

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计. 数学. 必修 :II. 新课标人教 B 版/任志鸿 孟国泰主编. - 2 版.
-海口 :南方出版社 2004. 10(2006. 10 重印)
(志鸿优化系列丛书)
ISBN 7-80701-625-6

I. 高... II. ①任... ②孟... III. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 104603 号

责任编辑 余云华

装帧设计 邢 丽

志鸿优化系列丛书

高中同步测控优化设计·数学·必修:II

任志鸿 孟国泰 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编 570203 电话 0898 - 65371546

山东鸿杰印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2006 年 10 月第 4 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

开本 890 × 1240 1/16

印张 6 字数 161 千字

定价 9.50 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)



目录

content

第一章 立体几何初步	1	2.1.2 平面直角坐标系中的基本公式...	39
1.1 空间几何体	2	2.2 直线的方程	44
1.1.1 构成空间几何体的基本元素	2	2.2.1 直线方程的概念与直线的斜率...	44
1.1.2 棱柱、棱锥和棱台的结构特征	4	2.2.2 直线方程的几种形式	44
1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球	4	2.2.3 两条直线的位置关系	50
1.1.4 投影与直观图	9	2.2.4 点到直线的距离	50
1.1.5 三视图	9	2.3 圆的方程	56
1.1.6 棱柱、棱锥、棱台和球的表面积...	14	2.3.1 圆的标准方程	56
1.1.7 柱、锥、台和球的体积	14	2.3.2 圆的一般方程	56
1.2 点、线、面之间的位置关系	19	2.3.3 直线与圆的位置关系	61
1.2.1 平面的基本性质与推论	19	2.3.4 圆与圆的位置关系	61
1.2.2 空间中的平行关系	24	2.4 空间直角坐标系	67
1.2.3 空间中的垂直关系	28	2.4.1 空间直角坐标系	67
本章测评	34	2.4.2 空间两点的距离公式	67
第二章 平面解析几何初步	38	本章测评	72
2.1 平面直角坐标系中的基本公式	39	模块综合测评	76
2.1.1 数轴上的基本公式	39		

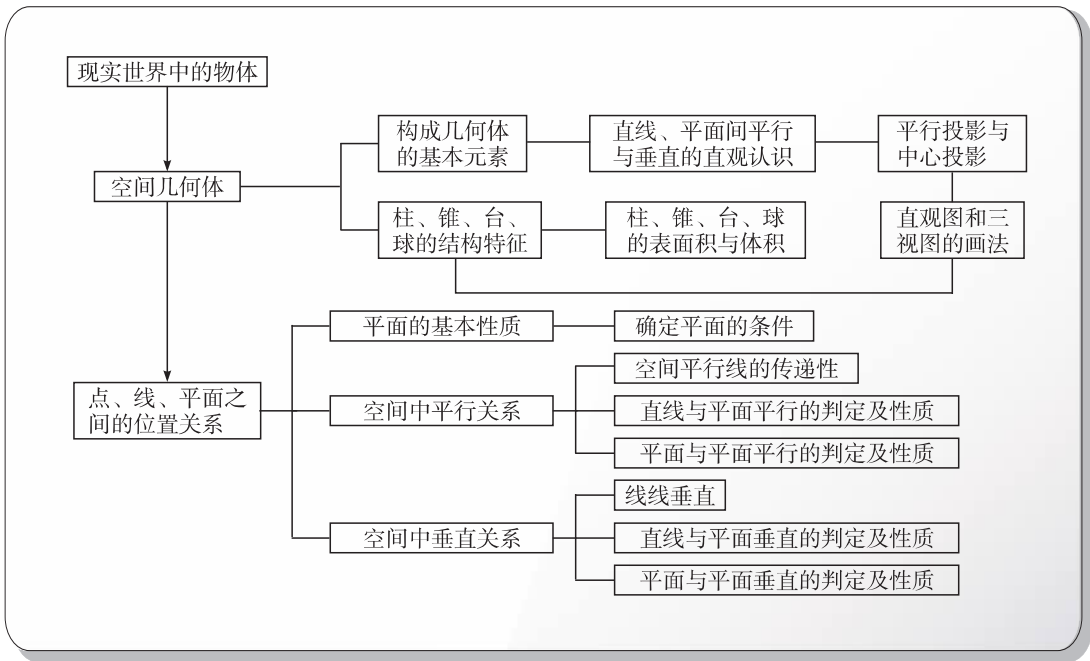
第一章 立体几何初步



三维目标

- 1. 通过生活中的实际例子引入空间几何体的相关概念,体现了由特殊到一般、由具体到抽象的理论形成过程.从而形成了立体几何的初步理论.而本章内容的整体思路体现了从点到线、从线到面、从面到体的基本研究思想.
- 2. 空间几何体的三视图和直观图从不同方面反应了几何体的特征,通过画三视图可以增强空间想象能力,而直观图不仅反映了几何体具有的特征,也为把立体图形在平面中表示的方法提供了依据.斜二测画法不仅是画几何图形的工具,也是立体几何理论的基础,它为空间几何体转化到平面中进行研究提供了可能.
- 3. 求几何体的体积是生活中经常遇到的问题,而体积也是几何体的一个重要特征,通过对体积的探讨不仅加深了对几何体特征的认识,体现了数学的应用价值,增强了对数学的感性理解,也体现了学习立体几何的必要性.
- 4. 在初中平面几何的基础上,通过对比与联想等方法总结出空间直线与平面之间的位置关系,进一步讨论平面与平面的关系则是对几何体知识的更深层次的细化,理解这一部分知识可以加强对几何体中某些元素的认识,实现了认识从表面到本质的飞跃.
- 5. 空间的平行与垂直关系与初中平面几何中的平行与垂直关系既有联系又有区别,空间的垂直与平行关系是几何体中某些局部元素性质的反应,也是把几何体抽象化后的结果.因此,无论线还是面都离不开相应的几何体,体现了事物之间互相联系的辩证唯物主义思想,也是人类认识世界的方法论基础.

知识网络



1.1 空间几何体

1.1.1 构成空间几何体的基本元素

知识梳理

1. 几何体

(1)如果只考虑一个物体占有空间部分的形状和大小,而不考虑其他因素,则这个空间部分叫做一个几何体.

(2)一个长方形包装箱,占有的空间部分就是一个几何体,叫做长方体.

2. 构成空间几何体的基本元素

(1)长方体由六个矩形(包括它的内部)围成,围成长方体的各个矩形,叫做长方体的面,相邻两个面的公共边叫做长方体的棱,棱和棱的公共点叫做长方体的顶点.

(2)空间并没有孤立的点、线、面,它们只是作为空间几何体的组成元素.

3. 空间点、线、面的特征

(1)线有直线(段)和曲线(段)之分,面有平面(部分)和曲面(部分)之分.平面是处处平直的面,而曲面不是处处平直的.

(2)在立体几何中,平面是无限延展的,通常画一个平行四边形来表示平面,并把它想象成无限延展的.

(3)在几何中,可以把线看成点运动的轨迹,如果点运动的方向始终不变,那么它的轨迹就是一条直线或线段.如果点运动的方向始终在变化,那么它的轨迹就是一条曲线或者曲线的一段.

(4)一条线运动的轨迹可以是一个面,面运动的轨迹可以形成一个几何体.

(5)直线平行移动可以形成平面或曲面.直线绕点转动,可以形成锥面.

知识导学

要学好本节内容,应从生活实际中引申出本节知识,所以,在学习这一部分之前可以先制作一些模型,先观察这些模型,进行总结,再得出相应的结论,然后再根据结论对照图形(比如:从最熟悉的长方体出发),加深对几何概念的理解,使理论和实际有机地结合在一起.对几何体的研究通常可以把它分解成基本元素进行研究,这为我们对复杂几何体的研究提供了方便.

对于点、线、面是构成几何体的基本元素可以利用下

列口诀加以记忆:

点动成线,线动成面,面动成体.

疑难突破

1. 为什么说点、线、面是构成几何体的基本元素?

剖析:在生活中,我们见到较多的是几何体,而不是单独的点、线、面.但是通过观察我们发现,每个几何体都是由点、线、面构成的.例如,我们熟悉的长方体是由顶点、面、棱构成的.而这些基本元素又都不是孤立的,它们互相联系,点在线上,线在面内,体现了几何体各部分之间的联系.在对几何体进行研究的时候既要对其构成它的基本元素进行分析,又不能把它们完全孤立起来,这也是研究几何体特征的基本思想.

2. 点动成线、线动成面、面动成体.

