

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计. 数学. 必修 :II. 新课标苏教版/任志鸿 孟国泰主编. - 2 版.
-海口 :南方出版社 2004. 10(2006. 10 重印)
(志鸿优化系列丛书)
ISBN 7-80660-679-3

I. 高... II. ①任... ②孟... III. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 104602 号

责任编辑 余云华

装帧设计 邢 丽

志鸿优化系列丛书

高中同步测控优化设计·数学·必修:II

任志鸿 孟国泰 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编 570203 电话 0898 - 65371546

山东鸿杰印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2006 年 10 月第 4 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

开本 890 × 1240 1/16

印张 6.5 字数 174 千字

定价 10.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

题记 我创故我在 我在故我创。

志鸿人历来注重教育创新 ,并以此为立业之本。志鸿人认为 :创新是人的灵魂 ,是人的本质特征 ,是人的天然属性 ,是人与动物的最本质区别 ,是一切物质文明和精神文明的不竭源泉。

基于此 ,志鸿人在教育领域不断地进行着创新与超越。伴随着新课标的贯彻落实 ,伴随着新课程实验区师生的殷切期盼 ,志鸿人在深入地研究新课程的精神、理念、内容、方法、手段的基础上 ,与全国各地特别是课改实验区的一线骨干教师再度强强联合 ,以新课标教材为依据 ,以充分体现新课程的理念为灵魂 ,以实用性和创新性的有机结合为出发点 ,以全面培养学生的综合素质为根本目的 ,把曾经风靡全国、畅销各地的《新课标同步测控优化设计》进行了细心、精心、倾心的打造和全面的提升 ,展示出志鸿人的爱心与智慧、品质与品位、思想与理想。

本书以理念统帅栏目 ,以栏目组织内容 ,实现了“ 继承与创新、适应与引领 ”的“ 学习、创新于一体 ”的设计思路。本书编写理念先进 ,体例设置科学合理 ,内容翔实精彩 ,特色鲜明亮丽 ,真正做到了“ 实 ”而不“ 死 ” ,“ 活 ”而不“ 乱 ” !

【知识梳理】 为你全面梳理主干知识 ,助你把握知识脉络 ;“ 知识导学 ”引导你如何学好知识 ,为进一步学习打下坚实基础。

【疑难突破】 为你做认真细致的疑难剖析 ,让你体验突破疑难的快感 ;引导你如何学会对疑点、难点进行剖析 ,突破学习瓶颈 ,更上一层楼。

【典题精讲】 为你提供经典题型的精彩讲解 ,让你一睹名师的讲解风范 ;不但引导你如何进行变式训练 ,学会应考 ,还为你如何避开“ 黑色陷阱 ”(“ 认知陷阱 ”和“ 思维陷阱 ”)、打通“ 绿色通道 ”(“ 思考、思路、思想通道 ”和“ 情感态度价值观通道 ”)出谋划策。

【问题探究】 为你亮出问题立意的风采 ,让你找到探究的乐趣 ;引导你如何思考问题 ,并通过问题学会思考。

【自主广场】 为你精选了许多传统的经典题及新题、好题、活题 ,让你在知识和能力的天空大显身手 ,最大限度地发挥你的主观能动性和创造性 ,以实现“ 修行靠自身 ”的目标。志鸿人认为 :靠墙墙会倒 ,靠娘娘会老 ,只有靠自己 ,万事能办好。自主教育才是最好的教育。为了体现自主教育的精神 ,我们特别设计了两个小栏目 :我夯基 我达标 ,我综合 我发展。“ 我夯基 我达标 ”着重基础知识和基本技能训练 ;“ 我综合 我发展 ”着重综合能力和综合素养的全面提高。

志鸿人在教育战线上已做了大量工作 ,但我们清楚地知道自己还有许多不足 ,我们希望与你共同成长。特别值得一提的是 ,我们在中央电视台播出的广告宣传片中 ,有两只比翼齐飞的天鹅 ,他们就是志鸿人与你共同成长、共同辉煌的象征。这两只天鹅 ,一只是你 ,一只是志鸿人 ,我们相互激励、相互促动 ,共同翱翔在蓝天白云之间 ,追求着快乐而幸福的人生。志鸿人认为 :人一定要不断成长 !成长是和人的生命同始终的。志鸿人坚信 :人人是成长之人 ,天天是成长之时 ,处处是成长之地。我们拒绝成熟 ,我们一直在成长 !我们是快乐的精灵 !我们是幸福的化身 !

目前 ,志鸿人正在建构具有中国特色的“志鸿教育体系” ,正在组织实施“志鸿教育百千万工程” ,正在编辑出版“志鸿教育家书系” ,正在推进“中国新人文教育运动” ,正在以智慧和爱心铸造中国教辅的第一品牌……

志鸿创新 ,以德化雨 ,滋养你我的心灵 ;

志鸿创新 ,以文化人 ,升华你我的精神。

“衣带渐宽终不悔 ,为伊消得人憔悴”。志鸿人已把教育作为自己的生命 ,正在创造着一个又一个的奇迹。志鸿人绝不仅仅满足于编几套教辅材料 ,志鸿人将为民族教育的兴旺发达竭尽全力。

在此 ,我们愿以正在构建中的“志鸿教育体系”中的一段话来结束前言 :

立国先立人 ,

立人先立心 ,

立心先立志。

志立则心立 ,

心立则人立 ,

人立则国立。

丛书编委会

目录

contents

第1章 立体几何初步	1	2.1.1 直线的斜率	36
1.1 空间几何体	2	2.1.2 直线的方程	39
1.1.1 棱柱、棱锥和棱台 1.1.2 圆柱、圆锥、圆台和球	2	2.1.3 两条直线的平行与垂直	42
1.1.3 中心投影和平行投影 1.1.4 直观图画法	6	2.1.4 两条直线的交点	45
1.2 点、线、面之间的位置关系	11	2.1.5 平面上两点间的距离	48
1.2.1 平面的基本性质	11	2.1.6 点到直线的距离	51
1.2.2 空间两条直线的位置关系	14	2.2 圆与方程	54
1.2.3 直线与平面的位置关系	18	2.2.1 圆的方程	54
1.2.4 平面与平面的位置关系	22	2.2.2 直线与圆的位置关系	57
1.3 空间几何体的表面积和体积	25	2.2.3 圆与圆的位置关系	61
1.3.1 空间几何体的表面积	25	2.3 空间直角坐标系	65
1.3.2 空间几何体的体积	29	2.3.1 空间直角坐标系 2.3.2 空间两点间的距离	65
本章测评	33	本章测评	68
第2章 平面解析几何初步	35	模块综合测评	71
2.1 直线与方程	36	参考答案	75

