

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计. 数学. 必修:II. 新课标北师大版/任志鸿,孟国泰主编. - 2 版.
-海口: 南方出版社, 2004. 10 (2006. 10 重印)
(志鸿优化系列丛书)
ISBN 7-80701-268-4

I. 高... II. ①任... ②孟... III. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 104601 号

责任编辑 涂云华
装帧设计 邢 丽

志鸿优化系列丛书
高中同步测控优化设计·数学·必修:II
任志鸿 孟国泰 主编

南方出版社 出版
(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)
邮编 570203 电话 0898 - 65371546
山东鸿杰印务有限公司印刷
山东世纪天鸿书业有限公司总发行
2006 年 10 月第 4 版 2006 年 10 月第 1 次印刷
开本 890 × 1240 1/16
印张 5.25 字数 168 千字
定价 9.50 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

目录

content

第一章 立体几何初步	1	7.3 球的表面积和体积	33
§1 简单几何体	2	§8 面积公式和体积公式的简单应用 ...	38
1.1 简单旋转体	2	本章测评	43
1.2 简单多面体	2	第二章 解析几何初步	47
§2 三视图	7	§1 直线与直线的方程	48
2.1 简单组合体的三视图	7	1.1 直线的倾斜角和斜率	48
2.2 由三视图还原成实物图	7	1.2 直线的方程	51
§3 直观图	12	1.3 两条直线的位置关系	51
§4 空间图形的基本关系与公理	18	1.4 两条直线的交点	57
4.1 空间图形基本关系的认识	18	1.5 平面直角坐标系中的距离公式	57
4.2 空间图形的公理	18	§2 圆与圆的方程	61
§5 平行关系	23	2.1 圆的标准方程	61
5.1 平行关系的判定	23	2.2 圆的一般方程	61
5.2 平行关系的性质	23	2.3 直线与圆、圆与圆的位置关系	67
§6 垂直关系	27	§3 空间直角坐标系	73
6.1 垂直关系的判定	27	3.1 空间直角坐标系的建立	73
6.2 垂直关系的性质	27	3.2 空间直角坐标系中点的坐标	73
§7 简单几何体的面积和体积	33	3.3 空间两点间的距离公式	73
7.1 简单几何体的侧面积	33	本章测评	78
7.2 棱柱、棱锥、棱台和圆柱、圆锥、圆台的 体积	33	模块综合测评	81

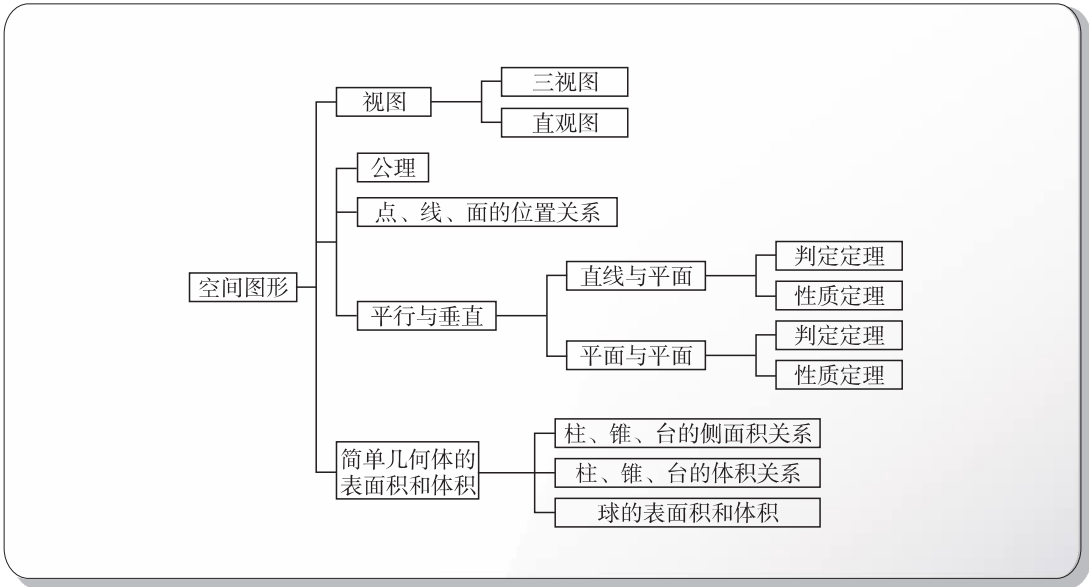
第一章 立体几何初步



三维目标

- 1. 通过生活中的实际例子引入空间几何体的相关概念,体现了由特殊到一般,由具体到抽象的理论形成过程.从而形成了立体几何的初步理论.而本章内容的整体思路体现了从点到线、从线到面、从面到体的基本研究思想.
- 2. 空间几何体的三视图和直观图从不同方面反映了几何体的特征,通过画三视图也可以增强空间想象能力,而直观图不仅反映了几何体具有的特征,也为把立体图形在平面中表示的方法提供了依据.斜二测画法不仅是画几何图形的工具,也是立体几何理论的基础,它把空间几何体转化为平面中进行研究提供了可能.
- 3. 求几何体的体积是生活中经常遇到的问题,而体积也是几何体的一个重要的特征,通过对体积的探讨不仅加深了对几何体特征的认识,也体现了数学的应用价值,增强了对数学的感性理解,也体现了学习立体几何的必要性.
- 4. 在初中平面几何的基础上,通过对比与联想等方法总结出空间直线与平面之间的位置关系,进一步讨论平面与平面的关系则是对几何体知识的更深层次的细化.理解这一部分知识可以加强对几何体中某些元素的认识,实现了认识从表面到本质的飞跃.
- 5. 空间的平行与垂直关系与初中平面几何中的平行与垂直关系既有联系又有区别,空间的垂直与平行关系是几何体中某些局部元素性质的反映,也是把几何体抽象化后的结果.因此,无论线还是面都离不开相应的几何体,体现了事物之间互相联系的辩证唯物主义思想.也是人类认识世界的方法论基础.

知识网络



§ 1 简单几何体

1.1 简单旋转体

1.2 简单多面体

知识梳理

一、简单旋转体

1. 以半圆的直径所在直线为旋转轴,将半圆旋转一周形成的曲面叫做球面.球面所围成的几何体叫做球体,简称球.连结球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径.连结球面上两点并且过球心的线段叫做球的直径.

2. 在球面上,两点之间最短连线的长度,就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度,我们称这段弧长为两点的球面距离.

3. 分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴,其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫做圆柱、圆锥、圆台.

二、简单多面体

1. 把若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体.

2. 一般地,有两个平面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的几何体叫做棱柱.以侧棱与底面是否垂直,该几何体可分为直棱柱、斜棱柱.按底面多边形的边数可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

3. 一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的几何体叫做棱锥.它是以底面多边形的边数为标准进行划分的,其中空间最简单的是三棱锥.如果棱锥的底面是正多边形,且各侧面全等,即称作正棱锥.

4. 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫做棱台.用正棱锥截得的棱台叫做正棱台.

知识导学

要学好本节内容,可从直观感知义务教育阶段学过的正方体、长方体等空间几何体的整体结构入手,抽象出一般空间几何体的结构特征.本节是立体几何的基础课,

是学习立体几何的铺垫.掌握空间几何体的结构特征,将作为学习空间点、线、面的位置关系奠定坚实的基础.

对于球体,除了从旋转体的角度认识球的结构特征外,还可通过类比圆的结构特征,给出球的结构特征及有关概念,如球心、半径、直径等.要注意球体与球面的区别与联系.对与地球有关的概念,如经线、纬线等,可结合地球仪学习,其中球面距离不易理解,要注意体会.

除了按照教科书的方法认识圆柱、圆锥外,还可以类比棱柱、棱锥来认识圆柱、圆锥,虽然都是柱体,但棱柱的侧面是平面图形,而圆柱的侧面都是曲面.当圆台的上底逐渐变小,半径趋近于零时,圆台趋向于圆锥;当圆台上底逐渐变大,半径与下底半径相同时,圆台变为圆柱.同样地,棱台也有相同的变化规律.

疑难突破

1. 棱柱的几何特征

剖析 棱柱是多面体中最简单的一种,学习棱柱,应首先从观察我们身边常见的一些几何体入手,如三棱镜、长方体、螺杆的顶部等,通过概括共同特点得出棱柱的结构特征.

