

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计. 数学. 必修 :II. 新课标人教 A 版/任志鸿 孟国泰主编. - 2 版.
-海口 :南方出版社 2004. 10(2006. 10 重印)
(志鸿优化系列丛书)
ISBN 7-80701-624-8

I. 高... II. ①任... ②孟... III. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 104604 号

责任编辑 余云华

装帧设计 邢 丽

志鸿优化系列丛书

高中同步测控优化设计·数学·必修 :II

任志鸿 孟国泰 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编 570203 电话 0898 - 65371546

山东鸿杰印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2006 年 10 月第 4 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

开本 890 × 1240 1/16

印张 6.75 字数 181 千字

定价 10.50 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

题记 我创故我在 我在故我创。

志鸿人历来注重教育创新 ,并以此为立业之本。志鸿人认为 :创新是人的灵魂 ,是人的本质特征 ,是人的天然属性 ,是人与动物的最本质区别 ,是一切物质文明和精神文明的不竭源泉。

基于此 ,志鸿人在教育领域不断地进行着创新与超越。伴随着新课标的贯彻落实 ,伴随着新课程实验区师生的殷切期盼 ,志鸿人在深入地研究新课程的精神、理念、内容、方法、手段的基础上 ,与全国各地特别是课改实验区的一线骨干教师再度强强联合 ,以新课标教材为依据 ,以充分体现新课程的理念为灵魂 ,以实用性和创新性的有机结合为出发点 ,以全面培养学生的综合素质为根本目的 ,把曾经风靡全国、畅销各地的《新课标同步测控优化设计》进行了细心、精心、倾心的打造和全面的提升 ,展示出志鸿人的爱心与智慧、品质与品位、思想与理想。

本书以理念统帅栏目 ,以栏目组织内容 ,实现了“ 继承与创新、适应与引领 ”的“ 学习、创新于一体 ”的设计思路。本书编写理念先进 ,体例设置科学合理 ,内容翔实精彩 ,特色鲜明亮丽 ,真正做到了“ 实 ”而不“ 死 ” ,“ 活 ”而不“ 乱 ” !

【知识梳理】 为你全面梳理主干知识 ,助你把握知识脉络 ;“ 知识导学 ”引导你如何学好知识 ,为进一步学习打下坚实基础。

【疑难突破】 为你做认真细致的疑难剖析 ,让你体验突破疑难的快感 ;引导你如何学会对疑点、难点进行剖析 ,突破学习瓶颈 ,更上一层楼。

【典题精讲】 为你提供经典题型的精彩讲解 ,让你一睹名师的讲解风范 ;不但引导你如何进行变式训练 ,学会应考 ,还为你如何避开“ 黑色陷阱 ”(“ 认知陷阱 ”和“ 思维陷阱 ”)、打通“ 绿色通道 ”(“ 思考、思路、思想通道 ”和“ 情感态度价值观通道 ”)出谋划策。

【问题探究】 为你亮出问题立意的风采 ,让你找到探究的乐趣 ;引导你如何思考问题 ,并通过问题学会思考。

【自主广场】 为你精选了许多传统的经典题及新题、好题、活题 ,让你在知识和能力的天空大显身手 ,最大限度地发挥你的主观能动性和创造性 ,以实现“ 修行靠自身 ”的目标。志鸿人认为 :靠墙墙会倒 ,靠娘娘会老 ,只有靠自己 ,万事能办好。自主教育才是最好的教育。为了体现自主教育的精神 ,我们特别设计了两个小栏目 :我夯基 我达标 ,我综合 我发展。“ 我夯基 我达标 ”着重基础知识和基本技能训练 ;“ 我综合 我发展 ”着重综合能力和综合素养的全面提高。

志鸿人在教育战线上已做了大量工作,但我们清楚地知道自己还有许多不足,我们希望与你共同成长。特别值得一提的是,我们在中央电视台播出的广告宣传片中,有两只比翼齐飞的天鹅,他们就是志鸿人与你共同成长、共同辉煌的象征。这两只天鹅,一只是你,一只志鸿人,我们相互激励、相互促动,共同翱翔在蓝天白云之间,追求着快乐而幸福的人生。志鸿人认为:人一定要不断成长!成长是和人的生命同始终的。志鸿人坚信:人人是成长之人,天天是成长之时,处处是成长之地。我们拒绝成熟,我们一直在成长!我们是快乐的精灵!我们是幸福的化身!

目前,志鸿人正在建构具有中国特色的“志鸿教育体系”,正在组织实施“志鸿教育百千万工程”,正在编辑出版“志鸿教育家书系”,正在推进“中国新人文教育运动”,正在以智慧和爱心铸造中国教辅的第一品牌……

志鸿创新,以德化雨,滋养你我的心灵;

志鸿创新,以文化人,升华你我的精神。

“衣带渐宽终不悔,为伊消得人憔悴”。志鸿人已把教育作为自己的生命,正在创造着一个又一个的奇迹。志鸿人绝不仅仅满足于编几套教辅材料,志鸿人将为民族教育的兴旺发达竭尽全力。

在此,我们愿以正在构建中的“志鸿教育体系”中的一段话来结束前言:

立国先立人,

立人先立心,

立心先立志。

志立则心立,

心立则人立,

人立则国立。

丛书编委会

目录

contents

第一章 空间几何体	1	第三章 直线与方程	55
1.1 空间几何体的结构	2	3.1 直线的倾斜角与斜率	56
1.2 空间几何体的三视图和直观图	7	3.1.1 倾斜角与斜率 ~ 3.1.2 两条直线 平行与垂直的判定	56
1.3 空间几何体的表面积与体积	13	3.2 直线的方程	66
本章测评	18	3.2.1 直线的点斜式方程 ~ 3.2.2 直线 的两点式方程 ~ 3.2.3 直线的一 般式方程	66
第二章 点、直线、平面之间的位置关系	20	3.3 直线的交点坐标与距离公式	66
2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系 ...	21	本章测评	70
2.1.1 平面	21	第四章 圆与方程	71
2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系	24	4.1 圆的方程	71
2.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系 ~		4.1.1 圆的标准方程 ~ 4.1.2 圆的一般 方程	71
2.1.4 平面与平面之间的位置关系	28	4.2 直线、圆的位置关系	77
2.2 直线、平面平行的判定及其性质	31	4.2.1 直线与圆的位置关系 ~ 4.2.2 圆 与圆的位置关系 ~ 4.2.3 直线与 圆的方程的应用	77
2.2.1 直线与平面平行的判定	31	4.3 空间直角坐标系	82
2.2.2 平面与平面平行的判定	35	4.3.1 空间直角坐标系 ~ 4.3.2 空间两 点间的距离公式	82
2.2.3 直线与平面平行的性质 ~		本章测评	86
2.2.4 平面与平面平行的性质	37	模块综合测评	88
2.3 直线、平面垂直的判定及其性质	41	参考答案	91
2.3.1 直线与平面垂直的判定	41		
2.3.2 平面与平面垂直的判定	45		
2.3.3 直线与平面垂直的性质 ~			
2.3.4 平面与平面垂直的性质	49		
本章测评	53		