剖析:点、线、面是构成几何体的基本元素,点是最小的元素,它没有大小,是构成线的基本元素,而面可以看成由许多线组成的,由于直线是无限延伸的,没有长短和粗细之分,它构成的面就是无限延展的,且每一个面都是由无数条直线构成.几何体是我们生活中接触到的物体的抽象概括,它不但有大小,也有固定的形状,每个面还具有一定的形状和大小,因此几何体的每个面都是平面的一部分.在实际中,我们从运动变化的观点来看这些关系就形成了“点动成线、线动成面、面动成体”的意识.

典题精讲

例1 我们熟悉的正方体的每个面具有什么特点?它和一般的长方体具有什么关系?

思路解析:可以结合具体图形进行观察分析,自己用纸制作一个正方体形状的纸盒进行观察.

答案:正方体由六个面组成,它的每个面都是正方形,每条棱也都相等.它是长方体的一种特殊情况,与长方体的主要区别是:正方体的所有棱长相等,而长方体的棱长不一定相等;正方体的每个面都是正方形,而长方体的每个面都是矩形,不一定是正方形.

绿色通道 :长方体和正方体是生活中最常见的两种几何体,通过对它们的认识可以加深对几何体概念的理解.多观察它们的特点,学会分析一般几何体的特点.这就要求我们在生活中多留心观察一些实物,加深对感官世界的认识.

变式训练 1 我们见过的三棱锥由几个面组成?每个面具有什么特点?

思路解析 :三棱锥也是很常见的几何体,可以结合实际图形进行观察得出结论.

答案 :三棱锥由四个面组成,每个面都是三角形,其中三个面相交于一个顶点.

例 2 观察图 1-1-1-1,请指出它由哪些面和线组成?这些面和线具有什么特点?

思路解析 :图中的几何体的面中有三角形,也有四边形,它们相交组成几何体,交线就是几何体的棱.

答案 :图中的几何体由三个矩形和两个三角形组成.其交线共有 9 条,其中的两个三角形面互相平行,其余三个矩形面两两相交,其交线(即棱)互相平行.

黑色陷阱 :对立体几何图形的感知是学习立体几何的基础.在立体几何中通常用平行四边形表示平面,在实际图形中不能把它当成平行四边形来看待.如此题中若把图中的三个四边形只看成一般的平行四边形就会导致错误.

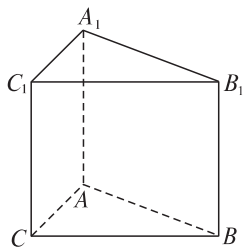


图 1-1-1-1

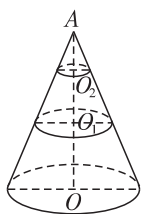


图 1-1-1-2

变式训练 2 图 1-1-1-2 中几何体由哪些面组成,这些面具有什么特点?

思路解析 :可以从不同的侧面观察得出相关结论.

答案 :图中几何体由两个面组成,一个是曲面,一个是平面,且是一个圆面.它们相交成一条曲线(即圆).

问题探究

问题 正方体的截面可能是什么形状的图形?

导思 对于正方体的分割,可通过实物模型,实际切割实验,还可借助于多媒体手段进行切割实验.对于切割所得的平面图形可根据它的定义进行证明,从而判断出

各个截面的形状.

探究 (1)截面可以是三角形:等边三角形、等腰三角形、一般三角形.从角的角度看,可以是锐角三角形,但不能是直角三角形、钝角三角形.

(2)截面可以是四边形:平行四边形、矩形、菱形、正方形、非直角梯形、等腰梯形.截面为四边形时,这个四边形至少有一组对边平行.

(3)截面可以是五边形:截面五边形必须有两组分别平行的边,同时有两个角相等.截面五边形不可能是正五边形.

(4)截面可以是六边形:截面六边形必须有分别平行的边,同时有两个角相等,可以是正六边形.

截面图形如图 1-1-1-3 中各图所示:

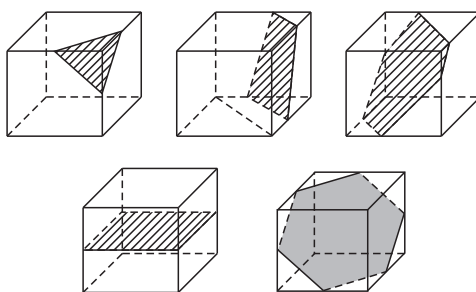


图 1-1-1-3

自主广场

我夯基 我达标

1 下列说法正确的是 ()

- A. 一个平面面积为 4 m^2
- B. 一条直线长为 5 cm
- C. 正方体的面是平面的一部分,而不是整个平面
- D. 三角形是一个平面

思路解析 :直线是无限延伸的,没有长短;平面是无限延展的,没有面积,没有厚度.根据这些性质,逐项进行排除可知选 C.

答案 :C

2 下列叙述中,一定是平面的是 ()

- A. 一条直线平行移动形成的面
- B. 三角形经过延展得到的平面
- C. 组成圆锥的面
- D. 正方形围绕一条边旋转形成的面

思路解析 :直线平行移动可以形成平面或曲面,只有在方向不变的情况下才能得到平面.

答案 :B

3 长方体中棱的条数是 ()

- A. 6
- B. 8
- C. 12
- D. 16

思路解析 :长方体有六个面,12 条棱.故选 C.

答案:C

- 4 一个棱锥至少含有的面的个数为 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

思路解析:本题考查棱锥的特征,棱锥至少是三棱锥,有三个侧面和一个底面,共4个面,故选C.

答案:C

- 5 请叙述一下立体几何中平面的基本特征.

思路解析:立体几何中的平面具有其特有的性质,要结合概念加以理解.

答案:立体几何中的平面是平的、无限延展的,没有大小和厚度,现实中所说的平面都是立体几何中平面的一部分,立体几何中的平面只能想象,在实际中通常用一个平行四边形来表示平面.

我综合我发展

- 6 如图1-1-1-4所示,画中的一朵花,有五片花瓣,下列叙述不正确的是 ()

- A. 花瓣由曲线组成
B. 图中组成花瓣的曲线相交于一点
C. 图中只有花柄是直线段组成的
D. 组成花瓣的曲线是无限延伸的

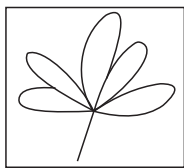


图1-1-1-4

思路解析:观察图中的花朵我们发现花瓣是由曲线组成的,而花柄是一条线段,这里所有的曲线也都是有一定长度的,而不是无限延伸的,故选D.

答案:D

- 7 下列说法正确的是 ()

- A. 生活中的几何体都是由平面组成的
B. 曲面都是有一定大小的
C. 直线是无限个点组成的,而线段是由有限个点组成的
D. 直线平移时不改变方向一定不可能形成曲面

思路解析:组成几何体的面既可以是平面,也可以是曲面;曲面也可以是无限延展的;直线和线段都是由无数个点组成的,故选D.

答案:D

- 8 把如图1-1-1-5的平面沿虚线折叠可以折叠成的几何体是

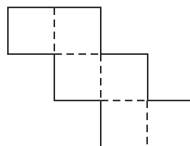


图1-1-1-5

思路解析:图1-1-1-5由六个正方形组成,可以实际进行折叠试验得出结论是正方体.

答案:正方体

- 9 动手制作一个熟悉的几何体,观察它的每个面的特点.

思路解析:(略)

答案:(略)

1.1.2 棱柱、棱锥和棱台的结构特征

1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球

知识梳理

1. 棱柱和圆柱统称为柱体.

(1)棱柱的本质特征:

①有两个面(所在平面)互相平行;②其余各面中每相邻两个面的公共边互相平行.

(2)棱柱的性质:

①棱的性质:侧棱都平行,并且长度都相等.②面的性质:侧面是平行四边形;两个底面平行,是全等多边形.平行于底面的截面与底面全等.

(3)圆柱的特征:

①有两个底面互相平行,且为形状、大小一样的圆;②侧面为曲面,展开为矩形.

2. 棱锥和圆锥统称为锥体.

(1)棱锥的本质特征:

①有一个面是多边形;②其余各面都是有一个公共

顶点的三角形.

(2)圆锥的特征:

①只有一个顶点,只有一个底面为圆面;②侧面为曲面,展开为扇形.

3. 棱台和圆台统称为台体.

(1)棱台的性质:

①棱的性质:侧棱延长之后,必相交于一点.②面的性质:侧面是梯形;两个底面平行,是全等的多边形.

(2)圆台的性质:

①上下底面平行,为半径不等的圆形;②侧面展开图为一个扇环.

4. (1)球面可以看作空间中到一个定点的距离等于定长的点的集合.

(2)球的性质:球被任意一个平面所截得的截面是一个圆面.

知识导学

本节知识是从生活实际中引申出来的,所以,在学习这一部分之前可以先制作一些模型,观察这些模型,进行总结,得出相应的结论,然后根据结论对照图形,加深对几何体性质的理解.