其次可通过变式训练,深化对棱柱结构特征的认识,如观察长方体,共有多少对棱相互平行,能作为棱柱底面的有几对?过长方体的底面截去长方体的一角,所得几何体是不是棱柱?有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体是不是棱柱?

再次,可从运动变化的观点去认识其结构特征,即棱柱可看成一个多边形上各点沿着一个方向移动相同的距离而得到的空间部分.

(1) 棱柱有两个本质特征:一是有两个面互相平行,二是其余各面每相邻两个面的公共边都互相平行.

(2) 两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底,其余各面叫做棱柱的侧面,相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱,侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.如果棱柱的一个底面水平放置,则铅垂线与两底面的交点之间的线段或距离,叫做棱柱的高.

棱柱的特点总结起来主要有：①两个互相平行的面是底面；②侧棱互相平行且相等；③侧面是平行四边形；④与底面平行的截面是与底面全等的多边形；⑤与侧棱平行的截面是平行四边形；⑥我们学习的棱柱中，底面都是凸多边形；⑦底面是三角形、四边形、五边形、…的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱、…。

2. 棱锥的几何特征

剖析 棱锥也是多面体，三棱锥是最简单的空间几何体之一。学习棱锥可从观察一些常见的棱锥模型和图片出发，观察组成这些几何体的面，形成对棱锥的直观认识，概括出它们的共同本质特征，从而导出棱锥的概念。

(1) 棱锥有两个本质特征：一是有一个面是多边形；二是其余各面都是有一个公共顶点的三角形，此处一定要注意有一个公共顶点。

(2) 棱锥中的多边形叫做棱锥的底面，有公共顶点的三角形叫做棱锥的侧面，相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱，棱锥中各侧面的公共点叫做棱锥的顶点。如果棱锥的底面水平放置，则顶点与过顶点的铅垂线和底面的交点之间的线段或距离，叫做棱锥的高。

(3) 棱锥按底面边数可分为三棱锥、四棱锥、五棱锥、六棱锥、…，其中三棱锥又叫四面体。

棱锥的特点总结起来主要有：①底面是多边形；②其余各面叫侧面，是有一个公共顶点的三角形；③侧面的公共边叫侧棱，相交于顶点；④三棱锥的所有面都是三角形，所以，四个面都可以看作底。

3. 棱柱、棱锥、棱台之间关系怎样？

剖析 依棱台概念可知，棱台是由棱锥用平行底面的平面截得的几何体，所以检测几何体是否为棱台，关键是延长侧棱看各延长线是否交于一点。

将棱台各侧棱延长后交于一点，即产生棱锥。故棱台也可以看作是用平行于底面的平面去截棱锥而夹在平面与底面之间的部分几何体。

将棱柱一底面缩小为一个点即得棱锥，将棱锥用平面平行底面去截可得棱台。因此，常将棱台问题转化为棱锥问题来解决。

棱台和圆台统称为台体，它们都是由平行于锥体底面的平面而截得的。因此，有关台体的问题常常转化为锥体的问题来解决。由定义可知，台体的分类方法与锥体的分类方法完全相同，因此，我们可以在认识锥体与台体的关系的基础上，通过自己的探究，获得对台体的结构特征的认识。

典题精讲

例1 下列命题中正确的是 …………… ()

A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱

B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

C. 有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫棱锥

D. 棱台各侧棱的延长线交于一点

思路解析 如图 1-1-1 (1)，面 $ABC \parallel$ 面 $A_1B_1C_1$ ，但图中的几何体每相邻两个四边形的公共边并不都互相平行，故不是棱柱。A、B 都不正确。棱锥是有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，即必须有一个公共顶点的几何体。如图 1-1-1 (2)，每个面都是三角形但形成的几何体不是棱锥。C 不正确。

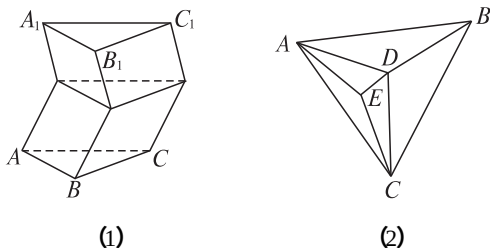


图 1-1-1

棱台是用一个平行于底面的平面去截棱锥而得到，其各侧棱的延长线必交于一点，故 D 是正确的。

答案 D

绿色通道 判断一个物体是否是简单几何体，一定要紧扣定义，注意定义中的特殊字眼，切不可马虎大意，如本例中的 A、B、C 三个选项，就有很强的干扰性。在开始学习立体几何时，要学会观察、分析并记住一些特殊的物体和图形，以便于做题。反例推证是一种重要的数学方法，要熟练掌握。

变式训练 下列命题中的真命题是 …………… ()

A. 以直角三角形的一直角边为轴旋转所得的旋转体是圆锥

B. 以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台

C. 圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆

D. 圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形所在圆的半径等于圆锥底面圆的半径

思路解析 以直角梯形垂直于底的腰为轴旋转所得的旋转体是圆台，所以 B 不对；圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面而不是圆，所以 C 不对；圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形所在圆的半径等于圆锥的母线长，所以 D 不对。

答案 A

例2 图 1-1-2 中的几个图形能否折叠成棱柱？请试折一下并回答为什么。

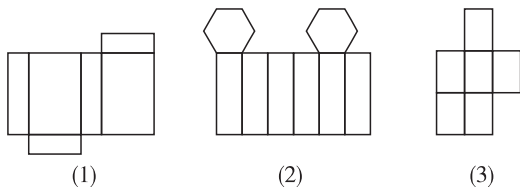


图 1-1-2

思路解析 该题考查的是空间想象能力,折叠时要先选择一个面作为底面.另外就是要了解棱柱的展开图的规律.

答案 图 1-1-2 (1) 可折成一个四棱柱.

图 1-1-2 (2) 不能折成棱柱,因为两个六边形在这些矩形的同一侧.

图 1-1-2 (3) 不能折成棱柱,因为与正方体的每个面相邻的面最多只有四个,因而展开后的图形中,任一个正方形在它的周围最多只应有四个正方形,而图中有一个正方形,在它的周围有了 5 个正方形,这是不可能的.

绿色通道 我们常见的多面体如棱柱、棱锥和棱台等,均可展开成平面图形,反之满足一定条件的平面图形亦可还原成空间多面体.

变式训练 如图 1-1-3 所示,小明设计了某个产品的包装盒,他少设计了其中一部分,请你把它补上,使其成为两边均有盖的正方体盒子.

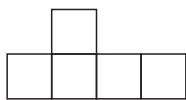


图 1-1-3

- (1) 你有_____种弥补的办法.
- (2) 任意画出一一种成功的设计图.

答案 : (1) 4 (2) 设计如图 1-1-4.

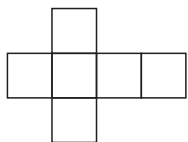


图 1-1-4

例 3 如图 1-1-5,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, BC=2, BB_1=1$, 则 A 到 C_1 在正方体表面上的最短距离为多少?

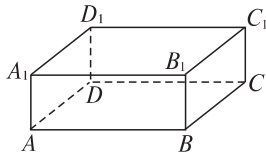


图 1-1-5

思路分析 本题可将长方体表面展开,利用在平面内两点间的线段长是两点间的最短距离来求解.

解 如图 1-1-6 展开, $AC_1 = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$;

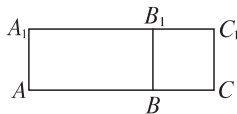


图 1-1-6

如图 1-1-7 展开, $AC_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$;

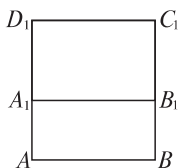


图 1-1-7

如图 1-1-8 展开, $AC_1 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

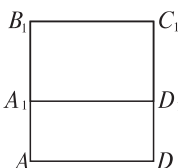


图 1-1-8

由此 A 到 C_1 在正方体表面上的最短距离为 $3\sqrt{2}$.

绿色通道 解答空间几何体表面上两点间最短线路问题,一般都是将空间几何体表面展开,转化为求平面内两点间线段长,这体现了数学中的转化思想.