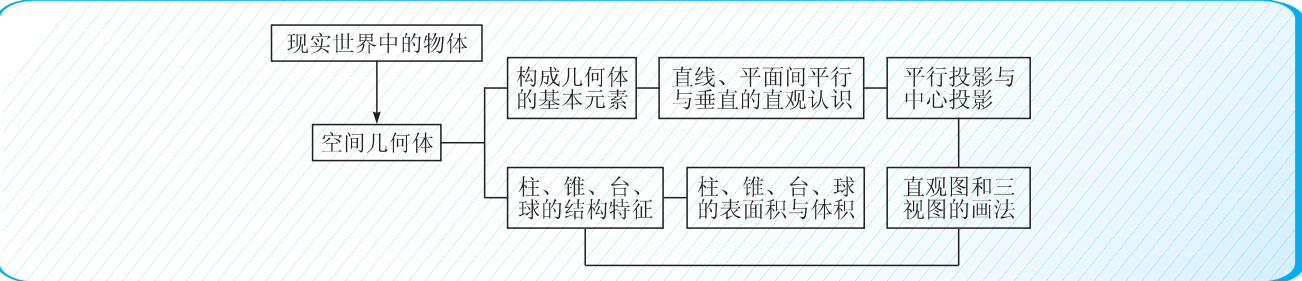
第一章 空间几何体



三维目标

- 1. 通过生活中的实际例子引入空间几何体的相关概念,体现了由特殊到一般,由具体到抽象的理论形成过程,从而形成了立体几何的初步理论.本章内容的整体思路体现了从点到线、从线到面、从面到体的基本研究思想.
- 2. 空间几何体的三视图和直观图从不同方面反映了几何体的特征,通过画三视图可以增强空间想象能力,而直观图不仅反映了几何体具有的特征,也为把立体图形在平面中表示的方法提供了依据.斜二测画法不仅是画几何图形的工具,也是立体几何理论的基础,它把空间几何体转化为平面提供了可能.
- 3. 求几何体的体积是生活中经常遇到的问题,而体积也是几何体的一个重要的特征,通过对体积的探讨不仅加深了对几何体特征的认识,也体现了数学的应用价值,增强了对数学的感性理解,体现了学习立体几何的必要性.
- 4. 无论线还是面都离不开相应的几何体,体现了事物之间互相联系的辩证唯物主义思想,也是人类认识世界的方法论基础.

知识网络



1.1 空间几何体的结构

知识梳理

1. 一般地,有_____互相平行,其余各面都是_____,并且每相邻两个四边形的公共边都_____,由这些面所围成的多面体叫做_____.

2. 一般地,有一个面是_____,其余各面都是有_____的三角形,由这些面所围成的多面体叫做_____.它是以_____为标准进行划分的.空间最简单的几何体是_____棱锥.

3. 以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的_____所围成的几何体叫做_____,旋转轴叫做_____;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做_____;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做_____,无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做_____.

4. 圆锥是以直角三角形的一条_____边所在的直线为旋转轴,其余两边旋转所形成的面所围成的几何体.棱台和圆台可分别看作是由棱锥和圆锥被平行于_____的平面所截而得到的.棱台和圆台统称为_____.

5. 以半圆的直径所在直线为_____,半圆面旋转一周形成的几何体叫做_____,简称_____.半圆的圆心叫做球的_____,半圆的半径叫做球的_____,半圆的直径叫做球的_____.

6. 正方体的集合记为 A ,长方体的集合记为 B ,直棱柱的集合记为 C ,棱柱的集合记为 D ,则四个集合之间的关系是_____.

知识导学

要学好本节内容,可从直观感知已学过的正方体、长方体等空间几何体的整体结构入手,去抽象一般空间几何体的结构特征.本节是立体几何的基础课,掌握空间几何体的结构特征,将为我们学习空间点、线、面的位置关系奠定坚实的基础.

除了按照教材介绍的方法认识圆柱、圆锥外,还可以类比棱柱、棱锥来认识圆柱、圆锥.当圆台的上底逐渐变小,半径趋近于零时,圆台趋向于圆锥;当圆台上底逐渐变大,半径与下底半径相同时,圆台变为圆柱.同样的,棱台也有相同的变化规律.

对于球体,除了从旋转体的角度认识球的结构特征外,还可通过类比圆的结构特征,给出球的结构特征及有

关概念,如球心、半径、直径等.

学习本节知识的基本方法是:直观感知、操作确认.通过感受大量空间实物及模型,掌握柱、锥、台、球的结构特征.

疑难突破

1. 棱柱的特点.

剖析 (1)棱柱的特点总结起来主要有:①两个互相平行的面是底面;②侧棱互相平行且相等;③侧面是平行四边形;④与底面平行的截面是与底面全等的多边形;⑤与侧棱平行的截面是平行四边形;⑥我们学习的棱柱中,底面都是凸多边形.

如果棱柱的一个底面水平放置,则铅垂线与两底面的交点之间的线段或距离,叫做棱柱的高.

棱柱有两个本质特征:一是有两个面互相平行,二是其余各面每相邻两个面的公共边都互相平行.

(2)我们常用表示底面各顶点的字母表示棱柱,也可利用对角线表示棱柱.

棱柱是多面体中最简单的一种,学习棱柱,应首先从观察我们身边常见的一些几何体入手,如三棱镜、长方体、螺杆的顶部等,通过概括共同特点得出棱柱的结构特征.

其次可通过变式训练,深化对棱柱结构特征的认识,如观察长方体,能作为棱柱底面的有几对?过长方体的底面截去长方体的一角,所得几何体是不是棱柱?有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体是不是棱柱?

再次,可从运动变化的观点去认识其结构特征,即棱柱可看成一个多边形上各点沿着相同的方向移动相同的距离而得到的空间部分.

2. 棱锥的特点

剖析 (1)棱锥有两个本质特征:一是有一个面是多边形;二是其余各面都是有一个公共顶点的三角形,此处一定要注意有一个公共顶点.

(2)如果棱锥的底面水平放置,则顶点与过顶点的铅垂线和底面的交点之间的线段或距离,叫做棱锥的高.

(3)棱锥的特点总结起来主要有:①底面是多边形;②其余各面是有一个公共顶点的三角形;③侧面的公共边相交于顶点;④三棱锥的所有面都是三角形,所以,四个面都可以看作底.

(4)棱锥也是多面体,三棱锥是最简单的空间几何体之一.学习棱锥可从观察一些常见的棱锥模型和图片出

发,观察组成这些几何体的面,形成对棱锥的直观认识,概括出它们的共同本质特征,从而导出棱锥的概念.

加深对棱锥概念的理解,可从制作棱锥模型入手去认识棱锥,还可通过利用截面分割棱柱入手去认识棱锥,还可通过变式训练去认识.如有一个面是多边形,其余各面都是三角形的几何体一定是棱锥吗?

3. 柱、锥、台之间的关系怎样?

剖析 依棱台概念可知,棱台是由棱锥用平行底面的平面截得的几何体,所以检测几何体是否为棱台,关键是延长侧棱看各延长线是否交于一点.

将棱台各侧棱延长后交于一点,即产生棱锥.故棱台也可以看作是用平行于底面的平面去截棱锥而夹在平面与底面之间的部分几何体.

将棱柱一底面缩小为一个点即得棱锥,将棱锥用平行底面的平面去截可得棱台.因此,常将棱台问题转化为棱锥问题来解决.

棱台和圆台统称为台体,它们都是由平行于锥体的底面的平面而截得的.因此,有关台体的问题常常转化为锥体的问题来解决.由定义上可以知道,台体的分类方法与锥体的分类方法完全相同,因此,我们可以在认识锥体与台体的关系的基础上,通过自己的探究,获得对台体的结构特征的认识.