对于柱、锥、台体的形状特征可以利用下列口诀加以记忆:底面平行又全等,可能圆柱或棱柱;棱锥圆锥摘掉帽,一个台体就出炉.

对于台体的有关问题,可以结合锥体的性质解决,而不要把台体和锥体独立起来,有时候把台体补成一个锥体可以在锥体中进行计算.而面积较小的平面可以看成与锥体的一个与底面平行的截面,根据它们之间的相似比计算其中的元素,这是常用的处理方法.

四棱柱是最常见的一种棱柱,包括长方体与正方体,它们都是四棱柱的一种特殊情形.要注意特殊四棱柱的特殊性质及它们之间的联系.

球是平面图形圆在空间的延伸,因此在研究球的性质时,应注意与圆的性质的类比.球又是旋转体,由于旋转体是轴对称几何体,故解题时常利用它的轴截面图形,从而化空间问题为平面问题.熟练掌握大圆的半径、截面圆半径以及球心到截面圆圆心的距离的关系是解决有关球问题的关键.

疑 难 突破

1. 怎样解决与球有关的接、切问题?

剖析 解决与球有关的接、切问题时,一般作一个适当的截面,将问题转化为平面问题解决.这类截面通常指球的大圆、多面体的对角面等,在这个截面中应包括几何体的主要元素,且这个截面必须能反映出各元素之间的关系.

2. 锥体和台体之间的联系.

剖析 锥体和台体既有联系又有区别,台体可以看成锥体截掉一个小锥体后的几何体,是锥体的一部分,故可以把两种几何体的关系互相转化.锥体和台体是两种不同的几何体,它们的体积及表面积等的计算方法不同,各个面的形状也不一样,但是它们之间也是有联系的:台体是由锥体截得的,可以看成锥体的一部分,而不能理解成是把柱体的一个面的面积变小.只有通过和锥体的关系才能理解棱台侧棱的延长线相交于一点这一性质.根据锥体和台体的这一性质,在求与台体有关的问题时可以把它补成一个锥体.如用一个平行于底面的截面截掉一个小棱锥得棱台,而这个截面与底面是相似的平面图形,其面积的比等于对应高的平方比.根据这一关系可以解决很多与棱台有关的问题.

典 题 精讲

例 1 (1)命题“一个几何体有两个面平行,其余各

面为四边形,则此几何体为棱柱”是否正确?

(2)命题“一个几何体有两个面平行,其余各面为梯形,则此几何体为棱台”是否正确?

思路解析:严格结合棱柱、棱台的定义和性质来判定.

答案:(1)不正确,其余各面为四边形,不能反应出侧棱互相平行.如图 1-1-(2.3)-1 满足命题条件,但不是棱柱.

(2)不正确,此命题不能反映出侧棱延长后交于一点.如图 1-1-(2.3)-1 满足命题条件,但不是棱台.

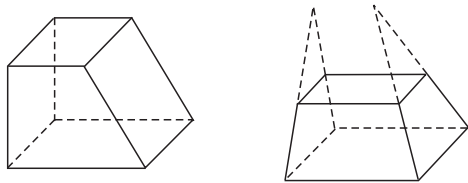


图 1-1-(2.3)-1

绿色通道 如果肯定一个命题成立,则需要严格证明,而否定一个命题成立,只要举出一个反例即可.

黑色陷阱 对于棱柱这一几何体的认识如果只停留在表面,则会在感官上产生错觉,比如例题解析中的反例就是认识中容易忽略的物体形状.

变式训练 1 下列命题正确的是 ()

- A. 有一个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- B. 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- C. 相邻两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- D. 底面是正多边形的棱柱是直棱柱

思路解析:主要看由条件能否得出侧棱与底面垂直的结论.要使侧棱与底面垂直,需要侧棱与底面内的两条相交直线垂直.这里只有 C 满足条件.

答案:C

例 2 棱台的上、下底面面积分别为 S_1, S_2 , 平行于底面的截面将棱台的侧面积分成 m, n 两部分,则截面面积为_____.

思路解析:设截面面积为 x ,截得棱台的大棱锥被上底面 S_1 的平面截下的小棱锥的侧面积为 p ,夹在 S_1 与 x 间的侧面积为 m ,夹在 x 与 S_2 之间的侧面积为 n ,则 $\frac{x}{S_1} = \frac{p+m}{p}$, 即 $\frac{x-S_1}{S_1} = \frac{m}{p}$. 又有 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{p+m+n}{p}$, 即 $\frac{S_2-S_1}{S_1} = \frac{m+n}{p}$. 两式相除,得 $\frac{x-S_1}{S_2-S_1} = \frac{m}{m+n}$, 所以 $\frac{x-S_1}{S_2-S_1} = \frac{m}{m+n}$, 即 $x = \frac{mS_2 + nS_1}{m+n}$.

答案: $\frac{mS_2 + nS_1}{m+n}$

绿色通道 如果题目中给出的量较为分散,应该先把这些量集中,最好是集中到某一个三角形中再求解。

变式训练 2 已知正三棱锥 $S-ABC$ 的高 $SO = h$, 斜高 $SM = 1$, 求经过 SO 的中点且平行于底面的截面 $\triangle A'B'C'$ 的面积。

解 连结 OA, OM , 在 $Rt\triangle SOM$ 中, $OM = \sqrt{1^2 - h^2}$, 因为棱锥 $S-ABC$ 是正棱锥, 所以点 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心, $AB = 2BM = 2OM \tan 60^\circ = 2\sqrt{3} \sqrt{1^2 - h^2}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 3(1^2 - h^2) = 3\sqrt{3}(1^2 - h^2).$$

因为 $\triangle A'B'C'$ 过 SO 的中点,

所以三棱锥 $S-A'B'C'$ 的高 $h' = \frac{1}{2}h$.

根据一般三棱锥的截面性质, 有 $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{h'^2}{h^2} = \frac{1}{4}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle A'B'C'} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1^2 - h^2).$$

例 3 2006 湖南高考 理 9 棱

长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图 1-1-(2.3)-2, 则图中三角形(正四面体的截面)的面积是...

..... () 图 1-1-(2.3)-2

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

思路解析 首先根据题中所给的平面图形画出相应的立体图形, 找出多面体的边长与球的半径之间的关系即可. 棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面为 $\triangle ABF$, 如图 1-1-(2.3)-3 所示, 则图中 $AB = 2$, E 为 AB 中点, 则 $EF \perp DC$, 在 $\triangle DCE$ 中, $DE = EC = \sqrt{3}$, $DC = 2$, $EF = \sqrt{2}$, 三角形 ABF 的面积是 $\sqrt{2}$.

答案 C

绿色通道 正四面体是一个重要的几何体, 由于其具有很好的对称性, 所以经常把它和球结合起来考查. 解决此类问题除了对几何体的性质有所了解之外, 还要有极强的空间想象能力, 掌握三维图形与二维图形的转化方法等。

变式训练 3 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都

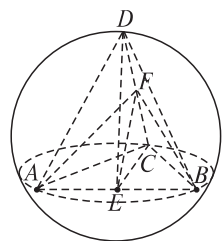
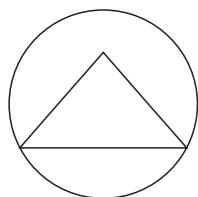


图 1-1-(2.3)-3

在同一个球面上, 则此球的直径为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

思路解析 此正八面体是每个面的边长均为 a 的正三角形, 所以由 $8 \times \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 2\sqrt{3}$, 知 $a = 1$, 则此球的直径为 $\sqrt{2}$.

答案 A

问题探究

问题 1 如图 1-1-(2.3)-4, 在正方形 $ABCD$ 中, 边长为 a , E, F, G, H 分别为四边 AB, BC, CD, DA 的中点. 请探究如下问题: 若沿 EF, FG, GH, HE 将四角折起, 试问能折成一个四棱锥吗? 为什么? 你从中能得到什么结论? 对于圆锥有什么类似的结论?

