

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计·数学 B·必修:Ⅳ·新课标人教版/任志鸿主编. —2 版.  
—海口:南方出版社,2005.2(2006.11 重印)  
(志鸿优化系列丛书)  
ISBN 7-80701-269-2

I. 高... II. 任... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 014729 号

责任编辑:余云华  
装帧设计:邢 丽

志鸿优化系列丛书

高中同步测控优化设计·数学 B·必修:Ⅳ  
任志鸿 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编:570203 电话:0898—65371546

山东鸿杰印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2006 年 11 月第 4 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

开本:890×1240 1/16

印张:6.5 字数:174 千字

定价:10.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)



# 目录

content

|                    |    |
|--------------------|----|
| 第一章 基本初等函数(Ⅱ)      | 1  |
| 1.1 任意角的概念与弧度制     | 2  |
| 1.2 任意角的三角函数       | 8  |
| 1.3 三角函数的图象与性质     | 16 |
| 本章测评               | 27 |
| 第二章 平面向量           | 31 |
| 2.1 向量的线性运算        | 32 |
| 2.2 向量的分解与向量的坐标运算  | 37 |
| 2.3 平面向量的数量积       | 42 |
| 2.4 向量的应用          | 49 |
| 本章测评               | 54 |
| 第三章 三角恒等变换         | 58 |
| 3.1 和角公式           | 59 |
| 3.2 倍角公式和半角公式      | 66 |
| 3.3 三角函数的积化和差与和差化积 | 73 |
| 本章测评               | 77 |
| 模块综合测评             | 81 |

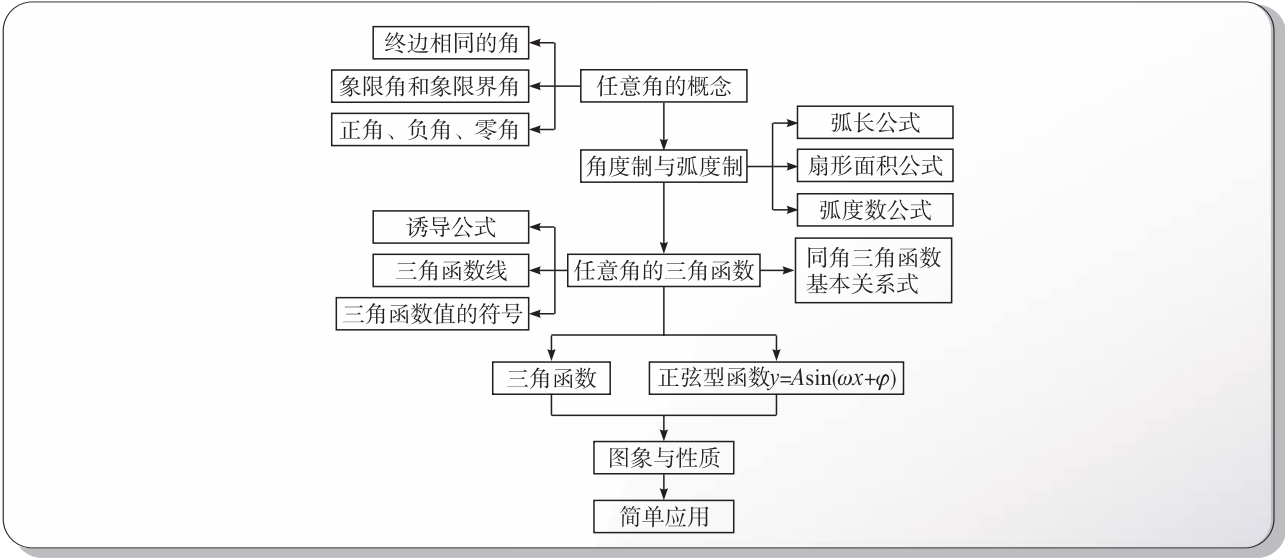
# 第一章 基本初等函数(II)