典题精讲

例 1 下列命题中正确的是 ()

- A. 有两个面平行,其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
- B. 有两个面平行,其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱
- C. 有一个面是多边形,其余各面都是三角形的几何体叫棱锥
- D. 棱台各侧棱的延长线交于一点

思路解析 如图 1-1-1 左图,面 $ABC \parallel$ 面 $A_1B_1C_1$,但图中的几何体每相邻两个四边形的公共边并不都互相平行,故不是棱柱. A、B 都不正确. 棱锥是有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,即必须有一个公共顶点. 如图 1-1-1 右图,每个面都是三角形,但形成的几何体不是棱锥. C 不正确. 棱台是用一个平行于底面的平面去截棱锥得到的,其各侧棱的延长线必交于一点,故 D 正确.

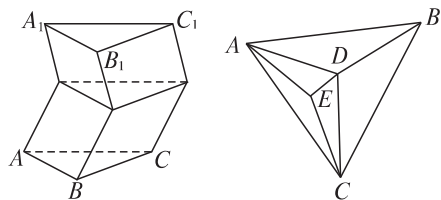


图 1-1-1

答案 D

绿色通道 判断一个物体是否是某种简单几何体,一定要紧扣定义,注意定义中的特殊字眼,切不可马虎大意.如本例中的 A、B、C 三个选项,就有很强的干扰性.在开始学习立体几何时,要学会观察、分析并记住一些特殊的物体和图形.反例推证是一种重要的数学方法,要熟练掌握.

变式训练 1 下列命题中的真命题是 ()

- A. 以直角三角形的一直角边为轴旋转所得的旋转体是圆锥
- B. 以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台
- C. 圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆
- D. 圆锥的侧面展开图为扇形,这个扇形所在圆的半径等于圆锥底面圆的半径

思路解析 以直角梯形垂直于底的腰为轴旋转所得的旋转体是圆台,所以 B 不对;圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面而不是圆,所以 C 不对;圆锥的侧面展开图为扇形,这个扇形所在圆的半径等于圆锥的母线长,所以 D 不对.

答案 A

例 2 图 1-1-2 中的几个图形能否折叠成棱柱? 请试折一下并回答为什么.

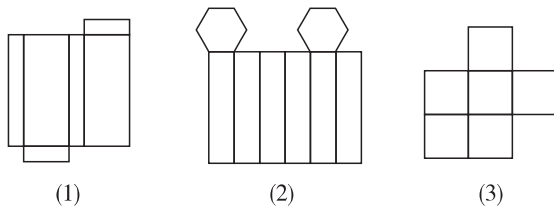


图 1-1-2

思路解析 折叠时首先要选择一个面作为底面.另外就是要了解棱柱的展开图的规律.

答案 图 1-1-2(1)可折成一个四棱柱.

图 1-1-2(2)不能折成棱柱,因为两个六边形在这些矩形的同一侧.

图 1-1-2(3)不能折成棱柱,因为与正方体的每个面相邻的面最多只有四个,因而展开后的图形中,任一个正方形在它的周围最多只应有四个正方形,而图中有一个正方形,在它的周围有了 5 个正方形,而这是不可能的.

绿色通道 我们常见的多面体如棱柱、棱锥和棱台等,均可展开成平面图形,反之满足一定条件的平面图形亦可还原成空间多面体.在刚接触有关立体几何的内容时,要养成多动手、勤观察、善思考、好总结的良好习惯,为进一步学习立体几何的更深内容打下坚实的

基础. 要注意总结规律,如含有“田”字格的图形不能折成四面体等.

变式训练 2 如图 1-1-3 所示,小明设计了某个产品的包装盒,他少设计了其中一部分,请你把它补上,使其成为两边均有盖的正方体盒子.

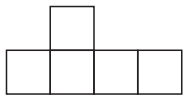


图 1-1-3

- (1) 你有_____种弥补的办法.
(2) 任意画出一一种成功的设计图.

答案 (1) 4 (2) 设计如图 1-1-4.

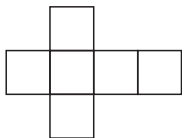


图 1-1-4

例 3 如图 1-1-5, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3$, $BC = 2$, $BB_1 = 1$, 由 A 到 C_1 在正方体表面上的最短距离为多少?

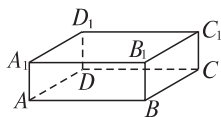


图 1-1-5

思路解析 解本题可将长方体表面展开,利用在平面内两点间的线段长是两点间的最短距离来解答. 通过展开表面,将空间问题转化为平面问题.

答案 如图 1-1-6 展开:

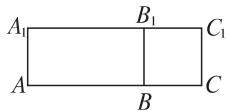


图 1-1-6

$$AC_1 = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26};$$

如图 1-1-7 展开:

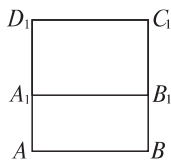


图 1-1-7

$$AC_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2};$$

如图 1-1-8 展开:

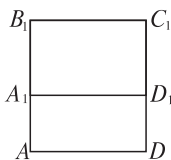


图 1-1-8

$$AC_1 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

由此 A 到 C_1 在正方体表面上的最短距离为 $3\sqrt{2}$.

绿色通道 解答空间几何体表面上两点间最短线路问题,一般都是将空间几何体表面展开,转化为求平面内两点间线段长,这体现了数学中的转化思想.

变式训练 3 图 1-1-9 是边长为 1 m 的正方体,有一蜘蛛潜伏在 A 处, B 处有一小虫被蜘蛛网粘住,请制作出实物模型,将正方体剪开,描述蜘蛛爬行的最短路线.

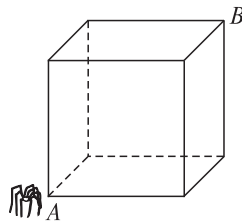


图 1-1-9

思路解析 制作实物模型略.

通过下面的正方体的展开图 1-1-10 可以发现: AB 间的最短距离为 A, B 两点间的线段的长.

由展开图可以发现, C 点为其中一条棱的中点. 具体爬行路线如图中的粗线所示,我们要注意的是爬行路线并不唯一.

答案 如图 1-1-11(1)~(3)所示.

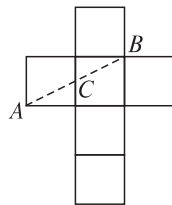


图 1-1-10

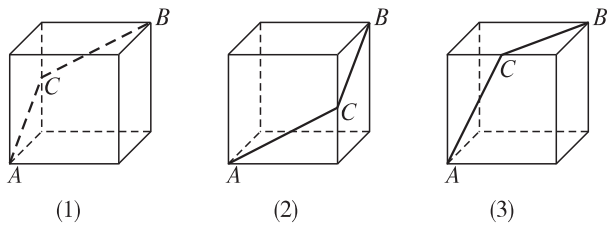


图 1-1-11

例 4 连结正方体的相邻各面的中心(所谓中心是指各面所在正方形的两条对角线的交点),所得的一个几何体是几面体?并画图表示该几何体.

思路解析 连结相应点后,得出图形如图 1-1-12 左图,再作出判断.