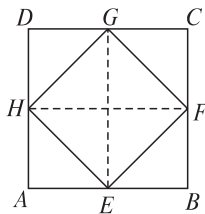


图 1-1-(2.3)-4

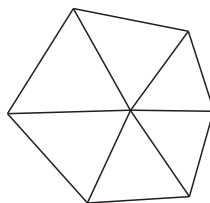


图 1-1-(2.3)-5

导思 把由平面围成的几何体沿着若干条棱剪开后, 几何体的各面就可展开在同一平面内, 得到一个平面多边形. 这个平面多边形就叫做这个几何体的表面展开图. 由于剪开的棱不同, 同一个几何体的表面展开图可以不是全等形, 但是, 无论怎样剪, 同一个多面体的表面展开图的面积是一样的. 这种把有关立体几何问题转化为平面几何问题的数学思想方法和类比思想方法是我们解决立体几何问题的重要思想方法。

棱锥的侧面展开图是由有一个公共顶点的若干个三角形组成的(三角形的个数与棱锥的侧棱数相同); 棱锥的展开图是侧面展开图拼接底面多边形组成的. 判断一平面展开图能否还原成棱锥的关键是先选好底面, 然后再将从底面各边出发的三角形沿顶点折起, 若各个顶点能重合且位于平面多边形外, 则能构成棱锥, 否则将不能构成棱锥。

探究 连结 EG, FH 将正方形分成四个一样的小正方形. 若将正方形 $ABCD$ 沿 EF, FG, GH, HE 折起, 则四个顶点必重合于正方形的中心, 故不能折成一个四棱锥。

由此我们可以推想:

(1) 所有棱锥的侧面三角形上以公共顶点为顶点的所有角之和必小于 360° ;

(2) 所有棱锥的侧面展开图不可能是一个有公共顶点在一个多边形内部的图形(如图 1-1-(2.3)-5 所示)。

另外,对于圆锥我们有下列猜测:

圆锥的侧面展开图一定是一个扇形,绝不可能是圆,但可以是一个半圆.

问题2 在图1-1-(2.3)-6中, M, N 是圆柱体的同一条母线上分别位于上、下底面上的两点,若从 M 点绕圆柱体的侧面到达 N , 沿怎样的路线路程最短?

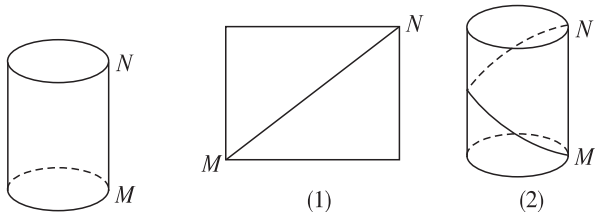


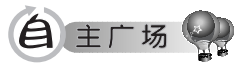
图 1-1-(2.3)-6

图 1-1-(2.3)-7

导思:几何体表面上的最短线路问题是立体几何中的典型问题,是沟通立体几何与平面几何的途径题目,体现了解决立体几何问题的主要思想,就是将空间问题转化为平面问题.

对于圆柱、圆锥、圆台这些旋转体,通常利用侧面展开图解决.对于棱柱、棱锥、棱台这些多面体,通常把多面体展到平面上,然后在平面上求两点间的距离.

探究:首先注意题目中的“绕”字,这要求所求路径从俯视的角度看应该成为一个圆.沿圆柱体的母线 MN 将圆柱的侧面剪开铺平,得出圆柱的侧面展开图,如图1-1-(2.3)-7(1)所示.从 M 点绕圆柱体的侧面到达 N 点,实际上是从侧面展开图的长方形的一个顶点 M 到达不相邻的另一个顶点 N ,而两点间以线段的长度最短.所以最短路线就是侧面展开图中长方形的一条对角线.如图1-1-(2.3)-7(2)所示.



我夯基 我达标

1 平行六面体的两个对角面都是矩形,且底面又是正方形,则此平行六面体一定是 ()

- A. 直平行六面体 B. 正四棱柱
C. 长方体 D. 正方体

思路解析:根据两个对角面是矩形可知侧棱和底面垂直,所以首先是直四棱柱,再根据底面是正方形可知是正四棱柱.

答案:B

2 下列判断正确的是 ()

- A. 平行于圆锥某一母线的截面是等腰三角形
B. 平行于圆台某一母线的截面是等腰梯形
C. 过圆锥顶点的截面是等腰三角形
D. 过圆台上底面中心的截面是等腰梯形

思路解析:根据圆锥与圆台的定义和图形进行判断

即可.

答案:C

3 2006 浙江高考 8 如图1-1-(2.3)-8,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都是2, E, F 分别是 AB, A_1C_1 的中点,则 EF 的长是 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

思路解析:取 AC 的中点 G ,连结 EG, FG ,则易得 $FG=2, EG=1$,故 $EF=\sqrt{5}$.

答案:C

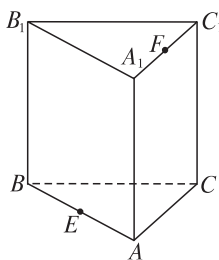


图 1-1-(2.3)-8

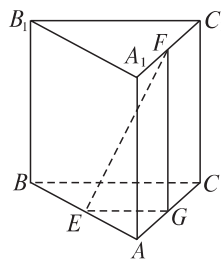


图 1-1-(2.3)-9

4 水平桌面 α 上放有4个半径均为 $2R$ 的球,且相邻的球都相切(球心的连线构成正方形).在这4个球的上面放1个半径为 R 的小球,它和下面4个球恰好都相切,则小球的球心到水平桌面 α 的距离是

思路解析:5个球心组成一个正四棱锥,这个正四棱锥的底面边长为 $4R$,侧棱长为 $3R$,求得它的高为 R ,所以小球的球心到水平桌面 α 的距离是 $3R$.

答案: $3R$

5 如图1-1-(2.3)-10,圆锥底面半径是6,轴截面顶角是直角,过两条母线的截面 SCB 截去底面圆周的 $\frac{1}{6}$,求截面面积.

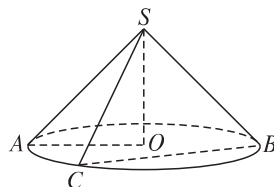


图 1-1-(2.3)-10

思路分析:截面问题的图形一般较为复杂、难读,要正确识图,寻找各量之间的关系.

解:由题知,轴截面顶角 $\angle ASB = 90^\circ$, $OA = 6$,
 $SA = SB = SC =$

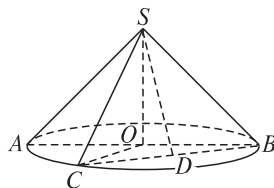


图 1-1-(2.3)-11

$6\sqrt{2}$. 连结 OB, OC , 弧 BC 的长为底面圆周长的 $\frac{1}{6}$,

$\angle BOC = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$, $OB = OC = BC = 6$.

$SD = \sqrt{72 - 9} = 3\sqrt{7}$, $S_{\triangle SCB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{7} = 9\sqrt{7}$.

6 如图1-1-(2.3)-12,圆锥和一个球面相交,球心在圆锥的顶点,球半径等于圆锥的高,若圆锥的侧面被球与圆锥的交线所平分,求圆锥的高与母线间夹角 α

的大小.

思路分析: 可以根据圆锥和球的对称性, 画出对应的轴截面图, 分析计算出圆的侧面和相交部分的关系.

解: 由题图知 $\triangle VAB$ 是轴截面, 设 VB 交 $\odot V$ 于 C , 作 $CD \perp VO$ 于 D , 图 1-1-(23)-12 记 $VO = h$, 由已知 $\angle AVO = \alpha = \angle BVO$, $VO = h = VB \cos \alpha$, $VB = \frac{h}{\cos \alpha}$.

又 $BO = h \tan \alpha$, $CD = VC \sin \alpha = VO \sin \alpha = h \sin \alpha$, 根据题意, 小圆锥侧面积是大圆锥侧面积的一半, 可列出方程 $\pi \cdot CD \cdot VC = \frac{1}{2} \pi \cdot BO \cdot VB$, 即 $h \sin \alpha \cdot h = \frac{1}{2} h \tan \alpha \cdot \frac{h}{\cos \alpha}$, 化简可得 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 根据实际情况, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\alpha = 45^\circ$.

我综合我发展

- 7 已知圆锥的母线长为 l , 底面半径为 R , 如果过圆锥顶点的截面面积的最大值是 $\frac{1}{2}l^2$, 则 ()

- A. $\frac{R}{l} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{R}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{R}{l} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{R}{l} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

思路解析: 因为 $\frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{2}l^2 \sin 90^\circ$, 所以圆锥轴截面顶角大于等于 90° , 据此求解即可.

答案: C

- 8 长方体一个顶点上三条棱的长分别为 a, b, c (a, b, c 两两不等), 一条对角线为 AB , 长方体的表面上 A, B 两点间的最短路程为 $\sqrt{a^2 + (b+c)^2}$, 则 a, b, c 的大小关系是_____.