变式训练 图 1-1-9 是边长为 1 m 的正方体,有一蜘蛛潜伏在 A 处, B 处有一小虫被蜘蛛网粘住,请制作出实物模型,将正方体剪开,描述蜘蛛爬行的最短路线.

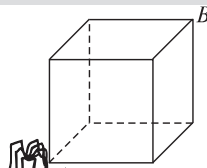


图 1-1-9

答案 制作实物模型(略).

通过图 1-1-10 的正方体的展开图可以发现 AB 间的最短距离为 A、B 两点间的线段的长.

由展开图可以发现, C 点为其中一条棱的中点.具体爬行路线如图 1-1-11 (1) ~ (3) 的粗线所示,要注意的是爬行路线并不唯一.

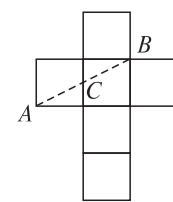


图 1-1-10

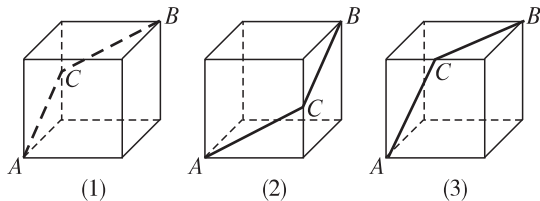


图 1-1-11

题探究

问题 1 什么样的平面图形可以折叠成正方体,什么样的平面图形可以折叠成四个面都是全等三角形的三棱锥.

导思 对该问题的探究,可采用逆向思维的方法来解答,即从正方体的展开图的几种形式考虑.

正方体的展开图有以下几种图形.

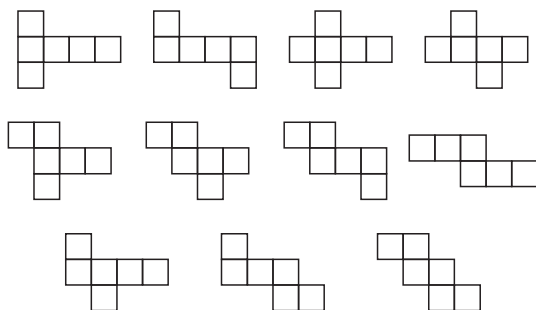


图 1-1-12

探究 学习棱柱、棱锥应该从最简单的情况入手,正方形、正四面体正是最理想的载体,这个问题主要要求把握多面体的基本情况,运用纸张折叠,结合想象,掌握这两类简单几何体的性质与构成.

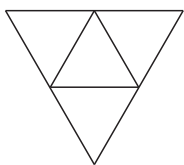


图 1-1-13

构成正方体的平面图形有很多种,可以用硬纸板先粘一个正方体,再分解.

如图 1-1-13,一个正三角形有三条中位线分开可以折成所要求的三棱锥,还有另外几种.

问题 2 正方体的截面可能是什么形状的图形?

导思 对于正方体的分割,可通过实物模型,实际切割实验,还可借助于多媒体手段进行切割实验.对于切割所得的平面图形可根据它的定义进行证明,从而判断出各个截面的形状.

探究 本题考查立体几何的空间想象能力,通过尝试、归纳,可以有如下各种肯定或否定性的答案:

(1) 截面可以是三角形 等边三角形、等腰三角形、一般三角形.

(2) 截面三角形是锐角三角形 截面三角形不能是直角三角形、钝角三角形.

(3) 截面可以是四边形:平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形、等腰梯形 截面为四边形时,这个四边形至少有一组对边平行.

(4) 截面不能是直角梯形.

(5) 截面可以是五边形 截面五边形必须有两组分别平行的边,同时有两个角相等 截面五边形不可能是正五边形.

(6) 截面可以是六边形 截面六边形必须有分别平行的边,同时有两个角相等.

(7) 截面六边形可以是等角(均为 120°) 的六边形,即正六边形.

截面图形如图 1-1-14 中各图所示:

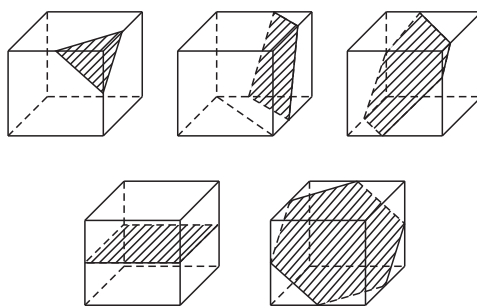


图 1-1-14



主广场

我夯基 我达标

1 用一个平面去截圆锥,得到的平面不可能是…

()

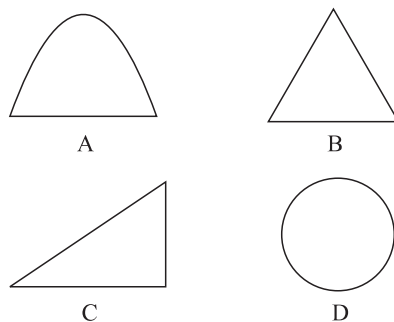


图 1-1-15

解析 一般的情况下,用平面来截圆锥时,不能得到非等腰的直角三角形(特殊情况除外,比如说两条母线如果成 90° 还是可以为等腰的直角三角形),以后同学们在学习圆锥曲线后,对这个问题会有更深刻的认识. 以下给出 A、B、D 所截时的情形:

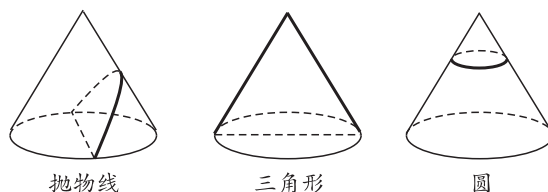


图 1-1-16

答案 C

2 长方体的截面中,边数最多的多边形是 …… ()

- A. 三角形 B. 四边形
C. 五边形 D. 六边形

解析 由于长方体有六条边,而截面最多可与这六条线段相交,故最多只能是六边形.

如图 1-1-17 所示,所得的截面便是六边形.

答案 D

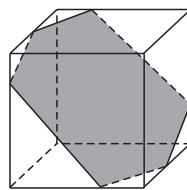


图 1-1-17

- 3 把图 1-1-18 中的纸片沿虚线折起来,便可成为一个正方体,这个正方体的面 2 的对面是 …… ()
- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

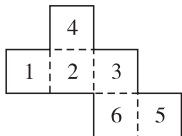


图 1-1-18

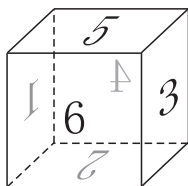


图 1-1-19

解析 折成正方体后,1 和 3 相对,4 和 6 相对,2 和 5 相对.如图 1-1-19 所示.

答案 C

- 4 2006 江苏高考,9 两相同的正四棱锥组成如图 1-1-20 所示的几何体,可放棱长为 1 的正方体内,使正四棱锥的底面 ABCD 与正方体的某一个平面平行,且各顶点均在正方体的面上,则这样的几何体体积的可能值有 …… ()

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 无穷多个

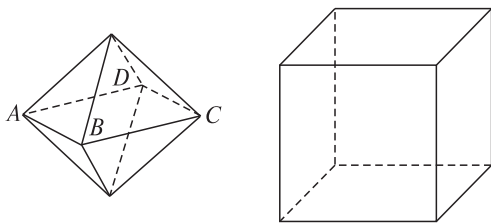


图 1-1-20

解析 本题可以转化为一个正方形可以有多少个内接正方形,显然有无穷多个.

答案 D

- 5 如图 1-1-21,棱长为 5 的立方体无论从哪一面看,都有两个直通的边长为 1 的正方形孔,则这个有孔立方体表面积(含孔内各面)是 …… ()

- A. 258 B. 234
C. 222 D. 210

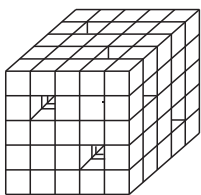


图 1-1-21

解析 所求面积为总表面积减去每个面小正方形面积加孔内面积,即所求面积为:完整正方体表面积 - 每个面小正方形面积 + 如果孔之间不相交时孔内各面总面积 - 孔相交处实际上不存在的面积 - 孔相交处重复计算的面积,列式计算为 $25 \times 6 - 2 \times 6 + 6 \times 20 - 6 \times 4 - 6 \times 2 = 222$.