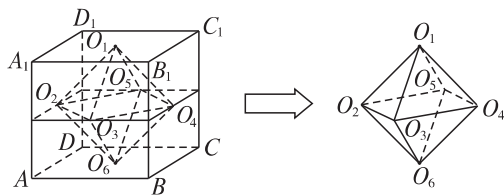


图 1-1-12

答案 先画出正方体,然后取各个面的中心,并依次连成线观察即可.

如图 1-1-12,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 分别是各表面的中心.由点 $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ 组成了一个八面体,而且该八面体共有 6 个顶点,12 条棱.该多面体的图形如图 1-1-12 中的右图所示.

绿色通道:本题中的八面体,事实上是正八面体——八个面都是有相同边数的正三角形,并且以每个顶点为其一端,都有相同数目的棱.由图还可见,该八面体可看成是由两个全等的四棱锥经重合底面后而得到的,而且中间一个四边形 $O_2O_3O_4O_5$ 还是正方形,当然其他的如 $O_1O_2O_6O_4$ 等也是正方形.为了增强立体效果,正方体应画得“正”些,而八面体的放置应稍许“倾斜”些,并且“后面的”线,即被前面平面所遮住的线,如图中的 $O_1O_5, O_6O_5, O_5O_2, O_5O_4$ 应画成虚线.

由正方体的部分顶点可构成多种形状的简单几何体.如多面体 ACB_1D_1 便为四面体,即三棱锥,它是面数最少的空间几何体,而且该四面体也是正四面体;又如多面体 A_1ABD 也是四面体,它是一个直角四面体,它也可看作是由正方体截下一个角所得的几何体,且截面是一个锐角三角形.

变式训练 4 连结上述所得的几何体的相邻各面的中心,试问所得的几何体又是几面体?

答案 六面体(正方体).

问题探究

问题 1 什么样的平面图形可以折叠成正方体?什么样的平面图形可以折叠成四个面都是全等三角形的三棱锥?

导思 对该问题的探究,我们可采用逆向思维的方法来解答,即正方体的展开图有几种形式.

探究 学习棱柱、棱锥应该从最简单的情况入手,正方形、正四面体正是最理想的载体,这个问题主要要求把握多面体的基本情况,运用纸张折叠,结合想象,掌握这两类简单几何体的性质与构成.

构成正方体的平面图形有很多种,可以用硬纸板先粘一个正方体,再分解.举例说明:

如图 1-1-13,图 1-1-14.

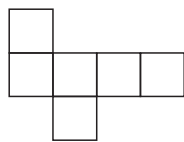


图 1-1-13

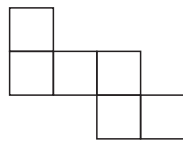


图 1-1-14

这样的图还有很多,同学们可以多做几个,练习空间想象能力.

如图 1-1-15,一个正三角形有三条中位线分开可以折成所求的图形,还有另外几种.

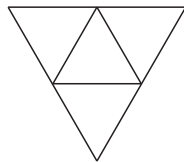


图 1-1-15

问题 2 正方体的截面可能是什么形状的图形?

导思 对于正方体的分割,可通过实物模型,实际切割实验,还可借助于多媒体手段进行切割实验.对于切割所得的平面图形可根据它的定义进行证明,从而判断出各个截面的形状.

探究 通过尝试、归纳,可以有如下各种肯定或否定性的答案:

(1)截面可以是三角形:等边三角形、等腰三角形、一般三角形.

(2)截面三角形是锐角三角形,不能是直角三角形、钝角三角形.

(3)截面可以是四边形:平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形、等腰梯形,截面为四边形时,这个四边形至少有一组对边平行.

(4)截面不能是直角梯形.

(5)截面可以是五边形,截面五边形必须有两组分别平行的边,同时有两个角相等,截面五边形不可能是正五边形.

(6)截面可以是六边形,截面六边形必须有分别平行的边,同时有两个角相等.

(7)截面六边形可以是等角(均为 120°)的六边形,即正六边形.

截面图形如图 1-1-16 中各图所示:

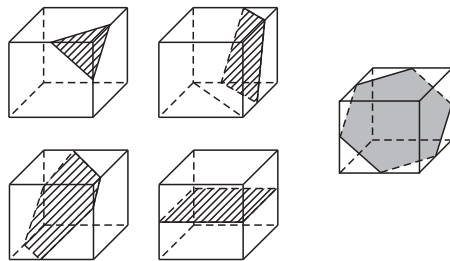


图 1-1-16

主广场

我夯基 我达标

- 下列说法中正确的是 ()
A. 棱柱的侧面可以是三角形
B. 由 6 个大小一样的正方形所组成的图形是正方体的展开图
C. 正方体各条棱长都相等
D. 棱柱的各条棱都相等
- 下面几何体的轴截面一定是圆面的是 ()
A. 圆柱 B. 圆锥 C. 球 D. 圆台
- 下列说法错误的是 ()
A. 多面体至少有四个面
B. 九棱柱有 9 条侧棱 9 个侧面,侧面为平行四边形
C. 长方体、正方体都是棱柱
D. 三棱柱的侧面为三角形
- 在本节我们学过的常见几何体中,如果用一个平面去截此几何体,则截面是三角形,那么这个几何体可能是_____.
- 一个棱柱有 10 个顶点,所有的侧棱长的和为 60 cm,则每条侧棱长为_____ cm.
- 把等腰三角形绕底边上的高旋转 180° ,所得的几何体是_____.
- 有下列说法:
(1)球的半径是球面上任意一点与球心的连线段;
(2)球的直径是球面上任意两点间的连线段;(3)用一个平面截一个球,得到的是一个圆;(4)不过球心的截面截得的圆叫做小圆.
其中正确命题的序号是_____.
- 下列说法中正确的是 ()
A. 直角梯形绕一边旋转形成圆台
B. 直角三角形绕一边旋转形成圆锥
C. 圆柱不是旋转体
D. 圆台可以看作是平行于底面的平面截一个圆锥而得到的
- 2006 江苏高考 9 两相同的正四棱锥组成如图 1-1-17 所示的几何体,可放于棱长为 1 的正方体内,使正四棱锥的底面 ABCD 与正方体的某一个平面平行,且各顶点均在正方体的面上,则这样的几何体体积的可能值有 ()

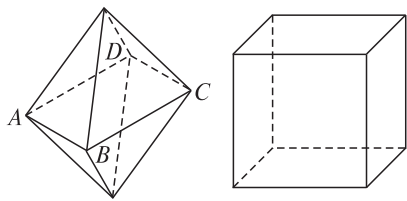


图 1-1-17

- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 无穷多个

我综合 我发展

- 在四棱锥的四个侧面中,直角三角形最多可有的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 水平放置的正方体的六个面分别用“前面、后面、上面、下面、左面、右面”表示.图 1-1-18 是一个正方体的平面展开图,若图中的“似”表示正方体的前面,“锦”表示右面,“程”表示下面,则“祝”“你”“前”分别表示正方体的_____.



图 1-1-18

- 如图 1-1-19 甲所示为一几何体的展开图.

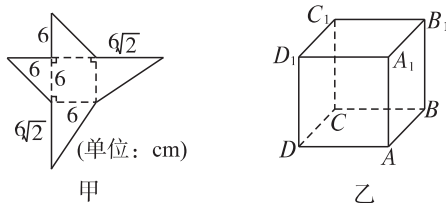


图 1-1-19

- 沿图中虚线将它们折叠起来,是哪一种几何体?试用文字描述并画出示意图.
- 需要多少个这样的几何体才能拼成一个棱长为 6 cm 的正方体?请在图乙棱长为 6 cm 的正方体 ABCD—A₁B₁C₁D₁ 中指出这几个几何体的名称.