## 三维目标

- 1. 理解任意角的概念,掌握弧度制,能进行弧度和角度的互化;探索终边相同的角的表示方法,以便提高用数学的观点分析、解决问题的能力.
- 2. 探索任意角的正弦、余弦、正切的定义,知道任意角的余切、正割、余割的定义,能够借助单位圆中的有向线段表示正弦、余弦和正切,培养用几何方法解决代数问题即数形结合的思想.
- 3. 探索同角三角函数的基本关系式和诱导公式,并掌握其应用,以便揭示知识之间普遍联系的规律,树立辩证唯物主义思想.
- 4. 探究正弦、余弦和正切函数的图象和性质,理解周期函数与最小正周期的意义,知道三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型,提高数学的应用能力.
- 5. 结合具体实例认识正弦型函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的实际意义;知道  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  中参数  $A$ 、 $\omega$ 、 $\varphi$  对函数图象变化的影响和它们的物理意义;模仿使用“五点法”“变换法”画三角函数的简图,从而培养从特殊到一般、从具体到抽象的思维能力,实现从感性认识到理性认识的飞跃.
- 6. 会由已知三角函数值求角,并会用  $\arcsin x$ 、 $\arccos x$ 、 $\arctan x$  表示角;探讨用三角函数解决简单的实际问题,发展数学应用意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模型进行思考和判断,以便进一步提高应用数学知识分析和解决实际问题的能力 and 增加学习数学的兴趣.

## 知识网络



## 1.1 任意角的概念与弧度制

### 知识梳理

#### 1. 任意角

##### (1) 角的定义

①静态定义:具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角,这个公共端点叫做角的顶点,这两条射线叫做角的边.

②动态定义:一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形叫做角,所旋转射线的端点叫做角的顶点,开始位置的射线叫做角的始边,终止位置的射线叫做角的终边.

(2)在平面内,一条射线绕它的端点旋转有顺时针和逆时针两个相反的方向.习惯上规定:按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角;按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角;当射线没有旋转时,也把它看成一个角,称为零角;旋转生成的角又常称为转角.这样就形成了任意大小的角即任意角.

(3)角的记法:用一个希腊字母表示;用三个大写的英文字母表示(字母前面要写“ $\angle$ ”).

(4)角的分类:按旋转方向分为正角、零角、负角;按终边所在位置分为象限角和象限界角.

#### 2. 终边相同的角

(1)规定:将角的始边与  $x$  轴的正半轴重合,角的顶点与原点重合,这样就把角放在直角坐标系中.这样给定一个角,就有唯一的一条终边与之对应,但是,对于直角坐标系内任意一条射线,以它为终边的角有无数个.

(2)所有与角  $\alpha$  终边相同的角,连同角  $\alpha$  在内,可构成一个集合  $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ . 即任一与角  $\alpha$  终边相同的角,都可以表示成角  $\alpha$  与整数个周角的和的形式.

#### 3. 象限角和象限界角

(1)象限角:在平面直角坐标系  $xOy$  中,总是将角的顶点与坐标原点重合,角的始边与  $x$  轴正半轴重合,如果角的终边在第几象限,就把这个角叫做第几象限的角.

(2)象限界角:如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限,我们把它称为象限界角.

##### (3) 表示

第一象限角的集合:  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

第二象限角的集合:  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

第三象限角的集合:  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

第四象限角的集合:  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $x$  轴的正半轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $x$  轴的负半轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $x$  轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $y$  轴的正半轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $y$  轴的负半轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $y$  轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在坐标轴上的角的集合:  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
象限角与象限界角的表示形式并不唯一,还有其他的表示形式.例如:终边落在  $y$  轴的负半轴上的角的集合也可以表示为  $\{x | x = k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

#### 4. 弧度制

(1)定义:以弧度为单位度量角大小的制度叫弧度制.

(2)度量方法:长度等于半径长的圆弧所对的圆心角的大小叫做 1 弧度的角.

(3)记法:弧度单位用符号“ $\text{rad}$ ”表示或用弧度两个字表示.在用弧度制表示角的大小时,通常单位省略不写.

#### 5. 弧度制与角度制的换算

(1)换算公式:  $\alpha(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ, n^\circ = \frac{n\pi}{180}(\text{rad})$ .

(2)特殊角的弧度数

| 角度 | $0^\circ$   | $15^\circ$       | $30^\circ$       | $45^\circ$       | $60^\circ$       | $75^\circ$        | $90^\circ$       | $120^\circ$       | $135^\circ$      | $150^\circ$      |
|----|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 弧度 | 0           | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$  | $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{\pi}{3}$  | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$  | $\frac{2\pi}{3}$  | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| 角度 | $180^\circ$ | $210^\circ$      | $225^\circ$      | $240^\circ$      | $270^\circ$      | $300^\circ$       | $315^\circ$      | $330^\circ$       | $360^\circ$      |                  |
| 弧度 | $\pi$       | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$  | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$           |                  |

## 6. 弧度制下的公式

如图 1-1-1 所示,  $l$ 、 $r$ 、 $\alpha$  分别是弧长、半径、弧所对圆心角的弧度数.