答案 C

- 6 一个棱柱有 10 个顶点,所有的侧棱长的和为 60 cm,则每条侧棱长为 _____ cm.

解析 棱柱有 10 个顶点,说明此棱柱为五棱柱,五条侧棱长的和为 60 cm,可知每条侧棱长为 12 cm.

答案 12

- 7 把等腰三角形绕底边上的高旋转 180° ,所得的几何体是 _____.

解析 等腰三角形底边上的高是该旋转体的轴,绕此轴旋转一周,形成圆锥体,等腰三角形的底边充当此圆锥的底面直径,等腰三角形底边上的高充当圆锥的高.

答案 圆锥

我综合 我发展

- 8 水平放置的正方体的六个面分别用“前面、后面、上面、下面、左面、右面”表示.图 1-1-22 是一个正方体的平面展开图,若图中的“似”表示正方体的前面,“锦”表示右面,“程”表示下面.则“祝”“你”“前”分别表示正方体的 _____.



图 1-1-22

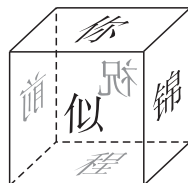
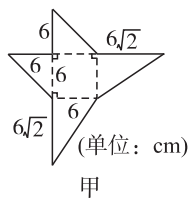


图 1-1-23

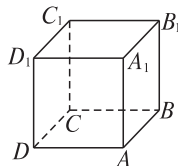
解析 把正方体的展开图复原为正方体即见答案(如图 1-1-23 所示).

答案 后面、上面、左面

- 9 图 1-1-24 甲所示为一几何体的展开图.



甲



乙

图 1-1-24

- (1) 沿图中虚线将它们折叠起来,是哪一种几何体?试用文字描述并画出示意图.

- (2) 需要多少个这样的几何体才能拼成一个棱长为 6 cm 的正方体?请在图乙棱长为 6 cm 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中指出这几个几何体的名称.

解:(1) 有一条侧棱垂直于底面且底面为正方形的四棱锥,如图甲所示.

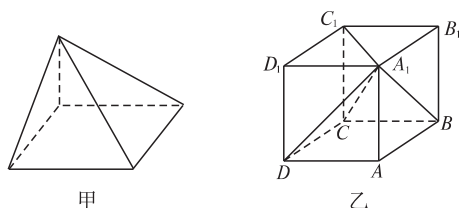
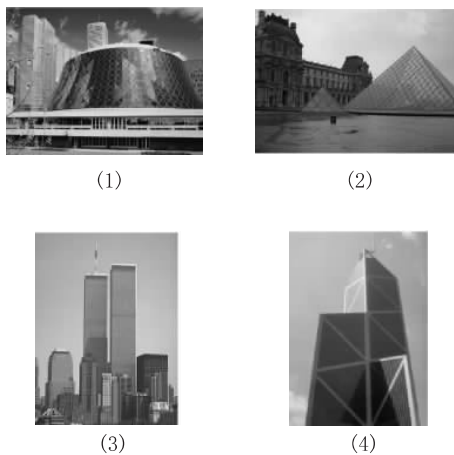


图 1-1-25

(2) 需要 3 个这样的几何体,如图乙所示. 分别为四棱锥 $A_1 - CDD_1C_1$, $A_1 - ABCD$, $A_1 - BCC_1B_1$.

10 欣赏世界各地著名建筑的图片 (如图 1-1-26 所示), 结合本单元知识讨论它们有哪些结构特征.



(5)



(6)



(7)



(8)

图 1-1-26

解析 只对图片中的主图分析即可,主要是抽象出简单的几何体.

答案:(1)~(8) 分别是圆台,棱锥,长方体,棱柱,球体,圆柱,圆柱,五棱柱.

§ 2 三视图

2.1 简单组合体的三视图

2.2 由三视图还原成实物图

知识梳理

1. 将物体按正投影向投影面投射所得到的图形称为视图. 投射自物体的前面向后投射所得的投影称为主视图,也叫正视图;自上向下的称为俯视图;自左向右的称为左视图. 用这三种视图刻画空间物体的结构,我们称之为三视图.

2. 绘制三视图的注意事项:

(1) 可见轮廓线用实线画出,不可见轮廓线用虚线画出.

(2) 相邻两物体若表面相交,表面的交线是它们的分

界线,要用实线画出.

3. 绘制简单组合三视图的注意事项:

(1) 确定主视、俯视、左视的方向. 同一物体放置的位置不同,所画的三视图可能不同;

(2) 简单组合体是由哪几个基本几何体组成,并注意它们的构成方式,特别是它们的交线位置.

知识导学

要学好本节内容,首先应复习掌握初中学过的简单空间图形的三视图,在此基础上能画出空间简单图形组合体的三视图,进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能.

三视图画法的要点是:主、俯视图长对正;主、左视图

高平齐 俯、左视图宽相等。

疑

难突破



1. 什么叫三视图？三视图是根据什么原理画出来的？

剖析 三视图是从三个不同的方向看同一个物体而得到的三个视图。为了使空间图形的直观图更能直观、准确地反映空间图形的大小，往往需要把图形向几个不同的平面分别作投影，然后把这些投影放在同一个平面内，并有机地结合起来表示物体的形状和大小。通常，总是选取三个两两互相垂直的平面作为投射面，如图 1-2-1，一个投射面水平放置，叫水平投射面，投射到这个平面内的图形叫俯视图。一个投射面放置在正前方，叫直立投射面，投射到这个平面内的图形叫主视图。和直立、水平两个投射面都垂直的投射面叫做侧立投射面，通常把这个平面放在直立投影的右面，投射到这个平面内的图形叫左视图。图 1-2-1 是一个长方体的三视图，正视图是一个矩形，表示长方体的长度和高度；它的俯视图也是一个矩形，它表示长方体的长度和宽度；它的左视图同样也是一个矩形，它表示长方体的宽度和高度。把这三个投影图放在一个平面内，如图 1-2-2 就是一个三视图。

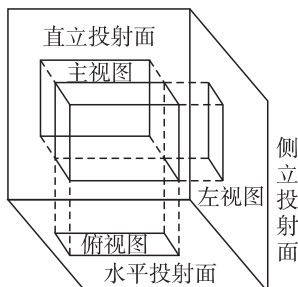


图 1-2-1



图 1-2-2

(1) 主视图反映物体的主要形状特征，是三视图中最主要的视图。俯视图要与主视图对正，左视图要画在主视图的正右方，高度方向要与主视图平齐，俯视图与左视图共同反映物体的宽度，宽度要相等。

(2) 三视图的排列规则是：先画主视图，俯视图安排在主视图的正下方，长度与主视图一样，左视图安排在主视图的正右方，高度与主视图一样。

(3) 当物体形状复杂时，三视图还不足以反映它的大小和形状，还需要更多的投射平面，或者分解成几部分分别画三视图。

2. 什么叫组合体？怎样画组合体的三视图？

剖析 将基本几何体，通过拼、切、挖手段构成组合体。作组合体三视图时，首先掌握组合体的结构，弄清组合体是由哪些基本几何体组成的，是采用什么方式构成的。确定好表面的交线，外部可见轮廓线，内部不可见轮廓线，定好主视、俯视、左视的方向。注意用好“长对正，高平齐，宽相等”的作图原则，便可完成三视图的绘画。

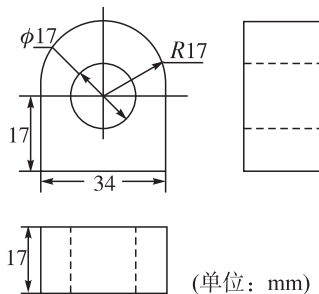
要画好组合体的三视图，首先要掌握常见的柱、锥、台、球等常见几何体的三视图，再结合组合体三视图的画法与步骤画三视图。

典

题精讲



例 1 图 1-2-3 是一个零件的三视图，试画出这个零件的实物图。



1-2-3

思路解析 三视图所表示的几何体为：由长为 34 mm、高和宽都为 17 mm 的长方体与直径为 34 mm、宽度为 17 mm 的半圆柱组成几何体后，又从圆柱轴心切去半径为 17 mm 的圆柱，其实物直观图如图 1-2-14 所示。

答案 所绘制图形如图 1-2-4 所示：

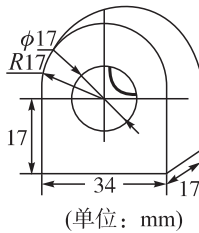


图 1-2-4

绿色通道：一是要看所给的三视图是由哪些简单几何体组成的，二是可以把绘制后的实物图的三视图与原图作比较，即可看出是不是想象得正确。

黑色陷阱 所画的实物图残缺，主要是缺乏空间想象力和对原来实物图画出三视图时的基本制图不熟悉。

变式训练 说出图 1-2-5 三视图的几何体名称.