- 13 圆台的一个底面周长是另一个底面周长的3倍,轴截面的面积等于 392 cm^2 ,母线与轴的夹角是 45° ,求这个圆台的高、母线长和底面半径.

- 14 如图 1-1-20,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=3$, $AA_1=4$. M 为 AA_1 的中点, P 是 BC 上一点,且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$,设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N . 求 P 点的位置.

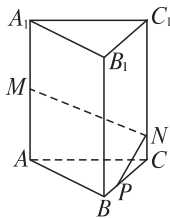


图 1-1-20

1.2 空间几何体的三视图和直观图

知识梳理

1. “视图”是将物体按正投影法向投影面投射时所得到的投影图. 光线自物体的前面向后投影所得的图形称为_____, 自左向右投影所得的投影图称为_____, 自上至下投影所得的投影图称为_____. 用这三种视图即可刻画空间物体的集合结构, 这种图称之为_____.

2. 我们经常用_____画出几何体的直观图, 用此方法画直观图, 关键是掌握水平放置的_____的画法, 它的步骤是:

(1) 在已知图形中取_____的 x 轴和 y 轴, 两轴相交于点 O , 画直观图时, 把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴, 两轴交于点 O' , 且使 $\angle x'O'y' = \underline{\hspace{2cm}}$, 它们确定的平面表示水平面.

(2) 已知图形中_____于 x 轴或 y 轴的线段, 在直观图中分别画成_____于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段, 在直观图中保持原_____不变, 平行于 y 轴的线段, 长度为原来的_____.

3. 空间几何体的_____和_____有着密切的联系, 我们能够由空间几何体的三视图得到它的_____, 同时, 也能够由空间几何体的_____得到它的_____.

4. 从投影角度看, _____和用斜二测画法画出的_____都是在_____下画出来的空间图形.

5. 平行投影的投影线_____, 而中心投影的投影线_____.

知识导学

要学好本节内容, 首先应复习初中学过的简单空间图形的三视图, 在此基础上能画出空间简单图形组合体的三视图, 进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能.

三视图画法的要点是: 正、俯视图长对正; 正、侧视图高平齐; 俯、侧视图宽相等.

用斜二测画法画水平放置的平面图形的关键是确定多边形的顶点. 因为多边形顶点的位置一旦确定, 依次连结这些顶点就可画出多边形来, 因此平面多边形水平放置时, 直观图的画法就可归结为确定点的位置的画法.

疑难突破

1. 什么叫三视图? 三视图是根据什么原理画出来的呢?

剖析: 三视图是从三个不同的方向看同一个物体而得到的三个视图. 为了使空间图形的直观图更能直观、准确地反映空间图形的大小, 往往需要把图形向几个不同的平面分别作投影, 然后把这些投影放在同一个平面内, 并有机地结合起来表示物体的形状和大小. 通常, 总是选取三个两两互相垂直的平面作为投射面, 如图 1-2-1, 一个投射面水平放置, 叫水平投射面, 投射到这个平面内的图形叫俯视图. 一个投射面放置在正前方, 叫直立投射面, 投射到这个平面内的图形叫正视图. 和直立、水平两个投射面都垂直的投射面叫做侧立投射面, 通常把这个平面放在直立投影的右面, 投射到这个平面内的图形叫侧视图. 图 1-2-1 是一个长方体的三视图, 正视图是一个矩形, 表示长方体的长度和高度, 它的俯视图也是一个矩形, 它表示长方体的长度和宽度, 它的侧视图同样也是一个矩形, 它表示长方体的宽度和高度. 把这三个投影图

放在一个平面内,如图 1-2-2 就是一个三视图。

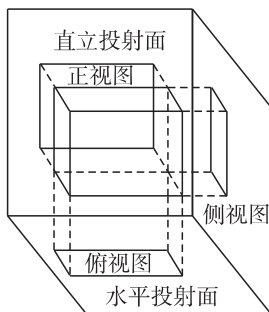


图 1-2-1

侧立投射面



图 1-2-2

(1) 正视图反映物体的主要形状特征,是三视图中最重要视图,俯视图要与正视图对正,侧视图要画在正视图的正右方,高度方向要与正视图平齐,俯视图与侧视图共同反映物体的宽度,宽度要相等。

(2) 三视图的排列规则是:先画正视图,俯视图安排在正视图的正下方,长度与正视图一样,侧视图安排在正视图的正右方,高度与正视图一样。

(3) 当物体形状复杂时,三视图还不足以反映它的大小和形状,还需要更多的投射平面,或者分解成几部分分别画三视图。

要掌握空间图形的三视图,首先要掌握平行投影与正投影这两个概念。① 平行投影:已知图形 F , 直线 l 与平面 α 相交(如图 1-2-3), 过 F 上任意一点 M 作直线 MM' 平行于 l , 交平面 α 于点 M' , 则点 M' 叫做点 M 在平面 α 内关于直线 l 的平行投影(或象)。如果图形 F 上的所有点在平面 α 内关于直线 l 的平行投影构成图形 F' , 则 F' 叫做图形 F 在 α 内关于直线 l 的平行投影。平面 α 叫做投影面, l 叫做投影线。

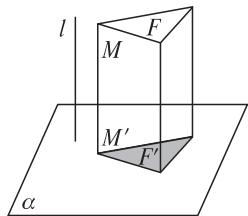


图 1-2-3

② 平行投影的性质: 当图形中的直线或线段不平行于投影线时:

a. 直线或线段的平行投影仍是直线或线段; b. 平行直线的平行投影是平行或重合的直线; c. 平行于投射面的线段, 它的投影与这条线段平行且等长; d. 与投射面平行的平面图形, 它的投影与这个图形全等; e. 在同一直线或平行直线上, 两条线段平行投影的比等于这两条线段的比。

③ 正投影: 在物体的平行投影中, 如果投射线与投射面垂直, 则称这样的平行投影为正投影(如图 1-2-4)。

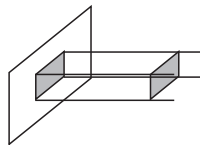


图 1-2-4

容易知道, 正投影除具有平行投影的性质外, 还有如下性质: a. 垂直于投射面的直线或线段的正投影是点; b. 垂直于投射面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分。

2. 什么叫组合体? 怎样画组合体的三视图?

剖析 将基本几何体, 通过拼、切、挖手段构成组合体。作组合体三视图时, 首先掌握组合体的结构, 弄清组合体是由哪些基本几何体组成的, 是采用什么方式构成的。确定好表面的交线, 外部可见轮廓线, 内部不可见轮廓线, 定好正视、俯视、侧视的方向, 注意用好“长对正, 高平齐, 宽相等”的作图原则, 便可完成三视图的绘画。

要画好组合体的三视图, 首先要掌握常见的柱、锥、台、球等常见几何体的三视图, 再结合组合体三视图的画法与步骤画三视图。

3. 斜二测画法的一般步骤是什么?

