 $(x-2)(y+3)=0 \not\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=0$.

(2) 是假命题. 因为由 $x \sqrt{4x+5}=x^2 \not\Rightarrow x^2=4x+5$. 事实上, $\{x \mid x \sqrt{4x+5}=x^2\} = \{0, 5\}$, $\{x \mid x^2=4x+5\} = \{-1, 5\}$, 所以“ $x^2=4x+5$ ”是“ $x \sqrt{4x+5}=x^2$ ”的既不充分也不必要条件.

(3) 是真命题. 因为内错角相等 $\Leftrightarrow$ 两直线平行.

(4) 是假命题. 因为 $|a-b| > |a+b| \Leftrightarrow (a-b)^2 > (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 > a^2 + 2ab +$

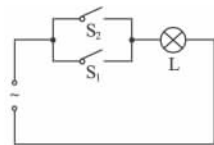
类题演练 1

设甲、乙、丙、丁是四个命题, 甲是乙的充分不必要条件, 丙是乙的充要条件, 丁是丙的必要不充分条件, 丁是甲的什么条件?

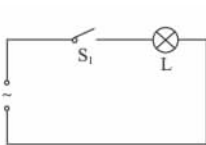
解: 由已知可得 $甲 \Rightarrow 乙 \Leftrightarrow 丙 \Rightarrow 丁$, 所以有 $甲 \Rightarrow 丁$, 丁是甲的必要不充分条件.

变式提升 1

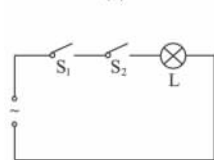
设计如图所示的四个电路图, 条件 A: “ S_1 闭合”; 条件 B: “灯泡 L 亮”, 问 A 是 B 的什么条件?



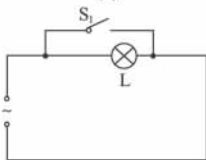
(1)



(2)



(3)



(4)

解析: 由串、并联电路的知识得

(1) A 是 B 的充分不必要条件;





备课札记

$b^2 \Leftrightarrow 4ab < 0 \Leftrightarrow ab < 0$, 故“ $ab < 0$ ”是“ $|a+b| < |a-b|$ ”的充要条件.

友情提示:如果只涉及充分条件可不考虑必要条件,与充分不必要有区别;如果只涉及必要条件可不考虑充分条件,与必要不充分有区别.

二、充分、必要条件的不同描述

【例2】使 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 成立的必要但不充分条件是

- ()
- A. $x > \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} < x < 1$
C. $x < 1$ D. $0 < x < 1$

思路导引:先用集合表示 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 的充要条件,再确定表示 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 的充要条件的集合与答案中各集合的相互关系,找出答案.

解: $\because \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, A 是既不充分也不必要条件, B 是充分不必要条件, D 是充要条件, 故选 C.

答案: C

友情提示:小范围一定能推出大范围,但大范围不一定能推出小范围.

三、用集合间的包含关系判断充要条件

【例3】已知 $p: x^2 - 8x - 20 > 0$, $q: x^2 - 2x + 1 - a^2 > 0$. 若 p 是 q 的充分而不必要条件, 求正实数 a 的取值范围.

思路导引:本题从集合的观点来判定条件的充分、必要性,利用数轴作工具直观地解决问题.

解: $p: x > 10$ 或 $x < -2$,

又 $a > 0$, $q: x > 1+a$ 或 $x < 1-a$,

依题意有 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$,

$$\therefore \begin{cases} a > 0, \\ 1-a \geq -2, \\ 1+a \leq 10. \end{cases}$$

解得 $0 < a \leq 3$.

$\therefore$ 正实数 a 的取值范围是 $0 < a \leq 3$.

友情提示:借助符号语言可以使问题解答更为简捷,可以与其他数学知识综合出现在考题

(2) A 是 B 的充要条件;

(3) A 是 B 的必要不充分条件;

(4) A 是 B 的既不充分又不必要条件.

类题演练 2

设 $f(x) = x^2 - 4x (x \in \mathbb{R})$, 则 $f(x) > 0$ 的一个充分但不必要条件是

- A. $x < 1$
B. $x < 0$ 或 $x > 4$
C. $|x-1| > 1$
D. $|x-2| > 3$

解析: D 等价于 $x > 5$ 或 $x < -1$, 故选 D.

答案: D

变式提升 2

命题甲: $(\frac{1}{2})^x, 2^{1-x}, 2^{x^2}$ 成等比数列; 命题乙:

$\lg x, \lg(x+1), \lg(x+3)$ 成等差数列, 则甲是乙的

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

解析: 由命题甲知, $(2^{1-x})^2 = (\frac{1}{2})^x \cdot 2^{x^2}$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 1$.

由命题乙知, $2\lg(x+1) = \lg x + \lg(x+3)$,

解得 $x = 1$.

所以甲是乙的必要而不充分条件.

答案: B

类题演练 3

已知 A, B, C 是三个集合, 命题 $p: A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$; 命题 $q: A \subseteq (B \cap C)$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.