思路解析: 求在长方体表面上从 A 到 B 的最短路程, 由于长方体的对称性, 可从以下三种实现方式 (如图 1-1-(23)-13) 中比较获得:

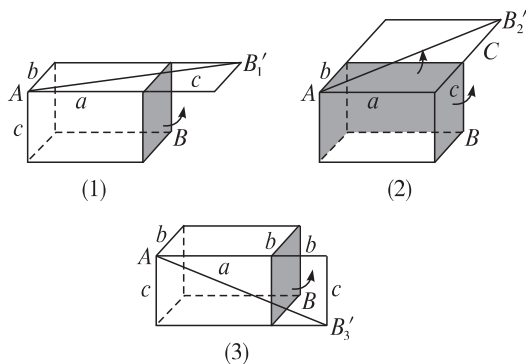
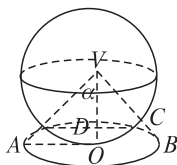


图 1-1-(23)-13



$$(1) AB_1' = \sqrt{b^2 + (a+c)^2};$$

$$(2) AB_2' = \sqrt{a^2 + (b+c)^2};$$

$$(3) AB_3' = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}.$$

由已知最短路程为第(2)种情况下获得:

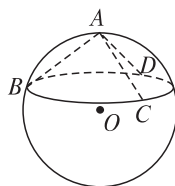
$AB_1' > AB_2'$ 且 $AB_3' > AB_2'$.

而 AB_1' 与 AB_3' 大小关系不定,

可知 a, b, c 的关系为 $2ac > 2bc$ 且 $2ab > 2bc$ 与 $2ab$ 不定, 即 $a > b$ 且 $a > c$, b, c 关系不定.

答案: $a > b$ 且 $a > c$, b, c 关系不定

- 9 如图 1-1-(23)-14 过球 O 的表面上一点 A , 引三条长度相等的弦 AB, AC, AD , 且两两夹角都是 2α . 若球的半径为 R , 求弦 AB 的长.



思路分析: 由于 $AB = AC = AD$, 图 1-1-(23)-14 B, C, D 也在球面上, 过 B, C, D 可有一圆面.

因为三弦两两夹角均为 2α , 故 $BC = CD = DB$, $\triangle BCD$ 为正三角形, $A-BCD$ 形成一个正三棱锥, $\triangle BCD$ 的中心 O_1 也是底面 BCD 所在圆的圆心, 且 $OO_1 \perp$ 平面 BCD .

求 AB 弦长, 即为求三棱锥的侧棱长, 从球转化到棱锥, 即可找到解题办法.

解: 连结 BC, CD, BD , 作球的直径 AOE , 连结 BE . 设 AE 与截面 BCD 的交点为 O_1 , 连结 BO_1 , 则 $\angle ABE = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC = AD \\ \angle BAC = \angle CAD = \angle BAD \end{array} \right\} \Rightarrow BC = CD = BD,$$

从而可得 O_1 是正 $\triangle BCD$ 的

中心, $AO \perp$ 平面 BCD .

设 $AB = x$, $AO_1 = h$, 则 $BC =$

$$2x \sin \alpha, BO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2x \sin \alpha =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}x \cdot \sin \alpha.$$

图 1-1-(23)-15

在 $Rt\triangle AO_1B$ 中, $AO_1^2 = AB^2 - O_1B^2$,

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x \sin \alpha\right)^2.$$

又由直角三角形射影定理, 得 $x^2 = 2R \cdot h \rightarrow h^2 =$

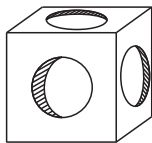
$$\frac{x^4}{4R^2}, \frac{x^4}{4R^2} = x^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x \sin \alpha\right)^2,$$

$$x^2 = \frac{4}{3}R^2(3 - 4\sin^2 \alpha), x = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha},$$

即弦 AB 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}R \sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}$.

- 10 图 1-1-(23)-16 中的几何体是一棱长为 4 厘米的正方体, 若在它的各个面的中心位置上各打一个直径为 2 厘米、深为 1 厘米的圆柱形的孔, 求打孔后几何体的表面积是多少? ($\pi = 3.14$)

思路分析:因为正方体的棱长为4厘米,而孔深只有1厘米,所以正方体没有被打透.打孔后所得几何体的表面积等于原来正方体的表面积,再加上六个完全一样图1-1-(23)-16的圆柱的侧面积.这六个圆柱的高为1厘米,底面圆的半径为1厘米.



解:正方体的表面积为 $16 \times 6 = 96$ (平方厘米),
一个圆柱的侧面积为 $2\pi \times 1 \times 1 = 6.28$ (平方厘米),
几何体的表面积为 $96 + 6.28 \times 6 = 133.68$ (平方厘米).
所以几何体的表面积为 133.68 平方厘米.

1.1.4 投影与直观图

1.1.5 三视图

知识梳理

1. 用平面图形表示空间图形的方法

(1)平行投影:所有的投射光线都互相平行,这样的投影称为平行投影.

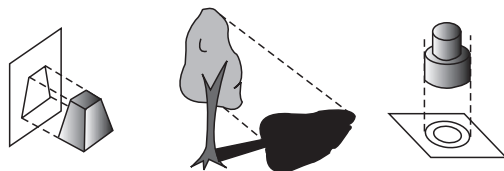


图 1-1-(45)-1

(2)中心投影:投射光线汇交于一点的投影叫中心投影.

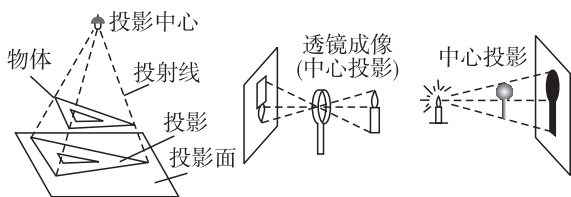


图 1-1-(45)-2

2. 平行投影的性质

- (1)直线或线段的平行投影是直线或线段.
- (2)平行直线的平行投影是平行或重合的直线.
- (3)平行于投射面的线段,它的投影与这条线段平行且相等.
- (4)与投射面平行的平面图形,它的投影与这个图形全等.
- (5)在同一直线或平行直线上,两条线段平行投影的比等于这两条线段的比.

3. 平行投影的应用

(1)斜二测画法:画图时, Oz 轴铅直放置, Ox 轴水平放置, Oy 轴与水平线成 45° 角,凡平行于 x 轴和 z 轴的线

段按1:1量取,平行于 y 轴的线段按1:2量取.

(2)正等测画法:画圆的直观图时使用(了解即可).

4. 三视图

(1)正投影:在物体的平行投影中,如果投射线和投射面垂直,则称这样的平行投影为正投影.

(2)正投影除了具有平行投影的性质外,还具有下列性质:

- ①垂直于投射面的直线或线段的正投影是点.
- ②垂直于投射面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分.

(3)通常都是选择三个两两垂直的平面作为投射面.一个投射面水平放置,叫做水平投射面.投射到这个面的图形叫做俯视图.一个投射面放置在正前方,这个投射面叫做直立投射面.投射到这个面的图形叫做主视图.和直立、水平两个投射面都垂直的投射面叫做侧立投射面.通常把这个平面放置在直立投射面的右面,投射到这个面的图形叫做左视图.将空间图形向这三个平面作正投影,然后把这三个正投影按一定的布局放在一个平面内,这样构成的图形叫做空间图形的三视图.

知识导学

正投影是反映立体几何性质的一个重要概念,也是用平面图形表示空间图形的基础.要学会画正投影,结合实际几何体进行观察加深对这一部分知识的认识.

对于三视图需要理解其含义,而几何体直观图的画法,主要掌握斜二测画法的规则,在理解的基础上加以应用,也可以通过实际图形加深对几何体及空间概念的认识.

疑难突破

1. 画物体三视图的作图步骤是什么?

剖析:(1)根据物体的复杂程度及大小,确定图幅和比例;

(2)确定主视图的观察方向(使其主要表面平行或垂直于投影面,能表达更多的结构形状);

(3)布置各视图的位置(画出基准线、对称中心线、轴线);

(4)按照三等规律画其三视图(可见轮廓线画实线,不可见轮廓线画虚线);

(5)校核有无错漏,擦去多余线条;

(6)按标准图线加深视图,顺序为:圆形、圆弧、水平线、垂直线、斜线。

2. 学习立体几何知识时需要注意运用哪些重要的数学方法?

剖析:立体几何是初中平面几何的延续和扩充.空间图形中的一些元素的计算都可以依据平面几何中的一些结论和方法来解决.因此,等价转化的数学思想贯穿整个立体几何的始终.立体几何知识是建立在平面几何知识基础上的,因此把立体几何问题通过化归的数学思想转化为平面几何问题来解决是学好立体几何的基本方法.教材中处处都渗透了这种转化的数学思想,比如通过三视图(平面图形)来表示空间图形,通过几何体的侧面展开求表面积等。

3. 由物体的三视图确定物体的空间形状。

剖析:一个物体的三视图从不同侧面反映了物体的基本特征,要根据三视图确定物体的形状,首先要理解三视图及其特点、从各个面所体现的投影,并运用空间想象能力对三视图进行分析,还要结合具体实际进行判断,因为同样的三视图对应的几何体不一定只有一个.这就要求我们平时多训练观察事物、总结规律的能力.对于一些由多个几何体构成的几何体更应该多观察,分析每一部分的特点,得出相应的结论。

要确定物体的空间形状,至少要有三面投影.如图1-1-(4.5)-3.