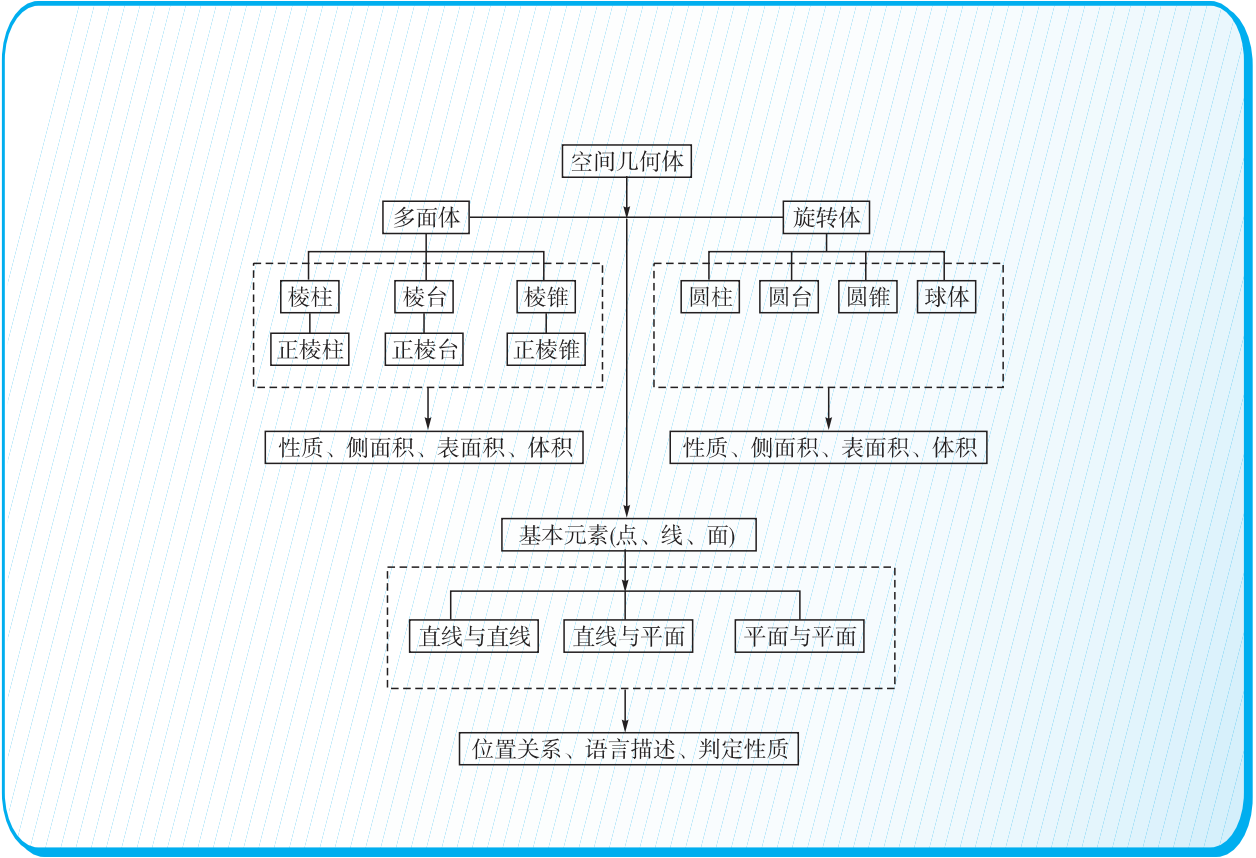
第 1 章 立体几何初步



三维目标

- 1. 通过生活中的实际例子引入空间几何体的相关概念,体现了由特殊到一般,由具体到抽象的理论形成过程,从而形成了立体几何的初步理论.
- 2. 空间几何体的三视图和直观图从不同方面反映了几何体的特征,斜二测画法不仅是画几何图形的工具,也是立体几何理论的基础,它为把空间几何体转化到平面中进行研究提供了可能.
- 3. 通过对体积的探讨不仅加深了对几何体特征的认识,也体现了数学的应用价值,增强了对数学的感性理解,也体现了学习立体几何的必要性.
- 4. 在初中平面几何的基础上,通过对比与联想等方法总结出空间直线与平面之间的位置关系,进一步讨论平面与平面的关系,这是对几何体知识的更深层次的细化.理解这一部分知识可以加强对几何体中某些元素的认识,实现认识从表面到本质的飞跃.
- 5. 空间的垂直与平行关系是几何体中某些局部元素性质的反映,也是把几何体抽象化后的结果.因此,无论线还是面都离不开相应的几何体,这体现了事物之间互相联系的辩证唯物主义思想.

知识网络



1.1 空间几何体

1.1.1 棱柱、棱锥和棱台

1.1.2 圆柱、圆锥、圆台和球

知识梳理

1. 多面体

(1)由一个_____沿某一方向平移形成的空间几何体叫做棱柱.它的特点是:两个底面是全等的多边形,且对应边_____,侧面都是_____.

(2)当棱柱的一个底面收缩为_____时,得到的几何体叫做棱锥.它的特点是:底面是多边形,侧面是有一个_____的三角形.

(3)棱锥被_____的一个平面所截后,截面和底面之间的部分叫做棱台.

2. 旋转体

(1)将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的____、____、_____所在的直线旋转一周,形成的几何体分别叫做圆柱、圆锥、圆台.这条直线叫做轴,垂直于轴的边旋转而成的_____叫做底面,不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做_____,无论旋转到什么位置,这条边都叫做_____.

(2)一般地,一条平面曲线绕它所在的平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做_____,封闭的旋转面围成的几何体称为_____.圆柱、圆锥、圆台和球都是特殊的旋转体.

知识导学

在学习这一部分之前可以先制作一些模型,观察这些模型,进行总结,再得出相应的结论,然后再根据结论对照图形,加深对几何体性质的理解,使理论和实际有机地结合在一起.球是平面图形——圆在空间的延伸,因此在研究球的性质时,应注意与圆的性质类比.球又是旋转体,由于旋转体是轴对称几何体,故解题时,常利用它的轴截面图形,化空间问题为平面问题.

对于柱、锥、台体的形状特征可以利用下列口诀加以记忆:

底面平行又全等,
可能圆柱或棱柱;
棱锥圆锥摘掉帽,

一个台体就出炉.

疑难突破

1. 怎样理解锥体和台体之间的联系?

剖析 锥体和台体既有联系又有区别,锥体和台体是两种不同的几何体,通过后续学习也可知他们的体积及表面积等的计算方法不同,各个面的形状也不一样,但台体可以看成锥体截掉一个小棱锥后的几何体,是棱锥的一部分,根据这一联系可以把两种几何体的关系互相转化.因台体是由锥体截得的,可以看成锥体的一部分,但不能理解成是把柱体的一个面的面积变小,只有通过和锥体的关系才能理解棱台侧棱的延长线相交于一点这一性质.根据锥体和台体的这一性质,在求与台体有关的问题时,可以把它补成一个锥体,用一个平行于底面的截面截掉一个小棱锥即得棱台,而这个截面与底面是相似的平面图形,其面积的比等于对应高的平方比,根据这一关系可以解决很多与棱台有关的问题.

2. 图 1-1-1-1 中的几何体是不是棱台?为什么?