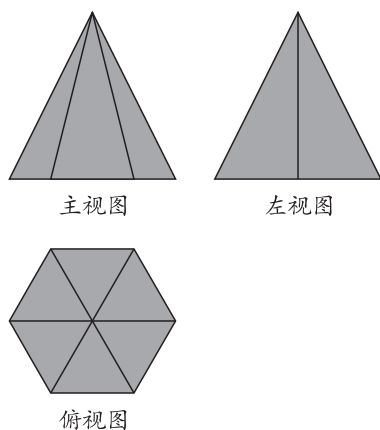


图 1-2-5

答案 六棱锥.

例 2 画出图 1-2-6 中几何体的三视图 (阴影面为视角正面).

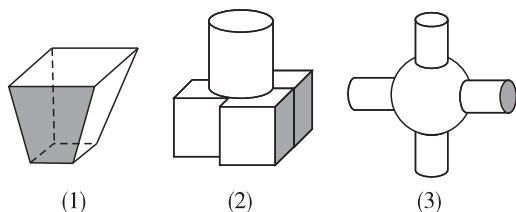


图 1-2-6

思路解析 仔细观察实物模型,想象从三个角度各看到了什么,进而准确地画出几何体的三视图.

答案 如图 1-2-7.

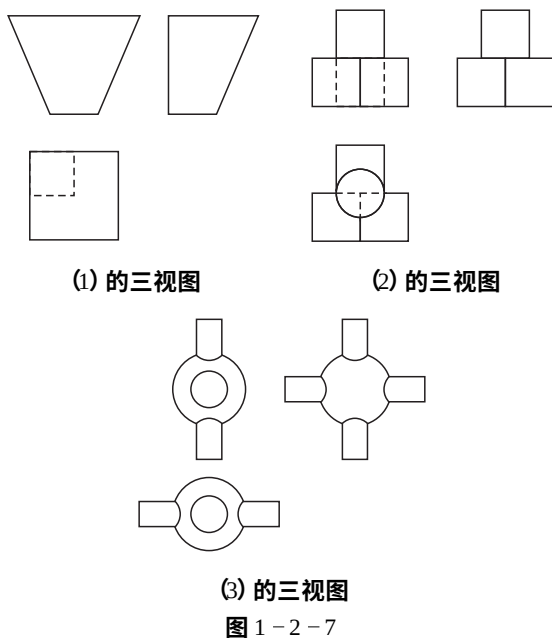


图 1-2-7

绿色通道 画物体的三视图时可以想象自己就站在物体的正前方、正上方、正左方,观察它是由哪些基本几何体组合而成的,它的外轮廓线是什么,然后再去画图,有条件的还可以观察实物模型,也可以自己去把模型做出来,这是一个从模型到图形的过程,从具体到抽象再到具体的过程,是提高空间想象能力的有效做法.

变式训练 画出图 1-2-8 所示几何体的三视图.

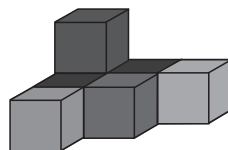


图 1-2-8

答案:

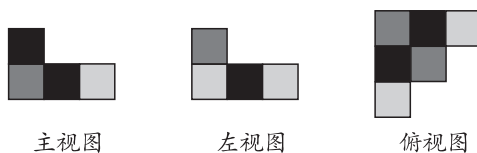


图 1-2-9

例 3 如图 1-2-10,直角梯形 $ABCD$ 绕底边 AD 所在直线 EF 旋转,在旋转前,非直角的腰的端点 A 可以在 DE 上选定.当点 A 选在射线 DE 上的不同位置时,形成的几何体大小、形状不同,分别画出它的三视图并比较其异同点.

图 1-2-10

思路解析 本题关键在于要对 A 选在射线 DE 上的不同位置分别讨论,看旋转后的几何体可由哪些简单几何体构成.

答案:(1) 当点 A 在图 1-2-11 所示位置时,绕 EF 旋转一周所得几何体为底面半径为 CD 的圆柱和圆锥组合而成,其三视图如图:

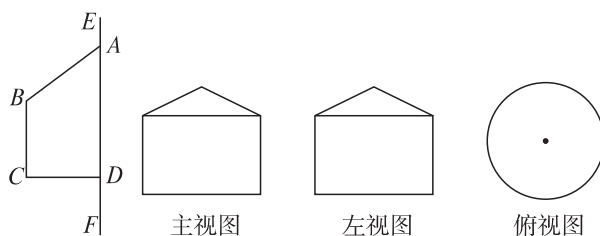


图 1-2-11

图 1-2-12

(2) 当点 A 在图 1-2-13 所示位置时,即 B 到 EF 所作垂线的垂足时,旋转后几何体为圆柱,其三视图如图:

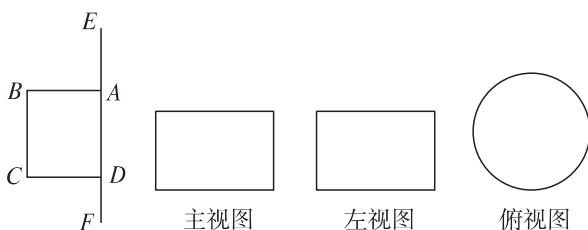


图 1-2-13

图 1-2-14

(3) 当点 A 位于如图 1-2-15 所示位置时,其旋转所得几何体为圆柱中挖去同底的圆锥,其三视图如图:

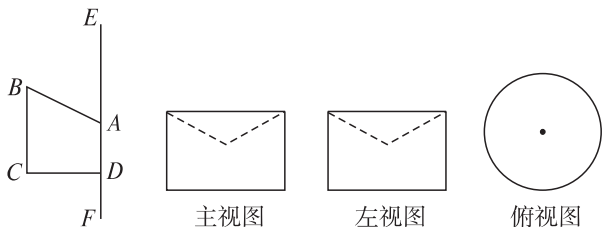


图 1-2-15

图 1-2-16

(4) 当点 A 位于点 D 时,如图 1-2-17,此时旋转体为圆柱中挖去一个同底等高的圆锥,其三视图如图:

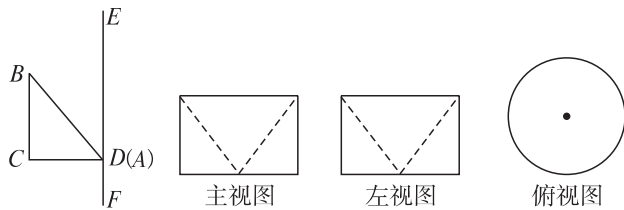


图 1-2-17

图 1-2-18

绿色通道: (1) 由轴截面想到旋转体,由旋转所得组合体画出三视图,综合性很强,同时也显示了旋转体的三视图特点,即主视图与左视图完全相同,并且俯视图为圆. 故旋转体的三视图可简化为“二视图”.

(2) 现实生活中,很多物体都是由基本几何体组合而成. 要多留心观察这些物体,联想它们各组成部分所表示的基本几何体,并善于解剖这些物体,进而正确地画出它们的三视图.

变式训练 图 1-2-19 是从某一种型号的滚筒洗衣机抽象出来的几何体,数据如图所示(单位:cm),试画出它的三视图.

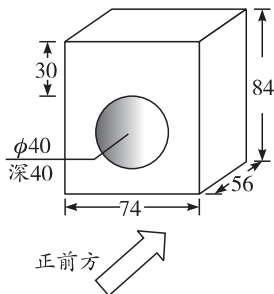


图 1-2-19

思路解析 这个几何体是由一个长方体和一个圆柱体构成的.