剖析 斜二测画法是一种最常用、直观性好的直观图的画法。它的步骤为:

(1) 在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴, 两轴交于点 O , 再取 z 轴, 使 $\angle xOz = 90^\circ$, 且 $\angle yOz = 90^\circ$ 。

(2) 画直观图时把它们画成对应的 x' 轴、 y' 轴和 z' 轴, 它们相交于点 O' , 并使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), $\angle x'O'z' = 90^\circ$, x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平面。

(3) 已知图形中平行(或重合)于 x 轴、 y 轴或 z 轴的线段, 在直观图中分别画成平行(或重合)于 x' 轴、 y' 轴或 z' 轴的线段。

(4) 已知图形中平行(或重合)于 x 轴和 z 轴的线段, 在直观图中保持原长度不变; 平行(或重合)于 y 轴的线段, 长度为原来的一半。

所谓直观图, 就是把空间图形在平面内画得既富有立体感, 又能表达出各主要部分的位置关系和度量关系的图形。画直观图时, 既可采用正多边形逼近的思想, 也可采用将圆的直径 n 等分, 并过各分点作 y 轴的平行线的作法。对于柱体, 只需过水平放置的底面上的各顶点分别作 z' 轴的平行线, 并使其等于柱体的棱长, 这样可确定上底面的顶点; 对于锥体, 只需在 z' 轴上截取一线段使其等于锥体的高, 便可确定锥体的顶点。

典 题 精 讲



例 1 图 1-2-5 是一个零件的三视图, 试画出这个零件的实物图。

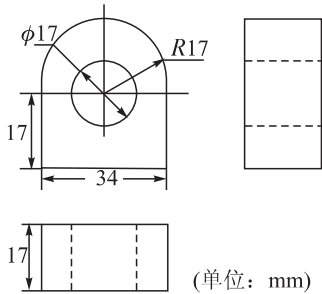


图 1-2-5

思路解析 :三视图所表示的几何体为 :由长为34 mm、高和宽都为 17 mm 的长方体与直径为 34 mm、宽度为 17 mm 的半圆柱组成几何体后 ,又从圆柱轴心切去半径为 17 mm 的圆柱 ,其实物直观图如图 1-2-6 所示.

答案 所绘制图形如图所示 :

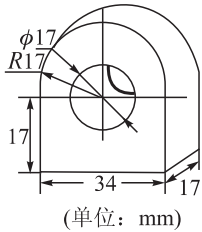


图 1-2-6

绿色通道 :一是要看所给的三视图是由哪些简单几何体组成的 ,二是可以把绘制后的实物图的三视图与原图作比较 ,即可看出是不是画得正确.

黑色陷阱 所画的实物图残缺 ,主要是缺乏空间想象力和对原来实物图画出三视图时的基本制图不熟悉.

变式训练 1 根据图 1-2-7 中物体的三视图 ,画出物体的形状.

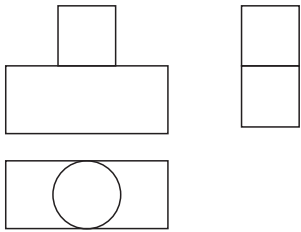


图 1-2-7

答案 如图 1-2-8 所示.

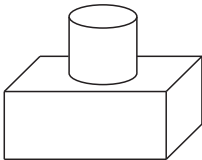


图 1-2-8

例 2 画出图 1-2-9 几何体的三视图 : (阴影面为视角正面)

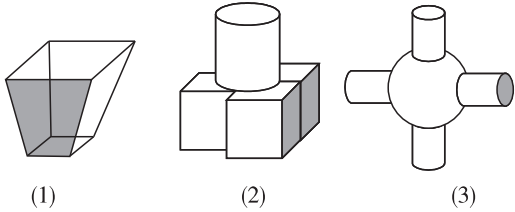


图 1-2-9

思路解析 :仔细观察实物模型 ,想象从三个角度各看到了什么 ,进而准确地画出几何体的三视图.

答案 如图 1-2-10.

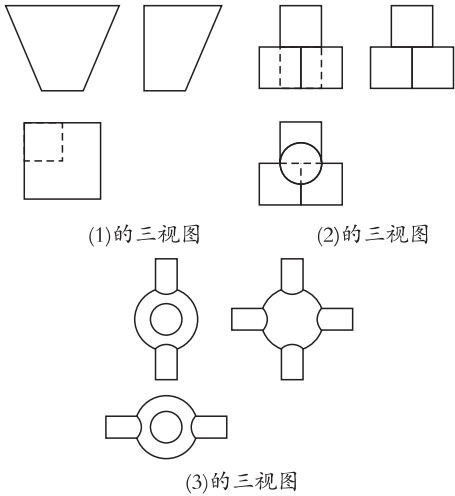


图 1-2-10

绿色通道 :画物体的三视图时可以想象自己就站在物体的正前方、正上方、正左方 ,观察它是由哪些基本几何体组合而成的 ,它的外轮廓线是什么 ,然后再去画图.有条件的还可以观察实物模型 ,也可以自己把模型做出来 ,这是一个从模型到图形的过程 ,从具体到抽象再到具体的过程 ,是提高空间想象能力的有效做法.

变式训练 2 画出图 1-2-11 所示几何体的三视图.

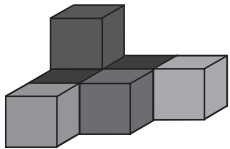


图 1-2-11

答案 如图 1-2-12 所示.

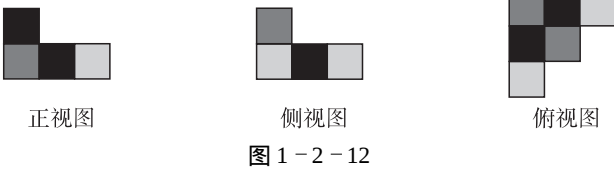


图 1-2-12

例3 如图1-2-13,直角梯形ABCD绕底边AD所在直线EF旋转,在旋转前,非直角的腰的端点A可以在DE上选定.当点A选在射线DE上的不同位置时,形成的几何体大小、形状不同,分别画出它的三视图并比较其异同点.

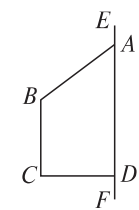


图1-2-13

思路解析 本题关键在于要对A选在射线DE上的不同位置分别讨论,看旋转后的几何体可由哪些简单几何体构成.

答案 (1)当点A在图1-2-14射线DE的位置时,绕EF旋转一周所得几何体为底面半径为CD的圆柱和圆锥拼成,其三视图如图1-2-15:

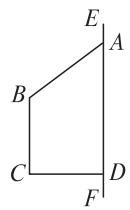
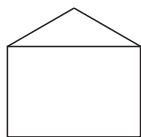
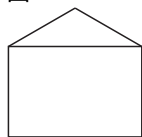


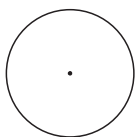
图1-2-14



正视图



侧视图



俯视图

图1-2-15

(2)当点A在图1-2-16射线DE的位置,即B到EF所作垂线的垂足时,旋转后几何体为圆柱,其三视图如图1-2-17:

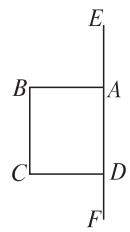


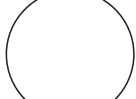
图1-2-16



正视图



侧视图



俯视图

图1-2-17

(3)当点A位于如图1-2-18所示位置时,其旋转所得几何体为圆柱中挖去同底的圆锥,其三视图如图1-2-19.