剖析 棱台是棱锥被平行于底面的一个平面所截后,截面和底面之间的部分.棱台的性质:上下底面平行,且对应边成比例.只有这样,才能保证各侧棱交于一点.

图中几何体应根据棱台的定义来判断,不能只看表面现象,这个几何体的四条侧棱不一定交于一点,或者说不能还原成棱锥.

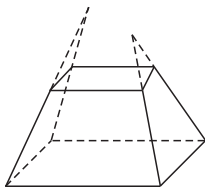


图 1-1-1-1

典题精讲

例 1 图 1-1-1-2、图 1-1-1-3、图 1-1-1-4 中的几个图形能否折叠成棱柱?请试折一下并回答为什么.

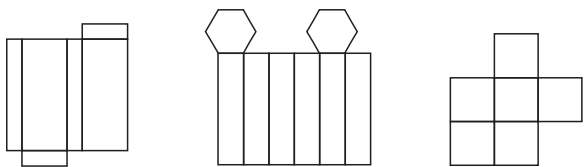


图 1-1-1-2

图 1-1-1-3

图 1-1-1-4

思路解析 首先判断各图如果能折成棱柱则应该折成什么样的棱柱,再看各图与相应棱柱展开图有什么差异.这个题主要要求学生把握多面体的基本情况,运用纸张折叠,结合想象,掌握简单几何体的性质与构成.

答案 图 1-1-1-2 可折成一个四棱柱,图 1-1-1-3 不能折成棱柱,因为折成后的几何体两底面在同一平面内,图 1-1-1-4 不能折成棱柱,因为与正方体的每个面相邻的面最多只有四个,因而展开后的图形中,任一个正方形在它的周围最多只应有四个正方形,而图中有一个正方形,在它的周围有 5 个正方形,这是不可能的.

绿色通道 我们常见的多面体如棱柱、棱锥和棱台等,均可展开成平面图形,反之满足一定条件的平面图形亦可还原成空间多面体.在刚接触有关立体几何的内容时,一定要养成多动手、勤观察、善思考、好总结的良好习惯,为进一步学习立体几何的知识打下坚实的基础.

变式训练 将图 1-1-1-5 中的正方体的表面展开,其表面展开图只可能是图 1-1-1-6 中的 ()

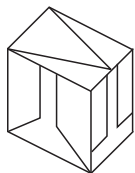


图 1-1-1-5

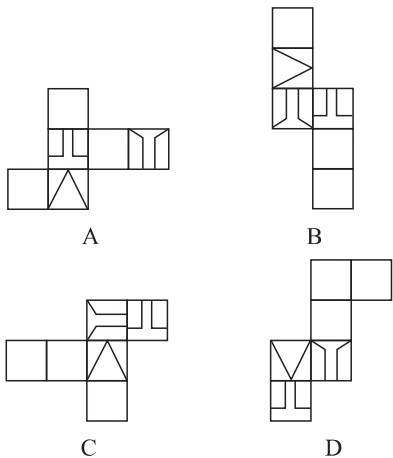


图 1-1-1-6

答案 B

例 2 (1)连结正方体的相邻各面的中心(所谓中心是指各面所在正方形的两条对角线的交点),所得的一个几何体是几面体?画图表示该几何体;(2)连结上述所得的几何体的相邻各面的中心,试问所得的几何体又是几面体?

思路解析 连结相应点后,可以看到,由正方体的部分顶点可构成多种形状的简单几何体.如多面体 ACB_1D_1 便为四面体,即三棱锥,它是面数最少的空间几何体,而且该四面体也是正四面体;又如多面体 A_1ABD 也是四面体,它是一个直角四面体,它也可看作是由正方体截下一个角所得的几何体,且截面是一个等边三角形.

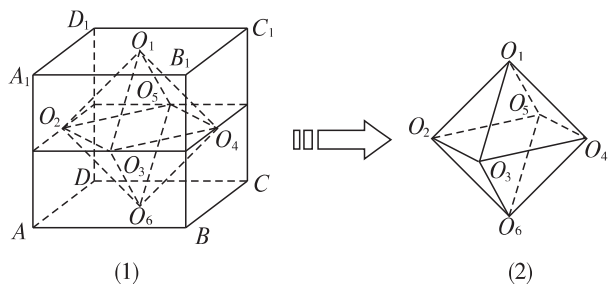


图 1-1-1-7

答案: (1)先画出正方体,然后取各个面的中心,并依次连成线,然后观察即可.

如图 1-1-1-7(1),正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 分别是各表面的中心.由点 $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 组成了一个八面体,而且该八面体共有 6 个顶点,12 条棱.

该多面体的图形如图 1-1-1-7(2)所示.

绿色通道 (1)在画图时要分清“虚实”,否则会使图直观性不强,导致解题错误.“后面的”被前面平面所遮住的线,如图中的 $O_1O_5, O_6O_5, O_5O_2, O_5O_4$ 应画成虚线.

(2)为了增强立体效果,正方体需画得“正”些,而八面体的放置应稍微“倾斜”些,这样,立体效果会更强.

(3)单独画一个正八面体,应注意到,八面体可看成是由两个全等的四棱锥经重合底面后得到的,而且中间一个四边形 $O_2O_3O_4O_5$ 还是正方形,当然其他的如 $O_1O_2O_6O_4$ 等也是正方形.

变式训练 1 正方体被平面所截,截面有可能是什么形状的平面图形?

答案: 根据截面位置不同,可能是三角形、四边形、五边形或六边形.

变式训练 2 将装有水的长方体水槽固定底面一边后倾斜一个小角度,则倾斜后水槽中的水形成的几何体为...()

- A. 棱柱
B. 棱台
C. 棱柱与棱锥组合体
D. 不能确定

思路解析 水面始终与固定的一边平行,且满足棱柱的

定义 可以采用观察实例与排除错误选项相结合的方法.

答案 A

例 3 2006 江西高考,文 15

已知,如图 1-1-1-8,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1,高为 8,一质点自 A 点出发,沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为_____.

思路解析:将正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 沿侧棱 CC_1 展开,其侧面展开图如图 1-1-1-9 所示,由图中路线可得结论 $2\sqrt{3^2+4^2}=10$.

答案 10

黑色陷阱:几条线段的和的最小值是常考的一种问题.解决此类问题常犯的错误是总想把几条线段的和用一个量来表示,从而陷入复杂的计算而导致错误.这说明对几何体的展开图没有充分的认识.遇到此类问题要多画图,分析整体与局部的关系即可避免此类错误的再次发生.

变式训练 1 2006 浙江高考,文 8

如图 1-1-1-10,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 2,E、F 分别是 AB 、 A_1C_1 的中点,则 EF 的长是 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

思路解析:取 AC 的中点 G,连结 EG、FG,则易得 $FG=2$, $EG=1$,且 $\angle FGE=90^\circ$,故 $EF=\sqrt{5}$.

答案 C

变式训练 2 圆台的母线长为 $2a$,母线与轴的夹角为 30° ,一个底面半径是另一个底面半径的 2 倍,则两底面半径为_____.