解析: 由 $A \subseteq (B \cap C) \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$. 但不能逆推.

故 p 是 q 的必要不充分条件.

答案: 必要不充分

变式提升 3

已知 a, b 是实数, 求证: $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1$ 成立的充分条件是 $a^2 - b^2 = 1$. 该条件是否为必要条件? 试证明你的结论.

证明: 因为 $a^2 - b^2 = 1$, 所以 $a^4 - b^4 - 2b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 2b^2 = a^2 - b^2 = 1$.



中,由带参数的集合的包含关系确定参数的范围,最好先把集合在数轴上表示出来.

所以 $a^2 - b^2 = 1$ 是 $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1$ 成立的充分条件.

又因为 $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1 \Rightarrow a^4 = (b^2 + 1)^2$
 $\Rightarrow a^2 = \pm(b^2 + 1) \Rightarrow a^2 = b^2 + 1$ 或 $a^2 = -b^2 - 1$ (不成立) $\Rightarrow a^2 = b^2 + 1 \Rightarrow a^2 - b^2 = 1$.

所以 $a^2 - b^2 = 1$ 是 $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1$ 成立的必要条件.

备考札记



基础达标

- 1 2006 江苏南京高三期末,4 “ $b=2$ ”是“直线 $y=x+b$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切”的 … ()

A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分又不必要条件

答案:B

- 2 若集合 $M=\{x|x>2\}$, $P=\{x|x<3\}$, 则“ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in (M \cap P)$ ”的 …… ()

A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

解析: $x \in M$ 或 $x \in P$, 即 $x \in (M \cup P)$, 而 $(M \cap P) \subseteq (M \cup P)$, $\therefore x \in (M \cap P) \Rightarrow x \in (M \cup P)$. “ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in (M \cap P)$ ”的必要不充分条件. 选 B.

答案:B

- 3 2006 北京西城高三抽测,文5 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a>b$ ”是“ $a>|b|$ ”的 …………… ()

A. 充分必要条件
 B. 必要充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不是充分条件也不是必要条件

解析: $a>b$ 并不能得到 $a>|b|$.

如 $2>-5$, 但 $2<|-5|$, 且 $a>|b| \Rightarrow a>b$. 故选 B.

答案:B

- 4 “ $a^2>4b$ ”是“方程 $x^2+ax+b=0$ 有实数根”的 _____ 条件.

解析: 由 $a^2>4b \Rightarrow a^2-4b>0 \Rightarrow$ 方程 $x^2+ax+b=0$ 有实数根. 但 $x^2+ax+b=0$ 有实根 $\Rightarrow$

$a^2-4b>0$ 或 $a^2-4b=0$, 即 $a^2>4b$ 或 $a^2=4b$,
 $\therefore$ 方程 $x^2+ax+b=0$ 有实根 $\nRightarrow a^2>4b$.

$\therefore a^2>4b$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 有实根的充分不必要条件.

答案:充分不必要

- 5 “ $x \in A$ ”是“ $x \in (A \cap B)$ ”的 _____ 条件.

解析: $\because x \in A \nRightarrow x \in (A \cap B)$, 而 $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$, $\therefore x \in A$ 是 $x \in (A \cap B)$ 的必要不充分条件.

答案:必要不充分

- 6 当 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$ 时, “ $x=0$ 且 $y=0$ 且 $z=0$ ”是“ $x^2+y^2+z^2=0$ ”的 _____ 条件.

解析: 当 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$ 时, $x=0$ 且 $y=0$ 且 $z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=0$, $\therefore$ “ $x=0$ 且 $y=0$ 且 $z=0$ ”是“ $x^2+y^2+z^2=0$ ”的充要条件.

答案:充分必要

- 7 以下的说法是否正确,若不正确予以纠正.

(1) $a^2>4$ 是 $a>2$ 的充分条件;
 (2) $a^2=b^2$ 是 $|a|=|b|$ 的充要条件;
 (3) $A \subseteq B$ 是 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$ 的充要条件 (其中 $A \subseteq U, B \subseteq U$);

(4) “ x 是 4 的约数”是“ x 是 6 的约数”的充分条件.

解析: (1) 不正确.

$\because a^2>4 \nRightarrow a>2$, 而 $a>2 \Rightarrow a^2>4$,

$\therefore a^2>4$ 是 $a>2$ 的必要不充分条件.

(2) 正确.

$\because a^2=b^2 \Leftrightarrow |a|=|b|$,

$\therefore a^2=b^2$ 是 $|a|=|b|$ 的充要条件.

(3) 正确.

$\because A \subseteq B \Leftrightarrow$ 若 $x \in A$, 则 $x \in B \Leftrightarrow$ 若 $x \notin B$, 则 $x \notin A \Leftrightarrow$ 若 $x \in \complement_U B$, 则 $x \in \complement_U A \Leftrightarrow \complement_U A \supseteq \complement_U B$,

$\therefore A \subseteq B$ 是 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$ 的充要条件.

(4) 不正确.