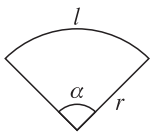


图 1-1-1

(1) 弧度数公式:  $|\alpha| = \frac{l}{r}$ ;

(2) 弧长公式:  $l = |\alpha|r$ ;

(3) 扇形面积公式:  $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$ .

## 知识导学

1. 课前复习初中学习过的角的定义、特点、范围.

2. 学习过程中一定要努力突破单一按角度制思考问题的习惯,力求通过弧度制来认识任意角.要实现这一目标,可以多做角度与弧度的互化练习,熟记常用特殊角的弧度数.

## 疑

## 难突破



1. 当角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边相同时,  $\alpha$  与  $\beta$  相等吗? 为什么与角  $\alpha$  终边相同的角的集合可以写成  $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ?

剖析: 角的定义有两种: 静态定义和动态定义. 难点是受思维定势的影响, 往往会先想到用角的静态定义来考虑这个问题, 那样就会陷入迷茫. 突破这个难点的途径是用角的动态定义来分析.

若  $\alpha$ 、 $\beta$  的终边相同, 则它们的关系为将角  $\alpha$  终边旋转(逆时针或顺时针)  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 周即得  $\beta$ , 所以  $\alpha$ 、 $\beta$  的数量关系为:  $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 即  $\alpha$ 、 $\beta$  的大小相差  $360^\circ$  的整数  $k$  倍, 所以  $\alpha$  与  $\beta$  不一定相等.

例如:  $\beta$  与  $30^\circ$  角的终边相同, 但是  $\beta$  不一定等于  $30^\circ$ .

将  $30^\circ$  角的终边按逆时针旋转 1 周即得角  $\beta = 1 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$ ; 按逆时针旋转 2 周即得角  $\beta = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 750^\circ$ ; 按逆时针旋转 3 周即得角  $\beta = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 1110^\circ$ ; 按逆时针旋转 4 周即得角  $\beta = 4 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 1470^\circ$ ; ...; 所以  $390^\circ, 750^\circ, 1110^\circ, 1470^\circ, \dots$  都与  $30^\circ$  角的终边相同.

将  $30^\circ$  角的终边按顺时针旋转 1 周即得角  $\beta = (-1) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -330^\circ$ ; 按顺时针旋转 2 周即得角  $\beta = (-2) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -690^\circ$ ; 按顺时针旋转 3 周即得角  $\beta = (-3) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -1050^\circ$ ; 按顺时针旋转 4 周即得角  $\beta = (-4) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -1410^\circ$ ; ...; 所以  $-330^\circ, -690^\circ, -1050^\circ, -1410^\circ, \dots$  都与  $30^\circ$  角的终边相同.

由以上可看出  $\beta$  与  $30^\circ$  角的终边相同, 但是  $\beta$  不一定等于  $30^\circ$ , 它们的数量关系是  $\beta = k \cdot 360^\circ + 30^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

因此所有与角  $\alpha$  终边相同的角, 连同角  $\alpha$  在内, 可构成一个集合  $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ , 即任一与角  $\alpha$  终边相同的角, 都可以表示成角  $\alpha$  与整数个周角的和.

理解集合  $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$  要注意以下

几点:

(1) 上式中角  $\alpha$  为任意角, 它说明终边相同的角有无数个, 它们相差  $360^\circ$  的整数倍;

(2)  $k \in \mathbb{Z}$  这一条件必不可少;

(3)  $k \cdot 360^\circ$  与  $\alpha$  之间是“+”. 如  $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$  应看成  $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$ , 即与  $-30^\circ$  角终边相同的角;

(4) 终边相同的角不一定相等, 但是相等的角, 终边一定相同;

(5) 终边相同的角有无数多个, 它们相差  $360^\circ$  的整数倍. 在求终边相同的角的问题中关键是找到一个与其终边相同的某一角(一般找  $0^\circ \sim 360^\circ$  的角), 然后用集合和符号语言表示出来.

2. 第一象限角、小于  $90^\circ$  的角、 $0^\circ \sim 90^\circ$  的角、锐角这四种角有什么差别?