思路解析:设上底面的半径为 r ,则下底面的半径为 $2r$,那么由轴截面的等腰三角形及 30° 可知 $r=a$.所以上、下底面半径分别为 a 、 $2a$.

答案 a 、 $2a$

问题探究

问题 1 铅球和乒乓球都是球吗?

导思:球可以看作是空间到定点的距离小于或等于定长的点的集合.根据球的定义,铅球是一个球,而乒乓球不是球,这是因为铅球是实心球,符合球的定义,而乒

乓球是空心的,不符合球的定义.

探究:球是一个几何体,它不仅包括球的表面,而且包括球的内部.空心球应该看作是球的组合体,即从一个大球里挖去一个同心球.

问题 2 对于图 1-1-1-11

中 $A_1B_1C_1-ABC$,若 $A_1B_1=AB$,则此时的三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 可演变成什么样的几何体?

若 A_1 、 B_1 、 C_1 三点收缩为一点(记为 P),则此时的三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 即 P-ABC 又演变成了什么样的几何体?

如果几何体 $A_1B_1C_1-ABC$ 满足 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 相似但不全等,那么这个几何体一定是三棱台吗?

导思:用类比法,利用定义并注意圆台和圆锥的联系,类似地,可得到如下结论:圆台的所有母线交于一点;任意两条母线相交,且所在平面与圆台的截面为一等腰梯形;上下底面都为圆,自然有相似关系及图 1-1-1-12 对应的比例关系;并且当上下底面全等时成为一个圆柱,上底面缩为一个点时成为一个圆锥.但要注意圆台是旋转体,不会出现摆法“不正”的情况.

探究:当 $A_1B_1=AB$,上下底面是全等多边形时,棱台变化成棱柱;当棱台的一个底面缩为一个点时,棱台变为棱锥.

考虑将三棱柱的上底面旋转一个角度后的情况,此时仍满足上下底面相似但不全等,但形成的图形可能已经不是一个三棱柱了.例如图 1-1-1-12 所给情形,所以有结论:当不全等的两相似三角形位置摆法不“正”时,不是三棱台.

自主广场

我夯基 我达标

1 图 1-1-1-13、图 1-1-1-14、图 1-1-1-15 中的图形折叠后的图形分别是 _____ ()

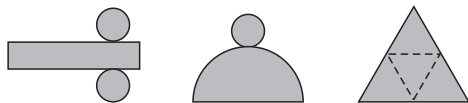


图 1-1-1-13 图 1-1-1-14 图 1-1-1-15

- A. 圆柱、圆锥、棱柱 B. 圆柱、圆锥、棱锥
C. 圆台、球棱锥 D. 圆台、圆锥、棱柱

2 将一个等腰梯形绕着它的较长的底边所在的直线旋转一周,所得的几何体由简单几何体 _____

构成. ()

- A. 一个圆台两个圆锥
B. 两个圆台一个圆锥
C. 两个圆台一个圆锥
D. 一个圆柱两个圆锥

- 3 图 1-1-1-16 是一个正方体的展开图, 每一个面内都标注了字母, 则展开前与 B 相对的是 ()

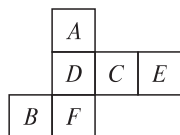


图 1-1-1-16

- A. 字母 E B. 字母 C
C. 字母 A D. 字母 D

- 4 与图 1-1-1-17 所示实物图相类似的立体图形按从左到右的顺序依次是 ()



图 1-1-1-17

- A. 球 圆锥 圆柱 B. 圆锥 圆柱 球
C. 球 棱柱 棱锥 D. 球 圆台 圆锥

- 5 分别指出图 1-1-1-18、图 1-1-1-19、图 1-1-1-20 中各图所包含的特殊几何体.

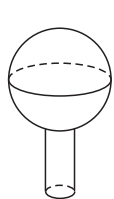


图 1-1-1-18

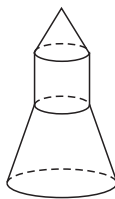


图 1-1-1-19

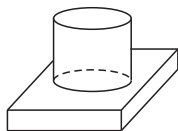


图 1-1-1-20

- 6 请设计辅助线, 沿辅助线翻折使正三角形折成几何体.

我综合我发展

- 7 如图 1-1-1-21, 棱长为 5 的正方体无论从哪一个面看, 都有两个直通的边长为 1 的正方形孔, 则这个有孔正方体的表面积(含孔内各面)是 ()

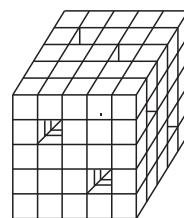


图 1-1-1-21

- A. 258 B. 234 C. 222 D. 210

- 8 下列三个命题, 其中正确的有 ()

①用一个平面去截棱锥, 棱锥底面和截面之间的部分是棱台 ②两个底面平行且相似, 其余各面都是梯形的多面体是棱台 ③有两个面互相平行, 其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台

- A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 3 个

- 9 请你试着把一个正方体展开, 并且使面与面相连. 你能得到多少种不同的展开图?

1.1.3 中心投影和平行投影

1.1.4 直观图画法

知识梳理

1. 投影

投影是投射线通过物体,向选定的投影面投射,并在该投影面上得到图形的方法.它包括_____与_____.投射线交于一点的投影称为_____,而投射线相互平行的投影称为_____.当投影方向正对投影面,该平行投影便是_____,否则便是_____.

2. 视图

(1)将物体按_____向投影面投射所得到的图形称为视图.投射线自物体的前面向后投射所得的投影称为_____ (也叫正视图),自上向下的称为俯视图,自左向右的称为左视图.用这三种视图刻画_____,称之为三视图.

(2)三视图的画法规则

三视图是利用正投影而得的视图.主视图与左视图的高要保持_____,主视图与俯视图的长应_____,俯视图与左视图的宽度应_____.

(3)直观图的画法——斜二测画法

①在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴交于点 O ,再取 z 轴,使 $\angle xOz = 90^\circ$,且 $\angle yOz = 90^\circ$;

②画直观图时把它们画成对应的 x' 轴、 y' 轴和 z' 轴,它们相交于点 O' ,并使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), $\angle x'O'z' = 90^\circ$, x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示_____;

③已知图形中平行(或重合)于 x 轴、 y 轴或 z 轴的线段,在直观图中分别画成_____(或重合) x' 轴、 y' 轴或 z' 轴的线段;

④已知图形中平行(或重合)于 x 轴和 z 轴的线段,在直观图中保持_____,平行(或重合)于 y 轴的线段,长度为_____.

知识导学

深刻体会数学活动是掌握图形、提高识图能力的有效途径,通过观察用两种方法(平行投影与中心投影)画出的视图与直观图,了解空间图形的不同表示形式.

用斜二测画法画平面图形的直观图时,应牢记下列口诀:

横不变,竖折半;
平行关系不改变;
九十度画一半.

通过分析主、俯、左三个视图反映的尺寸,归纳出三

视图投影规律口诀:

长对正,
高平齐,
宽相等.