答案 三视图如图 1-2-20 所示:

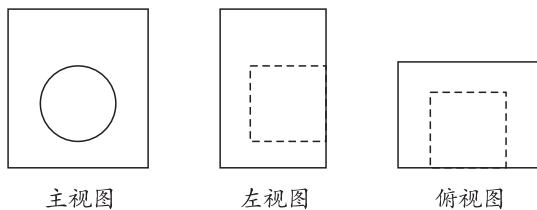


图 1-2-20

问题探究

问题 旋转体的三视图有哪些特征? 是否存在主视图、俯视图、左视图完全相同的几何体?

导思 画旋转体的三视图,一要明确常见旋转体的定义,即分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴,其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫做圆柱、圆锥、圆台.

二要明确三视图的规则要求. 三视图画法的要点是:主、俯视图长对正,主、左视图高平齐,主、左视图宽相等.

探究 旋转体是平面图形绕轴旋转而构成的几何体,这就决定了旋转体的三视图具有共同特征:当旋转轴为竖直方向时,旋转体的主视图与左视图相同,即旋转体的轴截面,而俯视图都是圆面或圆环面.

存在三视图中主视、左视、俯视图完全相同的几何体. 如正方体、球等,它们的三视图如图 1-2-21 所示,均是正方形或圆.

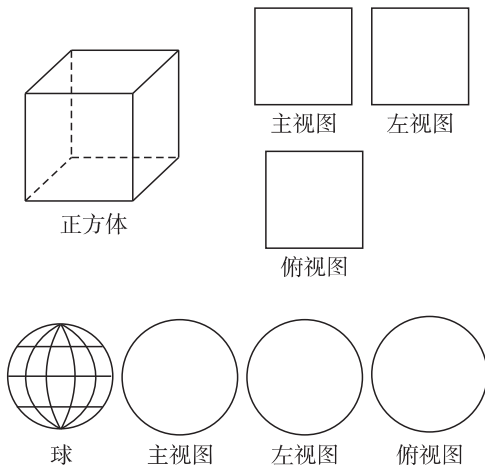


图 1-2-21

自主广场

我夯基 我达标

1 如图 1-2-22 所示的由立方体组成的塔体中,从前面、上面、左面看的视图中正确的是…… ()

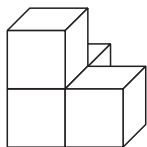


图 1-2-22

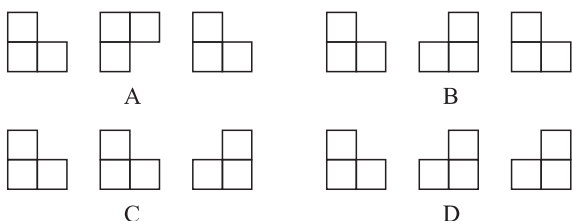


图 1-2-23

解析:一般来说从左面和正面来看较容易些.要注意的是在上面看时,你可以想象自己站在物体的正面低下头就可以了.

答案 B

- 2 已知一物体和它的三视图如图 1-2-24 所示,其中错误的视图是 ()

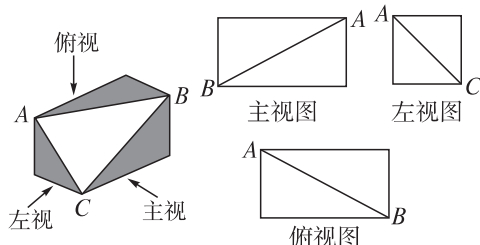


图 1-2-24

- A. 主视图 B. 俯视图
C. 左视图 D. 无错误

解析:主视图错了,主视图中看到的应该是 BC.

答案 A

- 3 有一个几何体的三视图如图 1-2-25 所示,这个几何体应是一个 ()

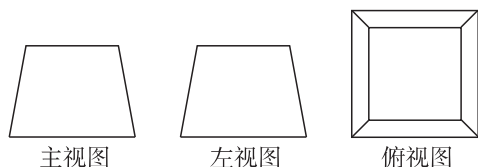


图 1-2-25

- A. 棱柱 B. 棱锥
C. 棱台 D. 都不对

解析:由于主视图和左视图相同,故知这个物体的四个侧面是全等的等腰梯形.两个底均为正方形,所以它是棱台.

答案 C

- 4 在几何体①圆锥;②正方体;③圆柱;④球;⑤正四面体(指四个面都是正三角形的四面体)中,三视图完全一样的几何体是 ()

- A. ①③④ B. ④⑤
C. ②④⑤ D. ④

解析:只有球的三个视图都是圆.圆锥的俯视图和左视图不同.正方体放置的位置不同时三视图并不相同.圆柱的俯视图和正视图不同.正四面体的三个视图并不相同.

答案 D

- 5 如果由小正方体组成的如图 1-2-26 所示的模型中白色的面对着你,试画出它的三个方向的视图.



图 1-2-26

解析:要把白色的一面当成正面来看,可以想象把所给的模型转一下方向,转到正面来考虑.

答案:这个立体图形从正面看、左面看、上面看到的三视图如图所示:

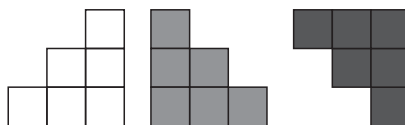


图 1-2-27

我综合我发展

- 6 画出图 1-2-28 中物体的三视图.

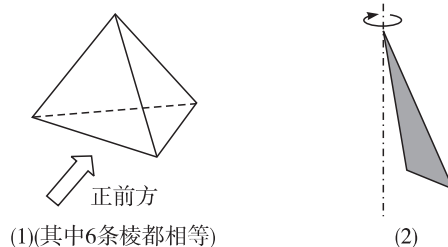


图 1-2-28

解析:画三视图时要注意三种视图各自的特点.可见轮廓线用实线画图,不可见轮廓线用虚线画图.

答案:图(1)的三视图如图 1-2-29 所示:

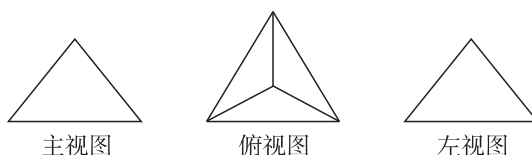


图 1-2-29

图(2)的三视图如图 1-2-30 所示:

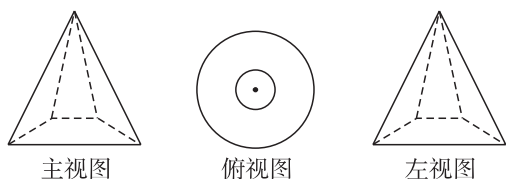


图 1-2-30

7 画出图 1-2-31 中空间图形的三视图(染色面为正面):

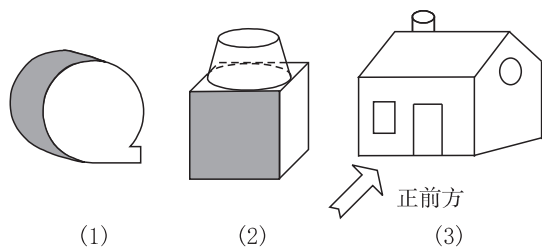


图 1-2-31

解析 画组合体的三视图前,先分清正视图的方向,然后分解成简单几何体.

答案 图(1)的三视图是:

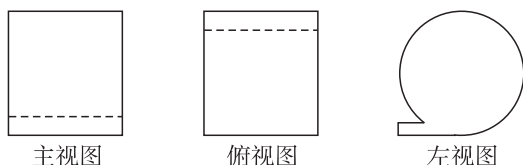


图 1-2-32

图(2)的三视图是:



图 1-2-33

图(3)的三视图是:

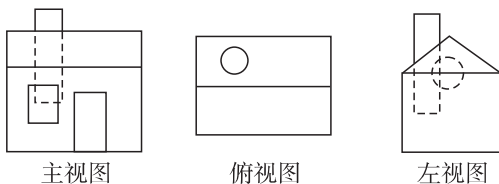


图 1-2-34

8 观察图 1-2-35 中由棱长为 1 的小立方体摆成的图形,寻找规律.

如图①中,共有 1 个小立方体,其中 1 个看得见,0 个看不见 图②中,共有 8 个小立方体,其中 7 个看得见,1 个看不见 图③中,共有 27 个小立方体,其中 19 个看得见,8 个看不见……则图⑥中,看不见的小立方体有_____个.