这三个互相垂直的投影面,称为三面投影体系,其中:正立投影面,简称正立面,用“V”标记;侧立投影面,简称侧立面,用“W”标记;水平投影面,简称水平面,用“H”标记.三投影面之间两两的交线,称为投影轴,分别用 Ox 、 Oy 、 Oz 表示,三根轴的交点 O 称为原点。

现将物体放在三面投影体系中,将物体分别向三个投影面作投影,就得到物体的三视图.注意:三视图是以正投影法为依据的,但具体绘制时,是用人的视线代替投影线的.将物体向三个投影面作投影,即从三个方向去观看,从前向后看,即得V面上的投影,称为主视图;从左向

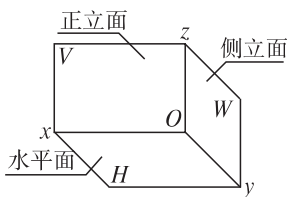


图 1-1-(4.5)-3

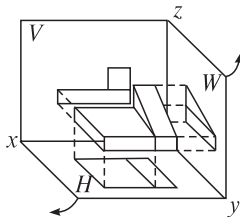


图 1-1-(4.5)-4

右看,即得在W面上的投影,称为左视图;从上向下看,即得在H面上的投影,称为俯视图.如图1-1-(4.5)-4.

为使三视图位于同一平面内,需将三个互相垂直的投影面摊平.方法:V面不动,将H面绕 Ox 轴向下旋转 90° ,W面绕 Oz 轴向右旋转 90° ,如图1-1-(4.5)-5.

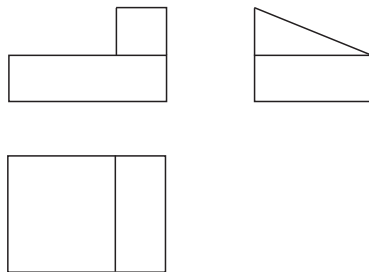


图 1-1-(4.5)-5

三视图的投影关系:

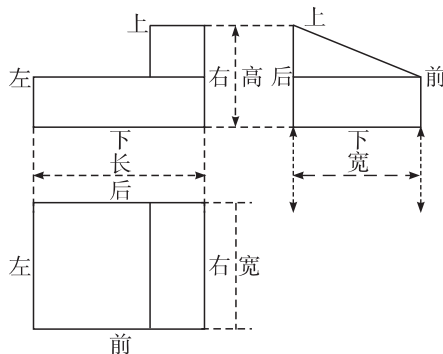


图 1-1-(4.5)-6

由三视图可以看出,俯视图反映物体的长和宽,正视图反映它的长和高,左视图反映它的宽和高.因此,物体的三视图之间具有如下的对应关系:

主视图与俯视图的长度相等,且相互对正,即“长对正”;
主视图与左视图的高度相等,且相互平齐,即“高平齐”;
俯视图与左视图的宽度相等,即“宽相等”。

在三视图中,无论是物体的总长、总宽、总高,还是局部的长、宽、高都必须符合“长对正”“高平齐”“宽相等”的对应关系。

典题精讲

例1 画出下列几何体(如图1-1-(4.5)-7)的三视图。

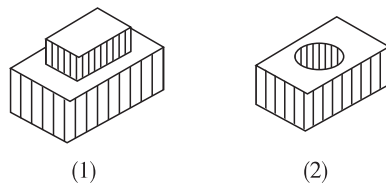


图 1-1-(4.5)-7

思路解析:首先确定正视图的观察方向,然后根据作图步骤画图即可。

答案:(1)三视图如图 1-1-(4 5)-8 所示.

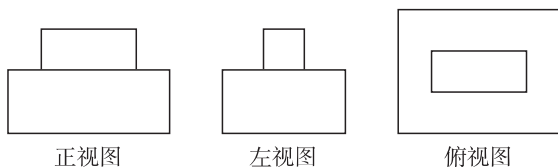


图 1-1-(4 5)-8

(2)三视图如图 1-1-(4 5)-9 所示.

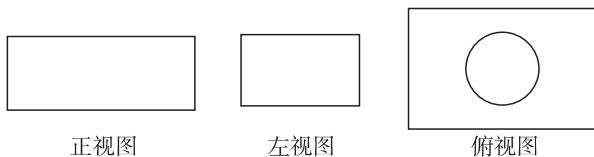


图 1-1-(4 5)-9

绿色通道 画三视图首先要认真观察几何体的特点,根据几何体的特点,结合画三视图的步骤即可.

变式训练 1 画出右图(如图 1-1-(4 5)-10)的三视图.

思路解析 根据三视图的定义,分别从不同方位观察图形的特征,画出对应的图形.

图 1-1-(4 5)-10

答案:三视图如图 1-1-(4 5)-11 所示:

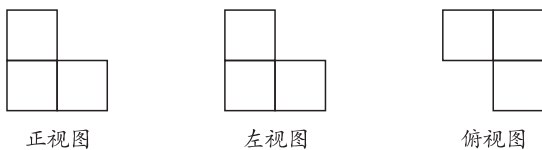


图 1-1-(4 5)-11

例 2 小明设计了某个产品的包装盒,如图 1-1-(4 5)-12,但是少设计了其中一部分,请你把它补上,使其能成为两边均有盖的正方体盒子.

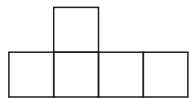


图 1-1-(4 5)-12

你能有几种弥补的办法?

思路解析 观察图形可以看出,这个正方体盒子的四个侧面和上底面已经有了,缺少一个下底面,可以有四种弥补方法.

答案:4

绿色通道 能正确识别平面图形与空间图形并能相互转化是具有良好的空间想象能力的重要体现.

变式训练 2 任意画出例 2 中一种成功的设计图.

思路解析 根据所给图形进行观察,画出一中可能的

图形即可.

答案:设计如图 1-1-(4 5)-13.

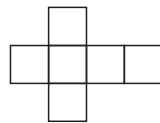


图 1-1-(4 5)-13

问题探究

问题 1 旋转体的三视图有哪些特征?是否存在主视图、俯视图、左视图完全相同的几何体?

导思 要画出旋转体的三视图,一要明确常见旋转体的定义,即分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴,其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫作圆柱、圆锥、圆台;二要明确三视图的规则要求.

探究 旋转体是平面图形绕轴旋转而构成的几何体,这就决定了旋转体的三视图具有共同特征:当旋转轴为竖直方向时,旋转体的主视图与左视图相同,即旋转体的轴截面,而俯视图都是圆面或圆环面.

存在三视图中主视图、左视图、俯视图完全相同的几何体,如正方体、球等.

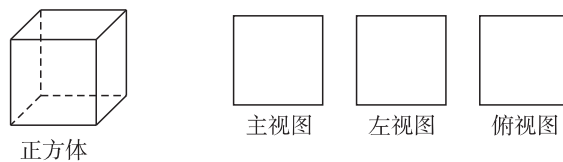


图 1-1-(4 5)-14

问题 2 用小立方块搭一个几何体,使得它的主视图和俯视图如图 1-1-(4 5)-15 所示,这样的几何体只有一种吗?它至少需要多少个小立方块?最多需要多少个立方块?

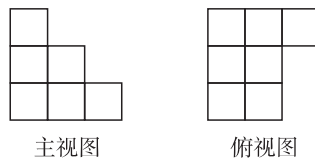


图 1-1-(4 5)-15

导思 根据两视图可以估测到物体的形状,如果是三视图就可得到具体的物体形状.

探究 用三视图抽象出几何体的形状,由俯视图可知此几何体应是有三行和三列,且第三列的第一、二行都没有小立方块,其余的各行各列都有小立方块,再根据主视图,第一列中有一行是三层,第二列中至少有一行是二层,第三列最少要 10 个小立方块,最多要 16 个小立方块,应注意如何根据几何体的三视图,想象出空间物体的结构形状.



我夯基 我达标

- 1 甲、乙、丙、丁四人分别面对面坐在一张四边形桌子旁边,桌上一张纸上写着数字“9”,甲说他看到的是“6”,乙说他看到的是“6”,丙说他看到的是“6”,丁说他看到的是“9”,则下列说法正确的是 ... ()

A. 甲在丁的对面,乙在甲的左边,丙在丁的右边
 B. 丙在乙的对面,丙的左边是甲,右边是乙
 C. 甲在乙的对面,甲的右边是丙,左边是丁
 D. 甲在丁的对面,乙在甲的右边,丙在丁的右边

思路解析: 可以从每个人观察的角度进行分析.