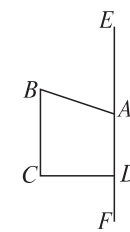
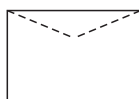
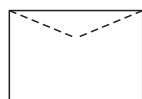


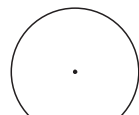
图1-2-18



正视图



侧视图



俯视图

图1-2-19

(4)当点A位于点D时,如图1-2-20,此时旋转体为圆柱中挖去一个同底等高的圆锥,其三视图如图1-2-21.

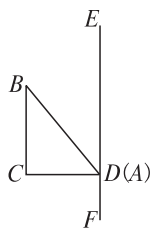
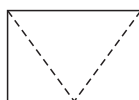
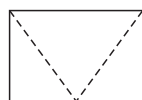


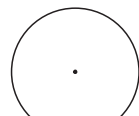
图1-2-20



正视图



侧视图



俯视图

图1-2-21

绿色通道 本题充分考查了空间想象力.由轴截面想到旋转体,由旋转所得组合体画出三视图,综合性很强,同时也显示了旋转体的三视图特点,即正视图与侧视图完全相同,并且俯视图为圆.故旋转体的三视图可简化为“二视图”.

变式训练3 图1-2-22是从某一种型号的滚筒洗衣机抽象出来的几何体(单位:cm),试画出它的三视图.

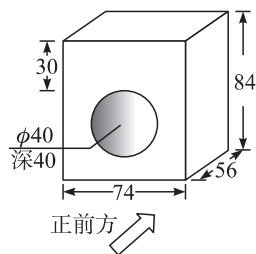
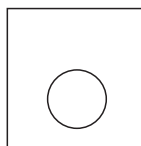


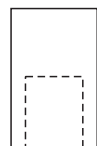
图1-2-22

思路解析 这个几何体是由一个长方体和一个圆柱体构成的.

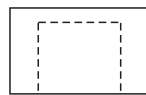
答案 三视图如图1-2-23所示:



正视图



侧视图



俯视图

图1-2-23

例 4 如图 1-2-24 所示 梯形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$, $\angle DAB = 30^\circ$, $AD = 3 \text{ cm}$, 试画出它的直观图.

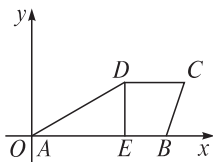


图 1-2-24

思路解析 本题考查利用斜二测画法画空间图形的直观图. 在画图时, 要注意作法和直角坐标系中所作的不同. 在斜二测画法中, 要有一些平行于原坐标轴的线段才好按部就班地作图, 所以先在原坐标系中过 D 作出该点在 x 轴的垂足, 则对应地可以作出线段 DE 的直观图, 进而作出整个梯形的直观图.

答案 第一步: 在梯形 ABCD 中, 以边 AB 所在的直线为 x 轴, 点 A 为原点, 建立平面直角坐标系 xOy, 画出对应的 x' 轴 y' 轴, 使 $\angle x'A'y' = 45^\circ$.

第二步: 过 D 点作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E, 在 x' 轴上取 $A'B' = AB = 4 \text{ cm}$, $A'E' = AE = \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ cm} \approx 2.598 \text{ cm}$;

过 E' 作 $E'D' \parallel y'$ 轴, 使 $E'D' = \frac{1}{2}ED$, 再过点 D' 作 $D'C' \parallel x'$ 轴, 且使 $D'C' = CD = 2 \text{ cm}$.

第三步: 连结 $A'D'$ 、 $B'C'$ 、 $C'D'$, 并擦去 x' 轴与 y' 轴及其他一些辅助线, 则四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求作的直观图(如图 1-2-25 所示).

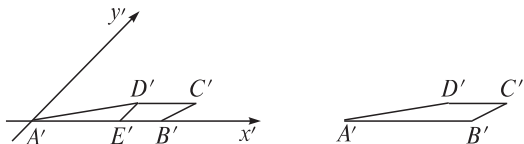


图 1-2-25

绿色通道 1. 在画水平放置的平面图形的直观图时, 选取适当的直角坐标系是关键, 一般要使得平面多边形尽可能多的顶点在坐标轴上, 便于画点.

2. 原图中的共线点, 在直观图中仍是共线点; 原图中的共点线, 在直观图中仍是共点线; 原图中的平行线, 在直观图中仍是平行线.

3. 本题中, 关键在于点 D' 位置的确定, 这里我们采用作垂线的方法, 先找到垂足 E' , 再去确定 D' 的位置.

黑色陷阱 没有遵守斜二测画法作图的步骤进行作图, 特别容易出现平行于 y 轴的线段在直观图中长度没有变为原来的一半的错误.

变式训练 4 画出长为 3 cm, 宽为 2 cm, 高为 3 cm 的长方体的直观图.

答案 如图 1-2-26 所示.

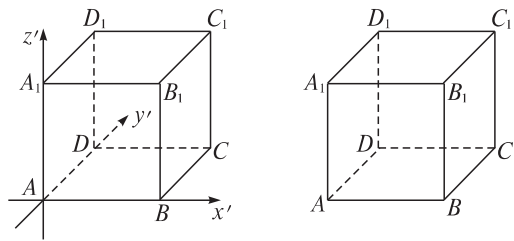


图 1-2-26

问题探究

问题 旋转体的三视图有哪些特征? 是否存在正视图、俯视图、侧视图完全相同的几何体?

导思 要画出旋转体的三视图, 一要明确常见旋转体的定义, 即分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴, 其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫作圆柱、圆锥、圆台; 二要明确三视图的规则要求.

探究 旋转体是平面图形绕轴旋转而构成的几何体, 这就决定了旋转体的三视图具有共同特征: 当旋转轴为竖直方向时, 旋转体的正视图与侧视图相同, 即旋转体的轴截面, 而俯视图都是圆面或圆环面.

存在三视图中正视图、侧视图、俯视图完全相同的几何体, 如正方体、球等(如图 1-2-27).

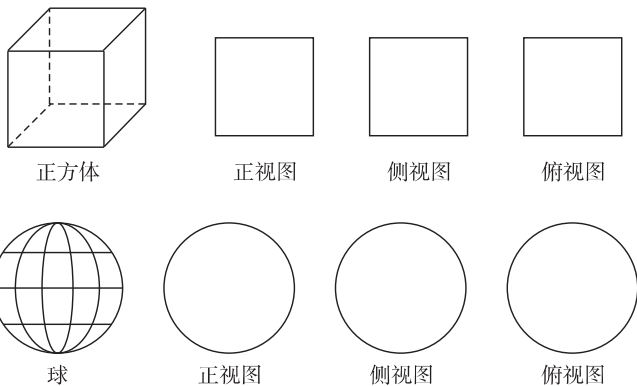


图 1-2-27

自主广场

我夯基 我达标

1. 两条相交直线的平行投影是 ()
 A. 两条相交直线
 B. 一条直线
 C. 一条折线
 D. 两条相交直线或一条直线

- 2 甲、乙、丙、丁四人分别面对面坐在一张四边形桌子旁边,桌上一张纸上写着数字“9”,如图 1-2-28 所示。甲说他看到的是“6”,乙说他看到的是“o”,丙说他看到的是“o”,丁说他看到的是“9”,则下列说法正确的是