疑难突破

1. 在画三视图时应注意哪些问题?

剖析:由三视图可以看出,俯视图反映物体的长与宽,正视图反映它的长与高,左视图反映它的宽与高.因此物体的三视图之间具有如下的对应关系:

(1)俯视图要与正视图对正;

(2)左视图要画在正视图的正右方,高度与正视图平齐;

(3)俯视图与左视图宽相等.

总之,在三视图中,无论是物体的总长、总宽、总高,还是局部的长、宽、高都必须符合“长对正”、“高平齐”、“宽相等”的对应关系.

2. 怎样由物体的三视图画出其直观图?

剖析:先由三视图确定实物的形状及大小,大多数情况下都是以组合体形式出现,因此对实物的“还原”更为重要,再依据还原后的“实物”画出直观图.

由三视图想象几何体画直观图时也要根据“长对正、宽相等、高平齐”的基本特征,想象视图中的每一部分对应的实物部分的图象.

典题精讲

例1 画出图1-1-3-1和图1-1-3-2中几何体的三视图(阴影面为视角正面).

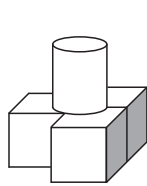


图 1-1-3-1

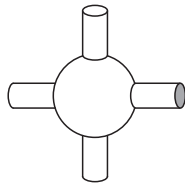


图 1-1-3-2

思路解析:画三视图之前,先把几何体的结构弄清楚,确定正面,仔细观察实物模型,想象从三个角度各看到了什么,进而准确地画出几何体的三视图.

答案:三视图分别如图1-1-3-3和1-1-3-4所示.

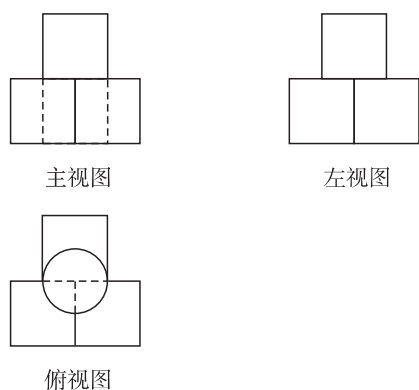


图1-1-3-3

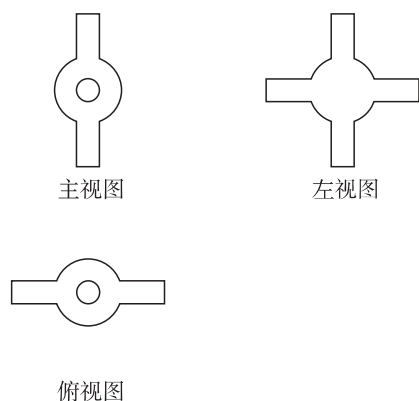


图1-1-3-4

绿色通道 画物体的三视图时可以想象自己就站在物体的正前方、正上方、正左方,观察它是由哪些简单几何体组合而成,它的外轮廓线是什么,然后再去画图,有条件的还可以观察实物模型,也可以自己去把模型做出来.这是一个从模型到图形的过程,从具体到抽象再到具体的过程,是提高空间想象能力的有效做法.

变式训练1 对图1-1-3-5所示的几何体正确的说法是 ()

- A. 如果把(1)作为主视图,则(2)、(3)分别是俯视图和左视图
- B. 如果把(2)作为主视图,则(1)、(4)分别是俯视图和左视图
- C. 如果把(3)作为主视图,则(2)、(1)分别是俯视图和左视图
- D. 如果把(4)作为主视图,则(2)、(1)分别是俯视图和左视图

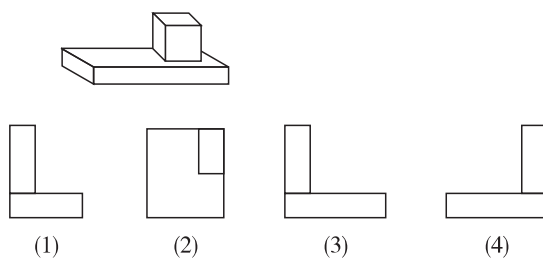


图1-1-3-5

答案:D

变式训练2 图1-1-3-6是某几何体的三视图,则这个几何体的几何结构特征是 ()

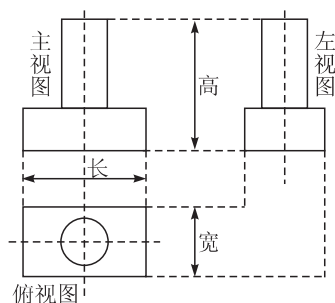


图1-1-3-6

- A. 两个圆柱的组合体
- B. 两个棱柱的组合体
- C. 球和棱柱的组合体
- D. 圆柱和棱柱的组合体

答案:D

例2 根据图1-1-3-7中物体的三视图,画出物体的形状.

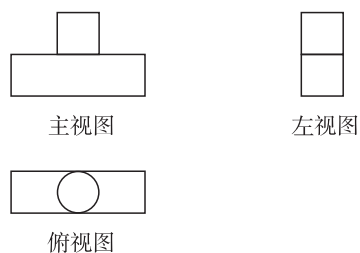


图1-1-3-7

思路解析 由主视图可以判断这个几何体由两部分构成,由左视图可以判断上下两部分的宽度是相等的,再由俯视图可以判断,这个几何体的上部分是一个圆柱,下部分是长方体.因此,它的大致形状是长方体上放一个圆柱.

答案 实物图如图1-1-3-8所示.

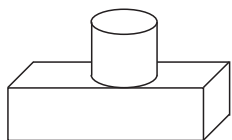


图 1-1-3-8

黑色陷阱 (1)在画物体的形状时,不能注意原三视图中尺寸的比例关系,画图比较随意.

(2)对常见物体的三视图不熟悉.例如,当三视图中有圆时,便以为原物体中一定有球;当三视图中有矩形时,就认为原物体中一定有长方体(正方体).

(3)缺乏空间想象能力,不能由平面图形去推测想象空间图形,不能由三视图想象实物图.

变式训练 1 画出圆柱的三视图.

答案 三视图如图 1-1-3-9 所示.

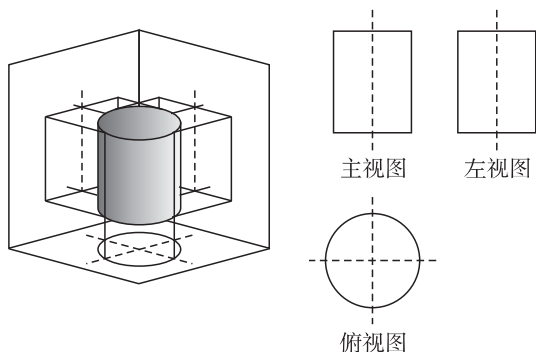


图 1-1-3-9

变式训练 2 画出圆锥的三视图.

答案 三视图如图 1-1-3-10 所示.