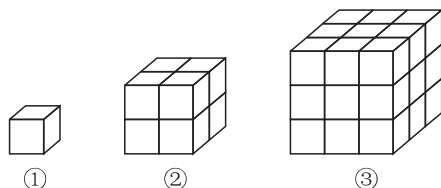


图 1-2-35

解析 再画出图④就容易找到规律了,如图所示,其中共有 $4^3 = 64$ 个小的立方体,其中能看到的有 37 个,看不到的有 $64 - 37 = 27$ 个,……所以可以得出:对于看不到的立方体有如下的规律:1 对着 0,2 对着 1,3 对着 8,4 对着 27,……,即看不到的立方体的个数是序号数减去 1 的差的三次方. 故第 6 个图中,看不到的小立方体个数是 $(6 - 1)^3 = 125$.

答案 125

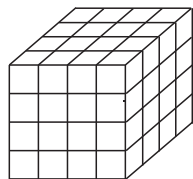


图 1-2-36

§ 3 直观图

知识梳理

1. 我们经常用斜二测画法画出几何体的直观图,画直观图时,关键是掌握水平放置的平面图形的画法,它的步骤是:

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴相交于点 O ,画直观图时,把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴,两

轴交于点 O' ,且使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°),它们确定的平面表示水平面.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段,在直观图中保持原长度不变,平行于 y 轴的线段,长度为原来的一半.

2. 空间几何体的直观图和三视图有着密切的联系,

我们能够由空间几何体的三视图得到它的直观图,同时,也能够由空间几何体的直观图得到它的三视图.

知识导学

用斜二测画法画直观图,关键是掌握水平放置的平面图形的直观图的画法,而画水平放置的平面图形的关键是确定多边形的顶点.因为多边形顶点的位置一旦确定,依次连结这些顶点就可画出多边形来,因此平面多边形水平放置时,直观图的画法就可归结为确定点的位置的画法.

所谓直观图,就是把空间图形在平面内画得既富有立体感,又能表达出各主要部分的位置关系和度量关系的图形.画直观图时,既可采用正多边形逼近的思想,也可采用将圆的直径 n 等分,并过各分点作 y 轴的平行线的作法.对于柱体,只需过水平放置的底面上的各顶点分别作 z 轴的平行线,并使其等于柱体的棱长,这样可确定上底面的顶点.对于锥体,只需在 z 轴上截取一线段使其等于锥体的高,便可确定锥体的顶点.

疑难突破

怎样快速准确利用斜二测画法画出一个规范的几何体直观图?

剖析 在已知图形中建立直角坐标系 xOy 时,原则上可任意建立,但为了节省时间,通常选取中点或中心为原点,以原图形中边所在直线为轴建立.注意对称性和平行于坐标轴的要求,如此可大量减少作图量.

如图 1-3-1 所示:

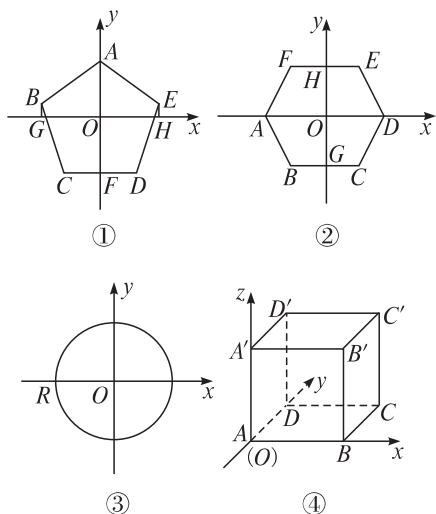


图 1-3-1

画水平放置的平面图形的直观图关键是确定直观图的顶点.确定顶点的位置,可采用直角坐标系.建立恰当的坐标系是迅速作出直观图的前提,常利用图形的对称性,让顶点尽量多地落在坐标轴或与坐标轴平行的直线

上.首先画出轴上或平行于轴的边,对于不平行于轴的边、棱,则过顶点向 x 轴作垂线段,创造平行于轴的线段.

如图 1-3-2 所示:

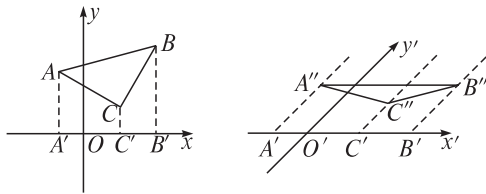


图 1-3-2

画正棱锥和正棱柱的直观图时,要抓住以下关键:

- (1) 用斜二测画法画水平放置的底面的直观图.
- (2) 正棱锥的顶点和棱柱侧棱的确定.
- (3) 画直观图的四个步骤:①画轴;②画底面;③画侧棱;④成图.

记忆口诀:

直观图来要画好,斜二测法是个宝.

斜二测法有三条,一条一条要记牢:

原来直角坐标系,右倾 45° 好记忆,

原来线与轴平行,斜二测后还平行,

平行 x 轴长不变,平行 y 轴长减半.

典题精讲

例 1 如图 1-3-3 所示,梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $CD = 2$ cm, $\angle DAB = 30^\circ$, $AD = 3$ cm,试画出它的直观图.

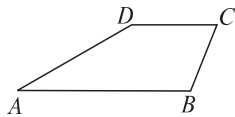


图 1-3-3

思路解析 本题考查利用斜二测画法画空间图形的直观图.要有一些平行于原坐标轴的线段才好按部就班地作图,所以先在原坐标系中过 D 作出该点在 x 轴的垂足,则对应地可以作出线段 DE 的直观图,进而作出整个梯形的直观图.

答案 第一步 在梯形 $ABCD$ 中,以边 AB 所在的直线为 x 轴,点 A 为原点,建立平面直角坐标系 xOy ,画出对应的 x' 轴, y' 轴,使 $\angle x'A'y' = 45^\circ$.

第二步 过 D 点作 $DE \perp x$ 轴,垂足为 E ,在 x' 轴上取 $A'B' = AB = 4$ cm, $A'E' = AE = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm ≈ 2.598 cm;

过 E' 作 $E'D' \parallel y'$ 轴,使 $E'D' = \frac{1}{2}ED = \frac{3}{4}$,再过点 D' 作 $D'C' \parallel x'$ 轴,且使 $D'C' = CD = 2$ cm.

第三步 连结 $A'D'$ 、 $B'C'$ 、 $C'D'$,并擦去 x' 轴与 y' 轴及其他一些辅助线,则图 1-3-4 中的四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求作的直观图.

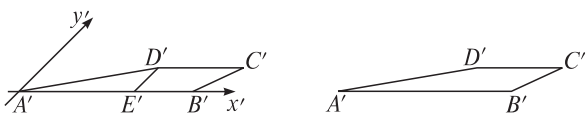


图 1-3-4

绿色通道 1. 在画水平放置的平面图形的直观图时,选取适当的直角坐标系是关键,一般要使得平面多边形尽可能多的顶点在坐标轴上,便于找点.

2. 原图中的共线点,在直观图中仍是共线点;原图中的平行线,在直观图中仍是平行线.

3. 本题中,关键在于点 D' 位置的确定,这里我们采用作垂线的方法,先找到垂足 E' ,再去确定 D' 的位置.

黑色陷阱 没有遵守斜二测画法作图的步骤进行作图,特别可能出现平行于 y 轴的线段在直观图中长度没有变为原来的一半的错误.

变式训练 图 1-3-5 为一平面图形的直观图,则此平面图形可能是图 1-3-6 中的 ()

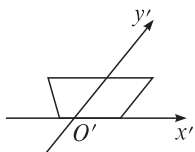


图 1-3-5

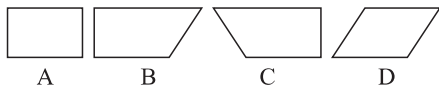


图 1-3-6

答案 C

例 2 画出长为 3 cm, 宽为 2 cm, 高为 3 cm 的长方体的直观图.

思路解析 本题考查利用斜二测画法画空间图形的直观图. 选好坐标原点是关键.