答案: D

- 2 有一个正方体,在它的各个面上分别标上字母 A、B、C、D、E、F,甲、乙、丙三位同学从不同的方向去观察这个正方体,观察结果如图 1-1-(45)-16 所示. 问这个正方体中 F 的对面是 _____, E 的对面是 _____, D 的对面是 _____.

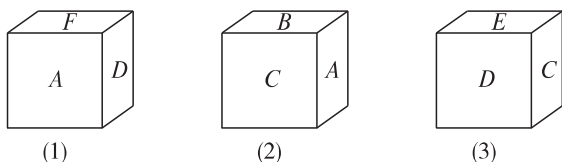


图 1-1-(45)-16

思路解析: 此题解决问题的关键在于能够把空间正方体的表面展开成一个平面图形,这种化空间为平面的解题思想是立体几何的一种基本思想,还要有较强的空间想象能力.

答案: C A B

- 3 画一个底面边长为 5 cm,高为 11.5 cm 的正五棱锥的直观图,比例尺为 1:5.

思路解析: 画正五棱锥的直观图只需根据斜二测画法,选择恰当的坐标系画出正五边形的直观图,进而确定出正五棱锥的顶点即可.

答案: 画法: (1)画轴: 画 x' 轴、 y' 轴、 z' 轴,记坐标原点为 O' ,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$,使 $\angle x'O'z' = 90^\circ$;

(2)画底面: 画 x' 轴、 y' 轴画边长为 1 cm 的正五边形的直观图 ABCDE,并使正五边形的中心对应点 O' ;

(3)画高线: 在 z' 轴上取 $O'S = \frac{11.5}{5} = 2.3(\text{cm})$;

(4)成图: 顺次连结 SA、SB、SC、SD、SE,并加以整理(去掉辅助线,并将被遮住的部分改为虚线),就得到正五棱锥的直观图.

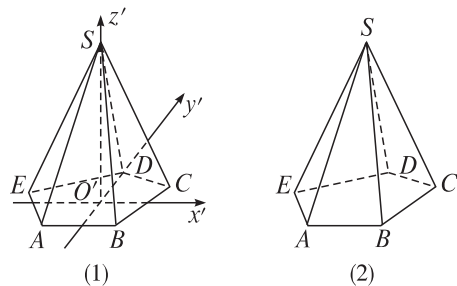


图 1-1-(45)-17

- 4 要将一个正方体模型展开成平面图形,需要剪断多少条棱? 你的结论可以作为一条规律来用吗?

思路解析: 正方体有 6 个面,所以展开后的平面图形只要 5 条棱相连就可以了.

答案: 需要剪断 7 条棱.

因为正方体有 6 个面,12 条棱,两个面有一条棱相连,展开后六个面就有 5 条棱相连,所以剪断 7 条棱. 规律是正方体的平面展开图只能有 5 条棱相连,但是,有 5 条棱相连的 6 个正方形图形不一定是正方体的平面展开图.

我综合 我发展

- 5 由一些大小相同的小正方体组成简单几何体的主视图和俯视图如图 1-1-(45)-18 所示.

(1)请你画出这个几何体的左视图;

(2)若组成这个几何体的小正方体的块数为 n ,请你写出 n 的所有可能值.

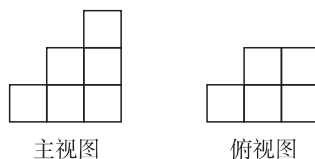


图 1-1-(45)-18

思路解析: 给出一个几何体的三视图,原几何体的形状不唯一确定,在本题中只知道主视图、俯视图,那么几何体可能有较多的情况.

答案: 现在在俯视图中,按主视图的图形填上符合条件的每个位置上小正方体的块数,共有如下 15 种可能:

<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		2	3	1	2	3	<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>		2	3	1	2	2	<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>		2	3	1	2	1	<table><tr><td></td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		2	2	1	2	3	<table><tr><td></td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		2	1	1	2	3
	2	3																																
1	2	3																																
	2	3																																
1	2	2																																
	2	3																																
1	2	1																																
	2	2																																
1	2	3																																
	2	1																																
1	2	3																																
①	②	③	④	⑤																														
<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>		2	3	1	1	3	<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>		2	3	1	1	2	<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>		2	3	1	1	1	<table><tr><td></td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>		2	2	1	1	3	<table><tr><td></td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>		2	1	1	1	3
	2	3																																
1	1	3																																
	2	3																																
1	1	2																																
	2	3																																
1	1	1																																
	2	2																																
1	1	3																																
	2	1																																
1	1	3																																
⑥	⑦	⑧	⑨	⑩																														
<table><tr><td></td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		1	3	1	2	3	<table><tr><td></td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>		1	3	1	2	2	<table><tr><td></td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>		1	3	1	2	1	<table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		1	2	1	2	3	<table><tr><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>		1	1	1	2	3
	1	3																																
1	2	3																																
	1	3																																
1	2	2																																
	1	3																																
1	2	1																																
	1	2																																
1	2	3																																
	1	1																																
1	2	3																																
⑪	⑫	⑬	⑭	⑮																														

图 1-1-(45)-19

根据这 15 种情况可以画出左视图共有 5 种情况,同时也可以确定组成这个几何体所需要的小正方体块数.

(1)左视图共有如下 5 种情况:

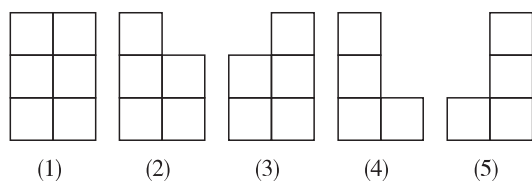


图 1-1-(4 5)-20

图①、⑥、⑪的左视图如图(1)所示;图②、③、⑦、⑫、⑬的左视图如图(2)所示;图④、⑤、⑨、⑩、⑭的左视图如图(3)所示;图⑧的左视图如图(4)所示;图⑮的左视图如图(5)所示.

(2)①中 $n=11$; ②中 $n=10$; ③中 $n=9$; ④中 $n=10$; ⑤中 $n=9$; ⑥中 $n=10$; ⑦中 $n=9$; ⑧中 $n=8$; ⑨中 $n=9$; ⑩中 $n=8$; ⑪中 $n=10$; ⑫中 $n=9$; ⑬中 $n=8$; ⑭中 $n=9$; ⑮中 $n=8$. 所以 n 的值为 8, 9, 10, 11.

- 6 图 1-1-(4 5)-21(1)中的几何体是一个正方体,图 1-1-(4 5)-21(2)是这个正方体的一个平面展开图,图 1-1-(4 5)-21(a)、(b)、(c)也是这个正方体的平面展开图,但每一展开图上都有四个面上的图案没画出来,请你给补上.

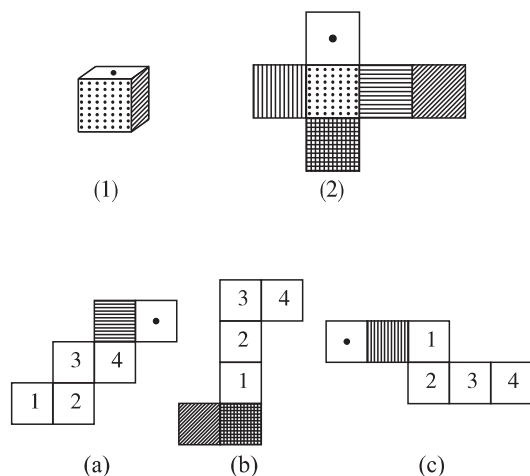


图 1-1-(4 5)-21

思路解析 根据几何体的特点和三视图的画法进行画图. 答案 图(a)、(b)、(c)标有数字的空白面上的图案见下图中的(a)、(b)、(c).

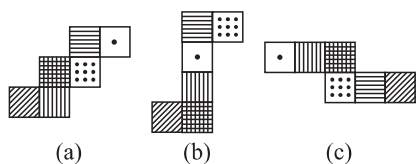


图 1-1-(4 5)-22

- 7 欣赏世界各地著名建筑的图片,结合学过的知识讨论它们有哪些结构特征.



(1)

(2)



(3)



(4)



(5)



(6)



(7)



(8)

图 1-1-(4 5)-23

思路解析 可以从不同角度,仔细观察图中图形的特点,把具体的建筑物进行抽象,总结出所具有的特点. 答案:(1)~(8)分别是圆台、棱锥、长方体、棱柱、球体、圆柱、圆柱和圆锥、五棱柱.