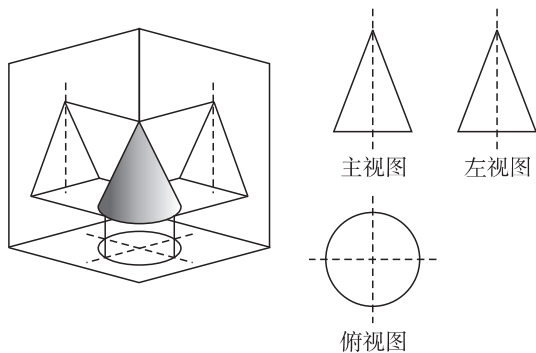


图 1-1-3-10

例 3 如图 1-1-3-11 所示,梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $CD = 2$ cm, $\angle DAB = 30^\circ$, $AD = 3$ cm.试画出它的直观图.

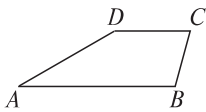


图 1-1-3-11

思路分析 利用斜二测画法作该梯形的直观图关键是找到各个顶点位置.

画法 第一步:在梯形 $ABCD$ 中,以边 AB 所在的直线为 x 轴,点 A 为原点,建立平面直角坐标系 xAy .画出对应的 x' 轴、 y' 轴,使 $\angle x'A'y' = 45^\circ$.

第二步:过 D 点作 $DE \perp x$ 轴,垂足为 E ,在 x' 轴上取 $A'B' = AB = 4$ cm, $A'E' = AE = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm ≈ 2.598 cm.

过 E' 作 $E'D' \parallel y'$ 轴,使 $E'D' = \frac{1}{2}ED$,再过点 D' 作 $C'D' \parallel x'$ 轴,且使 $D'C' = CD = 2$ cm.

第三步:连结 $A'D'$ 、 $B'C'$ 、 $C'D'$,并擦去 x' 轴与 y' 轴及其他一些辅助线,则四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求作的直观图(如图 1-1-3-12 所示).

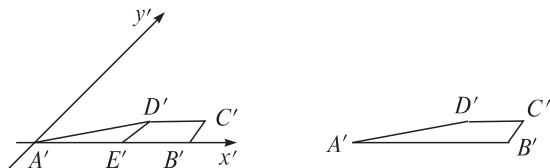


图 1-1-3-12

绿色通道 在画水平放置的平面图形的直观图时,选取适当的直角坐标系是关键,一般要使得平面多边形尽可能多的顶点在坐标轴上,便于画点.

原图中的共线点,在直观图中仍是共线点;原图中的共点线,在直观图中仍是共点线;原图中的平行线,在直观图中仍是平行线.

本题中,关键在于点 D' 位置的确定,这里采用作垂线的方法,先找到垂足 E' ,再去确定 D' 的位置.

变式训练 1 画底面棱长为 2 cm、高为 4 cm 的正六棱柱的直观图.

答案 直观图如图 1-1-3-13 所示.

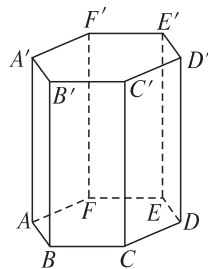


图 1-1-3-13

变式训练 2 画底面半径为 2 cm、高为 4 cm 的圆柱的直观图.

答案 直观图如图 1-1-3-14 所示.

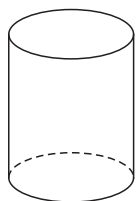


图 1-1-3-14

问题探究

问题 1 如图 1-1-3-15 所示,水平放置的正三角形 ABC 在它的正上方有光源 S . 问题:

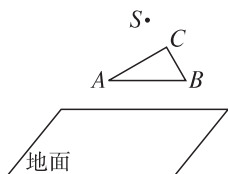


图 1-1-3-15

现在你能准确地画出它在地面上的投影吗?若光源 S 慢慢远离正三角形 ABC ,你又能准确地说出它在地面上的投影有何变化吗?当光源 S 趋近于无限远时,正三角形 ABC 和它在地面上的投影有何不同?你从中能领悟出中心投影与平行投影之间的关系吗?

导思 投影是投射线通过物体,向选定的投影面投射,并在该投影面上得到图形的方法.它包括中心投影与平行投影.投射线交于一点的投影称为中心投影,而投射线相互平行的投影称为平行投影.

探究 这里的光源 S 也就是中心投影的投射中心,光线从 S 点发出,只需将正三角形 ABC 的三个顶点在地面上的投影 A_1 、 B_1 、 C_1 找到,则 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 就是正三角形 ABC 在地面上的投影.由于正三角形 ABC 所在的平面与地面平行,故 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 是正三角形.光源 S 慢慢远离正三角形 ABC 时, $\triangle A_1 B_1 C_1$ 慢慢变小,当光源 S 趋近于无限远时,光线趋近于平行,因此, $\triangle A_1 B_1 C_1$ 趋近于与 $\triangle ABC$ 全等.由此也可以得出,平行投影可以看作投射中心在无限远处的中心投影.

问题 2 某几何体的三视图如图 1-1-3-16 所示,该几何体是棱台吗?

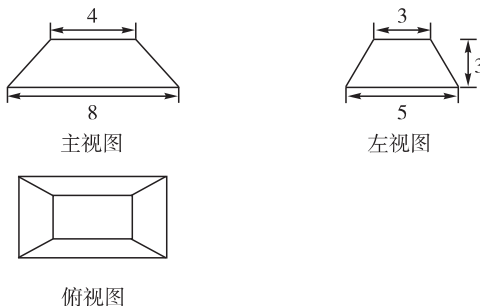


图 1-1-3-16

导思 棱台可以还原成棱锥,因而棱台的俯视图中描述侧棱的线段所在的直线应该交于一点,依据所示数据作出判断.

探究 判断该几何体是否为棱台,关键是利用定义,检查底面是否平行以及判断四条侧棱所在的直线是否交于一点.对于本问题来说,由主视图和左视图可以判断该几何体的上下底面平行;如果说该几何体是棱台,则它的俯视图中四条侧棱在底面上的投影所在的直线应该交于一点,而由俯视图连线易知四条侧棱在底面上的投影所在的直线显然不相交,故它一定不是四棱台.

自主广场

我夯基 我达标

- 在几何体 ①圆锥 ②正方体 ③圆柱 ④球 ⑤正四面体(指四个面都是正三角形的四面体)中,三视图完全一样的几何体是 ()
A. ①③④ B. ④⑤
C. ②④⑤ D. ④
- 下列命题正确的是 ()
A. 若长方体的长、宽、高各不相同,则长方体的三视图中不可能有正方形(以长 $\times$ 宽所在的平面表示观察视角的正面)
B. 照片是三视图的一种
C. 若三视图中有圆,则原几何体中一定有球体
D. 圆锥的三视图都是等腰三角形
- 根据三视图可以描述物体的形状,其中根据左视图可以判断物体的 ()
A. 长度 B. 宽度
C. 宽度和高度 D. 长度和高度
- 利用斜二测画法得到:
①三角形的直观图是三角形;
②平行四边形的直观图是平行四边形;
③正方形的直观图是正方形;
④菱形的直观图是菱形.
以上结论正确的是 ()

A. ①②

B. ①

C. ③④

D. ①②③④

5 已知 $\triangle ABC$ 的平面直观图是边长为 a 的正三角形,则原 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

6 画出水平放置的正六边形的直观图.