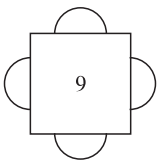


图 1-2-28

- ()
- A. 甲在丁的对面,乙在甲的左边,丙在丁的右边
 B. 丙在乙的对面,丙的左边是甲,右边是乙
 C. 甲在乙的对面,甲的右边是丙,左边是丁
 D. 甲在丁的对面,乙在甲的右边,丙在丁的右边
- 3 如果一个几何体的正视图和侧视图都是长方形,那么这个几何体可能是 ()
- A. 长方体 B. 圆柱或正方体
 C. 长方体或圆台 D. 长方体或圆柱
- 4 桌子上放着一个长方体和圆柱(如图 1-2-29),下列图 1-2-30 所示三幅图分别是_____。

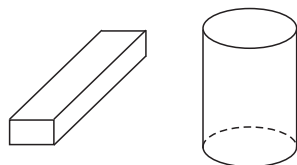


图 1-2-29

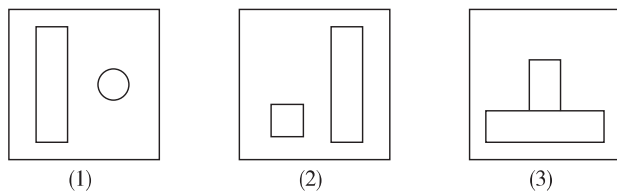


图 1-2-30

- 5 画出图 1-2-31 所示正四棱锥的三视图。



图 1-2-31

- 6 画出图 1-2-32 所示几何体的三视图。

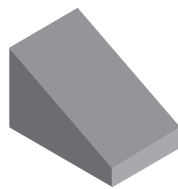


图 1-2-32

我综合我发展

- 7 如果一个三角形的平行投影仍是一个三角形,则下列结论正确的是 ()
- A. 内心的平行投影还是内心
 B. 重心的平行投影还是重心
 C. 垂心的平行投影还是垂心
 D. 外心的平行投影还是外心
- 8 一个三角形用斜二测画法画出来是一个正三角形,边长为 2,则原三角形的面积是 ()
- A. $2\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{6}$ C. $\sqrt{3}$ D. 都不对
- 9 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 45° ,腰和上底长均为 1 的等腰梯形,则该平面图形的面积等于 ()
- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. $1 + \sqrt{2}$ D. $2 + \sqrt{2}$
- 10 画出如图 1-2-33 所示物体的三视图。

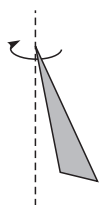


图 1-2-33

- 11 根据图 1-2-34 所示物体的三视图(阴影部分为空洞)描绘出物体的大致形状。

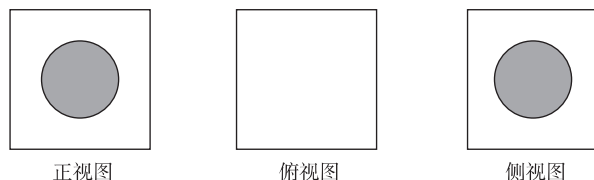


图 1-2-34

1.3 空间几何体的表面积与体积

知识梳理

1. 圆柱的侧面展开图是_____,圆锥的侧面展开图是_____,圆台的侧面展开图是_____.
2. 几何体的表面积是指_____,棱柱、棱锥、棱台的表面积就是求_____,圆柱、圆锥、圆台的表面积就是求_____.
3. 设直棱柱的底面周长为 C , 高为 h 则 $S_{\text{直棱柱侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设正棱锥的底面周长为 C , 斜高为 h' , 则 $S_{\text{正棱锥侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设正棱台的上、下底面的周长分别为 C 、 C' , 斜高为 h' 则 $S_{\text{正棱台侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设圆柱的底面半径为 r , 母线长为 l , 则圆柱的侧面积 $S_{\text{侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$, 圆柱的表面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 则圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$, 圆锥的表面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设圆台的上、下底面的半径分别为 r_1 、 r_2 , 母线长为 l , 则圆台的侧面积 $S_{\text{侧}} = \underline{\hspace{2cm}}$, 圆台的表面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 设柱体的底面积为 S , 高为 h 则 $V_{\text{柱体}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 设锥体的底面积为 S , 高为 h 则 $V_{\text{锥体}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 设台体的上、下底面的面积分别为 $S_{\text{上}}$ 、 $S_{\text{下}}$, 高为 h 则 $V_{\text{台体}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 球的表面积和体积都是半径 R 的函数, 其中 $S_{\text{球面}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $V_{\text{球}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

知识导学

要学好本节内容, 可从我们熟悉的长方体、正方体的展开图入手, 分析展开图与表面积的关系.

表面积是各个面的面积之和. 求多面体表面积时, 只需将它们沿着若干条棱剪开后展成平面图形, 利用平面图形求面积的方法, 求多面体的表面积. 求旋转体的表面积时, 可从回忆旋转体的生成过程及其几何特征入手, 将其展开求表面积, 但要搞清它们的底面半径、母线长与对应的侧面展开图中的边长关系.

几何体占有空间部分的大小, 叫做几何体的体积. 这里的“大小”没有比较大小的含义, 而是要用具体的“数”来定量的表示几何体占据了多大的空间. 相同几何体的体积相等, 但体积相同的几何体不一定相同.

疑难突破

1. 如何得到台体的体积公式?

剖析 如图 1-3-1, 设台体(棱台或圆台)上、下底面面积分别是 S' 、 S , 高是 h , 设截得台体时去掉的锥体的高是 x , 则截得这个台体的锥体的高是 $h+x$, 则

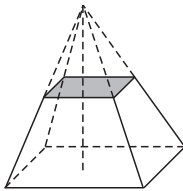


图 1-3-1

$$V_{\text{台体}} = V_{\text{大锥体}} - V_{\text{小锥体}} = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S'x$$

$$= \frac{1}{3}[Sh + (S - S')x], \text{ 而 } \frac{S}{S'} = \frac{x^2}{(h+x)^2}$$

$$\text{所以 } \sqrt{\frac{S}{S'}} = \frac{x}{h+x}, \text{ 于是有 } x = \frac{\sqrt{S'h}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}, \text{ 代入体积表}$$

$$\text{达式得 } V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}h[S + (S - S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}]$$

$$= \frac{1}{3}h[S + \sqrt{SS'} + S'].$$

由于台体是由锥体截得的, 所以, 我们常常采用“还台为锥”的思想方法来研究台体的几何性质, 即台体的体积可转化为两个锥体的体积之差.

对于棱台, 由于截面与截面相似, 所以其面积等于对应的平方比, 同时也等于截得的棱锥的高与原棱锥高的平方比. 可以据此确定相关变量的值. 对于圆台, 可通过轴截面的一半去研究相关量.

这种化未知为已知、化生疏为熟悉的思想方法是我们研究几何问题常用的思想方法. 台体的体积只与两底面的面积和它的高有关.

2. 棱锥、棱台、棱柱的侧面积公式、体积公式有何联系与区别, 能否统一?

剖析 棱台侧面积公式:

$$S_{\text{正棱台侧}} = \frac{1}{2}(c+c')h' \begin{cases} c'=0 \rightarrow S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2}ch' \\ c=c', h=h' \rightarrow S_{\text{正棱柱侧}} = ch \end{cases}$$

$c'=0$ 时, 棱锥可以看作上底周长为 0 的棱台.

$$V_{\text{台体}} = \left(\frac{1}{3}S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}}\right)h \begin{cases} S_{\text{上}}=0 \rightarrow V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh \\ S_{\text{上}}=S_{\text{下}} \rightarrow V_{\text{柱}} = Sh \end{cases}$$