1.1.6 棱柱、棱锥、棱台和球的表面积

1.1.7 柱、锥、台和球的体积

知识梳理

1. 柱体、锥体、台体的表面积公式

圆柱表面积: $S_{\text{圆柱}} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r(r + l)$.

$S_{\text{直棱柱侧}} = ch$.

圆锥表面积: $S_{\text{圆锥}} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l)$. $S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2}ch'$.

圆台表面积: $S_{\text{圆台}} = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$. $S_{\text{正棱台侧}} = \frac{1}{2}(c + c')h$.

2. 柱体、锥体、台体的体积公式

$V_{\text{柱}} = Sh$, $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 为棱(圆)柱的底面积, h 为棱(圆)柱的高.

$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S'S'} + S')$, 其中 S, S' 分别为台体的两底面面积, h 为台体的高.

3. 球的体积与球面面积公式

$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S_{\text{球面}} = 4\pi R^2$, 其中 R 为球的半径.

知识导学

球的体积公式的推导过程不要求准确掌握,但需要理解推导过程中所用的基本数学思想,即“分割——求和——化为准确和”这一重要数学思想方法,它是极限思想的一种体现,也是进一步学习微积分和近代数学知识的基础.

疑难突破

1. 柱体、锥体、台体的表面积

剖析:求柱体、锥体、台体的表面积一般可以把它所有的面的面积相加即可,也即侧面积与底面积的和.在求侧面积的时候除了把所有侧面相加之外,还可以利用侧面的展开图,根据展开图的形状求侧面积,会使计算更加简单.例如,圆柱的侧面展开图是一个矩形,圆锥的侧面展开图是一个扇形等.在求表面积时一定要根据实际图形决定采用哪种方法.

2. 球的表面积和体积公式的推导

剖析:球是由一个曲面组成的,利用现有高中知识无法把它展开成一个平面,不能使用平面求面积的方法计算其面积.在对公式进行推导的时候采用了极限的思想,即把球进行分割,求分割后每一部分面积的和,分割越细,求值越精确,当无限分割的时候就得到了球的表面积和体积公式.

3. 柱体、锥体、台体、球的体积公式之间的关系

剖析:柱体、锥体、球是不同的几何体,从形状上很难发现球与柱体及锥体之间的联系,但是从体积公式上却能发现它们之间的关系,这就要求我们辩证地看待事物之间的联系性.

柱体可以看成是台体的特殊情况,只要把台体的两个底面变成相等的就是柱体,而台体的体积公式 $V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$,若令 $S' = S$ 恰好就是柱体的体积公式.而锥体可以看成台体的另外一种特殊情况,就是其中一个面的面积为 0 的情况,在台体的体积公式中令 $S' = 0$ 即可得到锥体的体积公式.对于球体的体积公式 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$,可以写成 $V_{\text{球}} = \frac{1}{3}(4\pi R^2) \cdot R$,其中 $4\pi R^2$ 是球的表面积,若看成底面积,再把 R 看成高,其体积公式和锥体的体积公式极为类似.学习时要加深对它们之间的辩证统一关系的认识.

典题精讲

例 1 2006 安徽高考,理 9 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上,则此球的体积为.....

..... ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ B. $\frac{1}{3}\pi$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

思路解析:此正八面体是每个面的边长均为 a 的正三角形,所以由 $8 \times \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 2\sqrt{3}$, 知 $a = 1$, 则此球的直径为 $\sqrt{2}$, 故选 A.

答案: A

绿色通道:球与正方体或长方体的接与切问题是高考中最常见的一种题型.若长方体内接于一个球,那么其对角线长等于球的直径.对于正方体来说,恰有球的直径等于正方体棱长的 $\sqrt{3}$ 倍.

变式训练 1 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

思路解析: 正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 则外接球的半径 $R=2$, 正方体的体对角线的长为 4, 棱长等于 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 选 D.

答案: D

例 2 正四棱台 AC_1 的高是 17 cm, 两底面的边长分别是 4 cm 和 16 cm, 求这个棱台的侧棱长和斜高.

思路分析: 棱台中有关量的计算通常是归结到某个梯形内进行, 而正棱台则是在直角梯形内进行.

解: 设棱台两底面的中心分别是 O_1 和 O , B_1C_1 和 BC 的中点分别是 E_1 和 E , 如图 1-1-(6.7)-1 所示, 连结 O_1O 、 E_1E 、 OB 、 O_1B_1 、 OE 、 O_1E_1 , 则 OBB_1O_1 和 OEE_1O_1 都是直角梯形.

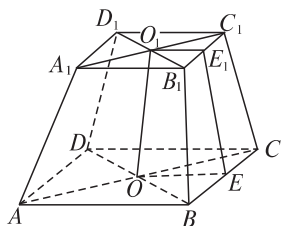


图 1-1-(6.7)-1

$A_1B_1=4$ cm, $AB=16$ cm,
 $O_1E_1=2$ cm, $OE=8$ cm, $O_1B_1=2\sqrt{2}$ cm, $OB=8\sqrt{2}$ cm.

因此 $BB_1=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+17^2}=19$ (cm), $EE_1=\sqrt{6^2+17^2}=5\sqrt{13}$ (cm),

即这个棱台的侧棱长是 19 cm, 斜高是 $5\sqrt{13}$ cm.

绿色通道: 正棱台的侧面积与斜高有一定的关系, 而斜高的求解一般归结到一个梯形中, 利用梯形的性质进行求解.

变式训练 2 棱台的两底面都是矩形, 两底面对角线交点的连线是棱台的高且长为 12 cm, 上底的周长为 112 cm, 下底的长和宽分别为 54 cm 和 30 cm. 求棱台的侧面积.

思路解析: 首先可以根据平行成比例求出上底长和宽, 再求侧面积.

解: 设上底面的长为 x cm, 宽为 $(56-x)$ cm, 把棱台恢复成棱锥以后小棱锥的高为 h cm.

$$\text{则 } \frac{x}{54} = \frac{h}{h+12} = \frac{56-x}{30}, \quad x=36, \quad 56-x=20.$$

设侧面梯形的高分别为 y cm, z cm.

$$\text{则 } y = \sqrt{12^2 + \left(\frac{54}{2} - \frac{36}{2}\right)^2} = 15, \quad z =$$

$$\sqrt{12^2 + \left(\frac{30}{2} - \frac{20}{2}\right)^2} = 13.$$

$$S_{\text{侧}} = (54+36) \cdot 13 + (30+20) \cdot 15 = 1\,170 + 750 = 1\,920.$$

答: 棱台的侧面积是 1 920 cm^2 .

例 3 如图 1-1-(6.7)-2, 有一圆柱内接于底面半径为 4、高为 3 的圆锥内, 求此圆柱的侧面积的最大值.

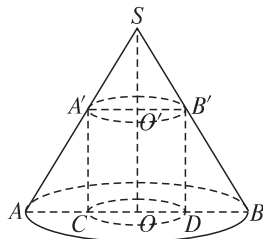


图 1-1-(6.7)-2

思路分析: 本题圆柱的底面半径和母线长都在变, 设圆柱的底面半径为 r , 通过轴截面中三角形的相似, 可以找到圆柱的底面半径 r 和母线长 l 的关系, 从而使 l 能用 r 来表示. 利用圆柱的侧面积公式, 最终把问题转化为求函数最大值的问题.

解: 如题图所示, 设圆柱的底面半径为 r , 母线长为 l , 则 $CO=r$, $A'C=l$, $AO=4$, $SO=3$.

在 $\triangle SAO$ 中, $A'C \parallel SO$, $\frac{AC}{AO} = \frac{A'C}{SO}$,

$$\frac{4-r}{4} = \frac{l}{3}, \quad l = \frac{12-3r}{4}.$$

$$\text{根据圆柱的侧面积公式 } S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot \frac{12-3r}{4} = \frac{\pi}{2} r(12-3r) = \frac{\pi}{2} [-3(r-2)^2 + 24],$$

当 $r=2$ 时, $S_{\text{侧}}$ 最大, 此时圆柱的侧面积的最大值为 12π .

绿色通道: 求圆柱的侧面积的关键是求圆柱的底面半径和母线长, 本题中使 l 能用 r 来表示, 把问题转化为求函数最大值的问题是常见的题型.

变式训练 3 直四棱柱的底面是矩形, 且底面对角线的夹角为 60° , 对角面的面积为 S , 求此直四棱柱的侧面积.

思路分析: 此题应可以将对角线大胆的设元, 目的是方便列方程. 将对角线设出, 但设而不解. 因此, 底面两条边以及对角线全部用母线长 l 来表示, 在最后进行侧面积的计算时, 刚好约去 l .

解: 如图所示, 设底面两边分别为 a 、 b , 侧棱长为 l ,