8 如果一个几何体的主视图和左视图都是长方形,那么这个几何体可能是_____ ()

A. 长方体

B. 圆柱和正方体

C. 长方体和圆台

D. 长方体和圆柱

9 2006 湖南高考,理9 棱长为2的正四面体的四个顶点都在同一个球面上,若过该球球心的一个截面如图1-1-3-19,则图中三角形(正四面体的截面)的面积是_____ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

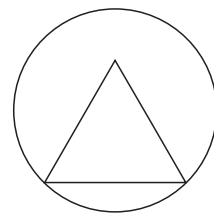


图 1-1-3-19

10 图1-1-3-20是一个零件的三视图,试画出这个零件的实物图.

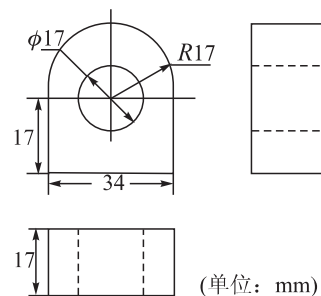


图 1-1-3-20

我综合 我发展

7 如图1-1-3-17所示,桌上放着一摞书和一只茶杯,下面的几幅图中是其俯视图的是_____ ()

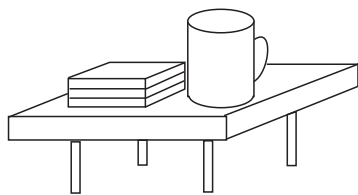
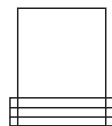


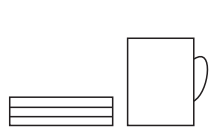
图 1-1-3-17



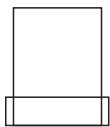
A



B



C



D

图 1-1-3-18

1.2 点、线、面之间的位置关系

1.2.1 平面的基本性质

知识梳理

1. 用符号表示点、线、面的位置关系

位置关系	符号表示
(1)点 A 在直线 a 上	_____
(2)点 A 不在直线 a 上	_____
(3)点 A 在平面 α 内	_____
(4)点 A 不在平面 α 内	_____
(5)直线 a 在平面 α 内	_____
(6)直线 a 不在平面 α 内	_____
(7)直线 a 与直线 b 相交于点 P	_____
(8)平面 α 与平面 β 相交于直线 l	_____

2. 平面的基本性质及其作用

(1)公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线在此平面内。(图 1-2-1-1(1))

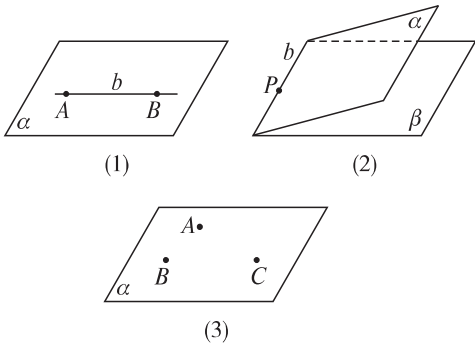


图 1-2-1-1

符号语言:_____.

(2)公理 2 如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是经过这个公共点的一条直线.有且只有一条过该点的公共直线.(图 1-2-1-1(2))

符号语言:_____.

(3)公理 3 过不在一条直线上的三点,有且只有一个

平面.(图 1-2-1-1(3))

符号语言:_____.

(4)用符号语言表示三个推论:

推论 1:_____.

推论 2:_____.

推论 3:_____.

知识导学

以点作为元素,把直线与平面看成点的集合,从点集的角度来认识几何图形,从而使数与形有机地结合起来.正确地用符号语言表示点、线、面的位置关系是学习后续课程的基础,在后面的证明过程中,符号语言的使用能使证明有条理,而且简捷,符合数学上的简单美.推论 1 是学习立体几何遇到的第一个需要论证的问题,学习时应注意分析证明的思路及论证的依据,并了解证明的过程包括存在性和唯一性两部分.在推理过程中,运用了符号语言,目的在于简化证明过程,为运用符号语言提供示范.

疑难突破

1. 平面的概念

剖析:平面是一个只描述而不定义的最基本的原始概念.生活中的平面是比较平整、有限的,而立体几何中所说的平面是从生活中常见平面中抽象、概括出来的,是理想的、绝对平整的、无限延伸的.立体几何中的平面与平面几何中的平面图形是有区别的:平面图形如三角形、正方形、梯形等,他们有大小之分,而平面却是无大小、厚薄之分,是不可度量的,可以向四周无限延伸的.平面应具有如下的特点:

- (1)是平的;
- (2)是没有厚度的;
- (3)是无限延展而没有边界的;
- (4)是由空间点、线组成的无限集合;
- (5)平面图形是空间图形的重要组成部分.

2. 有没有过空间一点的平面?这样的平面有多少个?有没有过空间两点的平面?这样的平面有多少个?有没有过一条直线上三点的平面?这样的平面有多少个?有没有过不在同一条直线上三点的平面?这样的平

面有多少个?

剖析 有过空间一点的平面,这样的平面有无数多个;有过空间两点的平面,这样的平面有无数多个,这无数个平面的交线是这两点确定的直线;有过一条直线上三点的平面,这样的平面有无数多个;有过不在同一条直线上三点的平面,这样的平面有且仅有一个。

典题精讲

例1 求证:两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内。

思路分析 四条直线两两相交且不过同一点,又可分为两种情况:一是有三条直线共点,这同教材例1;二是任何三条直线都不共点,因而本题需分类后各自证明。

证明时可以先用公理3,通过两条相交线确定一个平面,再用公理1证明其他直线也在这个平面内。

答案 已知:四条直线 a, b, c, d 两两相交,且不过同一点。

求证 a, b, c, d 共面。

(1)若 a, b, c, d 四条直线中有三条共点,不妨设 $a \cap b \cap c = A, a \cap d = B, b \cap d = C, c \cap d = D$,且相交直线 a, d 所确定的平面为 α ,图象如图1-2-1-2所示。

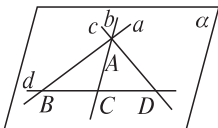


图1-2-1-2

$A \in a, a \subset \alpha, A \in \alpha, C \in d, d \subset \alpha, C \in \alpha, AC \subset \alpha$, 即 $b \subset \alpha$ 。

同理 $c \subset \alpha$, a, b, c, d 共面于 α 。

(2)若 a, b, c, d 四直线无三条直线共点,设 $a \cap b = A, a \cap c = B, b \cap c = C$,且相交直线 a, b 确定的平面为 α ,图象如图1-2-1-3所示。