答案 如图 1-3-7 所示,按如下步骤完成:

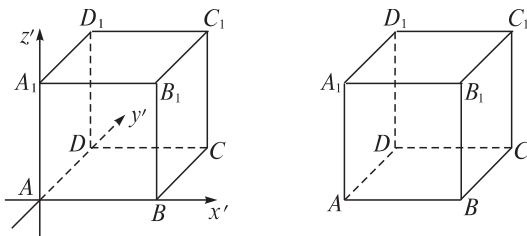


图 1-3-7

第一步 作水平放置的长方形(长为 3 cm, 宽为 2 cm)的直观图 $ABCD$, 使 $AB = 3$ cm, $\angle DAB = 45^\circ$, $AD = 1$ cm;

第二步 过点 A 作 z' 轴, 使 $\angle z'AB = 90^\circ$, 分别过点 B, C, D 作 z' 轴的平行线, 在 z' 轴及这组平行线上分别截取

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 3$ cm;

第三步 连结 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$, 并擦去 x' 轴、 y' 轴及 z' 轴, 得到的图形就是所求的长方体的直观图.

黑色陷阱 1. 虚线与实线不加区分, 从而立体感不强.

2. 没有遵守斜二测画法的规则进行作图, 特别可能出现平行于 y 轴的线段在直观图中长度没有变为原来的一半的错误.

变式训练 已知正三角形 ABC 的边长为 a , 那么 $\triangle ABC$ 的平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$
C. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$ D. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

答案 D

例 3 如图 1-3-8, 已知几何体的三视图, 用斜二测画法画出它的直观图.

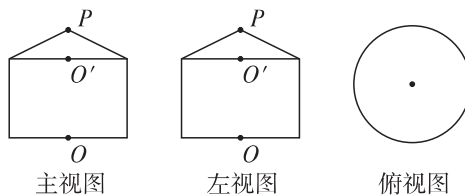


图 1-3-8

思路解析 本题考查空间几何体的三视图与直观图的相互转化关系. 由几何体的三视图知道, 这个几何体是一个简单组合体, 它的下部是一个圆柱, 上部是一个圆锥, 并且圆锥的底面与圆柱的上底面重合, 我们可以先画出下部的圆柱, 再画出上部的圆锥.

画法 (1) 画轴, 如图 1-3-9 (1), 画 x 轴、 y 轴、 z 轴, 使 $\angle xOy = 45^\circ$, $\angle xOz = 90^\circ$.

(2) 画圆柱的两底面, 在 z 轴上取点 O' , 使 OO' 等于三视图中相应高度, 过 O' 作 Ox 的平行线 $O'x'$, Oy 的平行线 $O'y'$, 利用 $O'x'$ 与 $O'y'$ 画出底面 $\odot O'$ (与画 $\odot O$ 一样).

(3) 画圆锥的顶点, 在 Oz 上取点 P , PO' 等于三视图中相应的高度.

(4) 成图. 连结 $PA, PB, A'A, B'B$, 整理得到三视图表示的几何体的直观图, 如图 1-3-9 (2).

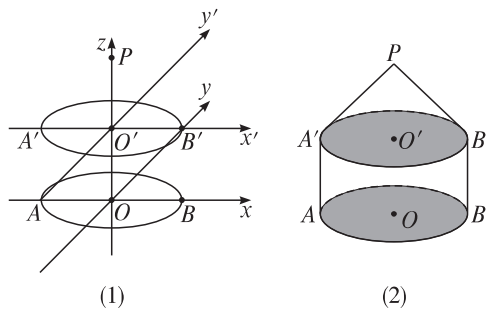


图 1-3-9

绿色通道 空间几何体的三视图与直观图有着密切的联系,我们能够由空间几何体的三视图得到它的直观图.同时,也能够由空间几何体的直观图得到它的三视图.

变式训练 1 如图 1-3-10 所示,已知几何体的下部是一个底面为正六边形、侧面全为矩形的棱柱,上部是一个侧面全为等腰三角形的棱锥,画出它的三视图(尺寸不作严格要求).

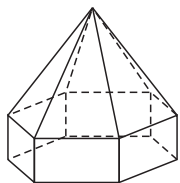


图 1-3-10

答案 三视图如图 1-3-11 所示:

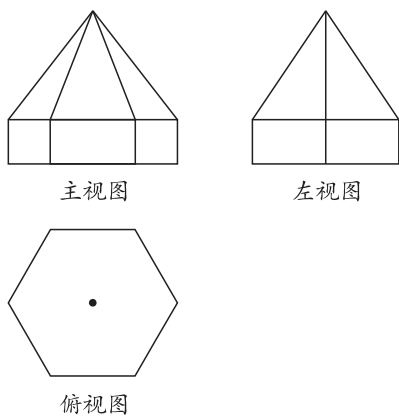


图 1-3-11

变式训练 2 已知几何体的三视图如图 1-3-12 所示,用斜二测画法画出它的直观图.

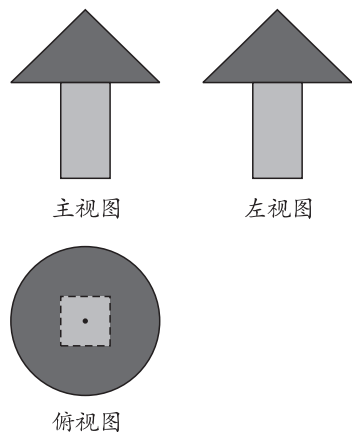


图 1-3-12

解析 由几何体三视图知,该几何体下面为一正四棱柱,上面为一圆锥,以斜二测画法先画出正四棱柱底面,再找出上底面中心,即圆锥底面圆心,再画出正

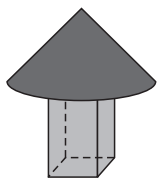


图 1-3-13

四棱柱上底面及圆锥下底面,确定圆锥顶点,连线即可成圆,直观图如图 1-3-13 所示.

问题探究

问题 图 1-3-14 表示水平放置的直观图,画出它们原来的图形.

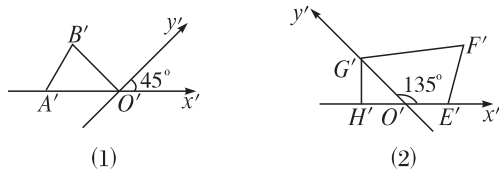


图 1-3-14

导思 斜二测画法的关键一是“斜”,即将互相垂直的 Ox, Oy 轴画成 $O'x', O'y'$ 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$;二是“二测”,即“横不变,纵减半”.还原直观图只要将这两个步骤逆过来就可以了,即一是要将 $O'x', O'y'$ 轴画成互相垂直的 Ox, Oy 轴,二是“横不变,纵加倍”.

由斜二测画法的规则可知,由直观图还原其所对应的空间图形的关键是确定多边形顶点的位置.对于不在坐标轴上的点,可过该点分别作 x' 轴与 y' 轴的平行线,借助坐标系确定点的坐标,从而找到与它对应的点的位置.

探究 作图 1-3-14 (1) 的原来图形:

- ①作直角坐标系 xOy .
- ②在 x 轴负半轴上,取 A ,使 $OA = O'A'$.
- ③在直观图中过 B' 作 $B'C' \parallel y'$ 轴,交 x' 轴于 C' 点.
- ④在 x 轴负半轴上取 C ,使 $OC = O'C'$.
- ⑤过 C 作 $BC \parallel y$ 轴,并使 $BC = 2B'C'$.

⑥连结 AB, OB ,则图 1-3-15 (1) 中 $\triangle OAB$ 即为图 1-3-14 (1) 中直观图的原来图形.

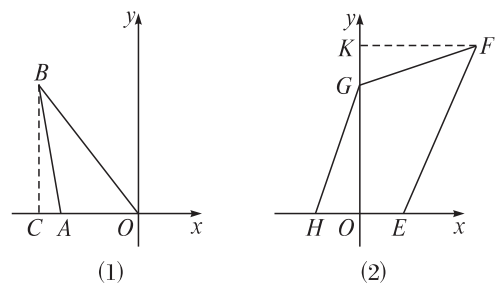


图 1-3-15

作图 1-3-14 (2) 的原来图形:

- ①作直角坐标系 xOy ;
- ②在 x 轴上取 H, E ,分别使 $OH = O'H', OE = O'E'$;
- ③在 y 轴上取 G ,使 $OG = 2O'G'$;
- ④作 $F'K' \parallel x'$ 轴,交 y' 轴于 K' ;
- ⑤在 y 轴上取 K ,使 $OK = 2O'K'$;
- ⑥作 $KF \parallel x$ 轴,并取 F ,使 $KF = K'F'$;