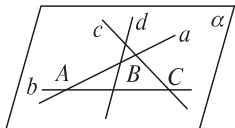


图1-2-1-3

$B \in a, a \subset \alpha, B \in \alpha$, 同理 $C \in \alpha, BC \subset \alpha$, 即 $c \subset \alpha$ 。同理 $d \subset \alpha$, a, b, c, d 共面于 α 。

综合(1)(2)可知 a, b, c, d 四线共面。

绿色通道 四条直线两两相交且不过同一点,但没有说明其中的三条直线是否交于一点,故应给予讨论。本例为证明线共面、线共点、点共线、点共面提供了很好的范例,即采用先证明两条直线共面,再证明其他直线也在这个平面内。

变式训练 如图1-2-1-4,已知直线 a, b, c 且 $a \parallel b \parallel c$, 直线 l 分别与 a, b, c 交于 A, B, C 三点,求证 a, b, c, l 共面。

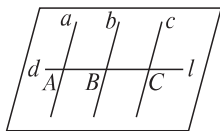


图1-2-1-4

证明 $a \parallel b$, a, b 确定一个平面 α , 即 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, A, B \in \alpha$ 。又 $d \cap a = A, d \cap b = B$, 而 $A, B \in d, d \subset \alpha$ 。同理可证 b, c 确定一个平面 $\beta, d \subset \beta$ 。

$b, d \subset \alpha, b, d \subset \beta$ 相交直线 b, d 只确定一个平面,所以 α, β 是同一个平面。所以直线 a, b, c, d 共面。

例2 用符号表示下列语句,并画出图形。

- (1)点 A 在平面 α 外,点 B 在平面 α 内,直线 l 经过点 A, B ;
- (2)直线 l 经过平面 α 外一点 P 。

答案 (1) $A \notin \alpha, B \in \alpha, A \in l, B \in l$, 图象如图1-2-1-5所示。

(2) $P \notin \alpha, P \in l$, 图象如图1-2-1-6和1-2-1-7所示。

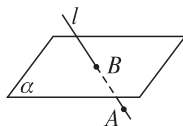


图1-2-1-5

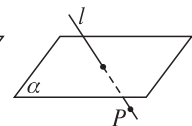


图1-2-1-6

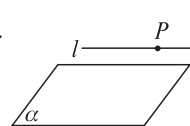


图1-2-1-7

绿色通道 立体几何中,点、线、面三者间的关系可以用三种语言进行表述,即文字语言、符号语言和图形语言。掌握好这三种语言是学好立体几何的基础。

变式训练 平面 α 和 β 的交线是 a , 直线 b 经过 α 内不在直线 a 上的点 P 且经过 β 内不在直线 a 上的点 Q , 用符号表示上面的语句,并画出图形。

答案 $\alpha \cap \beta = a, P \notin a, Q \notin a, P \in \alpha, Q \in \beta, P \in b, Q \in b$, 图象如图1-2-1-8所示。

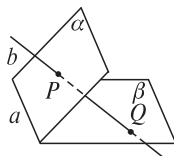


图1-2-1-8

例3 空间四点,能在同一个平面内吗?能确定一个平面吗?试作出示意图.

思路分析 首先按四点是否在同一直线上进行分类,然后对四点不在一直线上的情形再按三点是否在同一直线上的情形进行分类,直至任意三点均不共线而四点在同一平面内.

答案 (1)当四点共线时,这四点能在同一个平面内,但不能确定一个平面.示意图如图1-2-1-9所示.

(2)当且仅当四点中仅有三点共线时,这四点能在同一个平面内,并且能唯一确定一个平面.示意图如图1-2-1-10所示.

(3)任意三点均不共线时,如果四点共面,则四点能在同一平面内,且唯一确定一个平面,示意图如图1-2-1-11所示;如果四点不共面,则四点围成一个空间四边形,此时不能确定一个平面(这时也可以说确定了四个平面,示意图如图1-2-1-12所示).

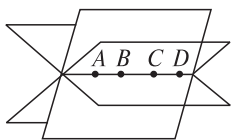


图 1-2-1-9

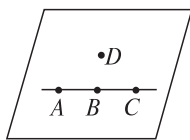


图 1-2-1-10

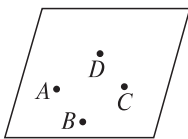


图 1-2-1-11

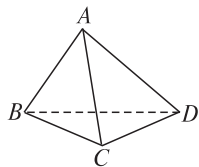


图 1-2-1-12

黑色陷阱 (1)忽视四点共平面的条件.

(2)不能对问题进行正确的分类,或者分类混乱,标准不一,或重或漏.

(3)画图空间感不足,缺乏一定的空间想象能力.

变式训练 在两个不重合的平面内,分别取2个点与3个点,则这些点最多可确定_____个平面.

思路解析 不妨设两平面分别为M、N,且在M平面内取2个点,N平面内取3个点.最多的情况应是这5点没有3点共线,也没有四点共面的情形.它包括:①N内取3点确定一个平面;②N内取2点与M内取的1点,确定了 3×2 ,计6个平面;③N内取1点与M内取2点,确定了 3×1 ,计3个平面.故最多可以有10个平面.

答案 10

问题探究

问题 有一种骰子,每一面上都有一个英文字母,图

1-2-1-13是从3种不同的角度看同一枚骰子的情形.通过探究你能准确地说出H反面的字母是什么吗?

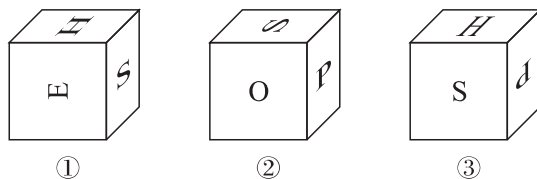


图 1-2-1-13

导思 解决问题的关键点在于能够把空间正方体的表面展开成一个平面图形,这种化空间为平面的解题思想是立体几何解题的一种基本思想.同时在学习立体几何时,可以借助实物模型培养自己的空间想象能力.

探究 H的反面是S,原正方体表面字母的排列如图1-2-1-14.

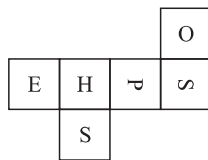


图 1-2-1-14

代数解法 由①设S的对立面为X,H的对立面为Y,E的对立面为Z.

若X、Y、Z中没有S,则由①②知S的相邻4个面分别为H、E、O、P,但由②③知S相邻的面中有两个不同的P,矛盾.

X、Y、Z中还有一个S即六个面是E、H、S、O、P、S的某种排列,与P相邻的面有S、O、H、S, P与E相对,即Z=P.

又由②③中P的倒置知②到③的变化中有一个翻转过程,知H的反面为S.

自主广场

我夯基 我达标

- 下列说法中,表示平面的是 ()
A. 桌面 B. 铅垂面
C. 笔直的马路 D. 平静的水面
- 下列说法正确的是 ()
A. 线段AB在平面 α 内,直线AB不会在 α 内
B. 平面 α 和 β 有时只有一个公共点
C. 三点确定一个平面
D. 过一条直线可以作无数个平面

3 给出下列四个命题:

- ①空间四点共面,则其中必有三点共线;