剖析: 受初中所学角的影响, 看到这四种角, 往往就说它们相同. 其原因是虽然已经将角扩充到了任意角, 但是解决问题时, 考虑的角还是仅仅停留在锐角、直角、钝角即初中所学角的范围内, 没有按任意角来看待. 其突破方法是把握住其各自的取值范围.

这四种角的范围用集合表示, 分别是: 锐角  $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$ ,  $0^\circ \sim 90^\circ$  的角  $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$ , 小于  $90^\circ$  的角  $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$ , 第一象限角是  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ . 所以锐角一定是第一象限角, 而第一象限角不都是锐角, 小于  $90^\circ$  的角包括锐角、零角、负角. 如果用弧度制表示角, 角的表示形式变为实数, 其大小关系会更加明显.

3. 为什么  $\beta = k \cdot 360^\circ + \frac{3\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 这种写法是错误的?

剖析: 很多同学这样写, 但是并不认为是错误的, 并且屡错屡犯, 很难改正. 突破口是正确认识角度制和弧度制.

弧度制和角度制一样, 都是度量角大小的方法, 只是单位不同. 在同一道题目中, 用了弧度制后, 就不能再用角度制; 同样, 用了角度制后, 也不能再用弧度制, 即角度制和弧度制不能混用. 就像长度单位米和千米一样, 不能写出 1 米 + 1 千米这样的式子, 这样会容易引起混乱. 就如同人的穿着打扮全身要上下协调一样, 写成  $\beta = k \cdot 360^\circ + \frac{3\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 就像一个人上身穿着羽绒服, 脚上穿着凉鞋一样, 这种打扮显然是不合适的. 所以角度制与弧度制必须分开使用, 不能在同一问题中混合使用.

弧度制与角度制相比有一定的优点. 其一是在进位上, 角度制在度、分、秒上都是 60 进制制, 不便于计算, 而弧度制是十进制制, 给运算带来方便; 其二是在弧长公式与扇形面积公式的表达上, 弧度制下的公式远比角度制下的公式简单, 运算起来方便. 因此在今后表示角的时候, 常常用弧度制表示.

## 典题精讲

**例 1** 在角的集合  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$  中,

(1) 有几种终边不相同的角?

(2) 有几个属于区间  $(-360^\circ, 360^\circ)$  内的角?

**思路分析:** 本题主要考查对  $\alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, (k \in \mathbb{Z})$  所表示的角的认识. 从代数角度看, 取  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , 可得  $\alpha$  为  $\dots, -135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \dots$ ; 从图形角度看是以  $45^\circ$  角为基础, 依次加上  $90^\circ$  的整数倍, 即依次按顺时针方向或逆时针方向旋转  $90^\circ$ , 所得各角如图 1-1-2 所示.

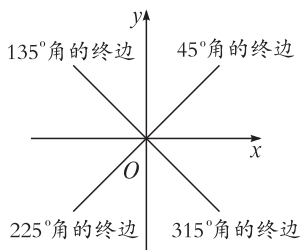


图 1-1-2

**解:** (1) 在给定的角的集合中终边不相同的角共有四种. 分别是与  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  角终边相同的角.

(2) 令  $-360^\circ < k \cdot 90^\circ + 45^\circ < 360^\circ$ , 得  $-\frac{9}{2} < k < \frac{7}{2}$ .

又  $\because k \in \mathbb{Z}, \therefore k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .

$\therefore$  属于区间  $(-360^\circ, 360^\circ)$  的角共有 8 个.

**绿色通道:** 把代数计算与对图形的认识结合起来即数形结合, 这样做会使这类问题处理起来更容易些. 数形结合是解决数学问题的最重要的方法之一, 做题时要注意自觉地应用.

**变式训练 1** (经典回放) 集合  $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}, N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则有…………… ( )

A.  $M = N$

B.  $N \subsetneq M$

C.  $M \subsetneq N$

D.  $M \cap N = \emptyset$

**思路解析:** 集合  $M$  是与  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  终边相同的角,

连同这四个角组成的集合;  $N$  是与  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4},$

$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$  终边相同的角, 连同这八个角组成的集合. 因此选

项 A、B、D 均不正确, 只有选项 C 正确.

**答案:** C

**变式训练 2** 写出终边在直线  $y = x$  上的角的集合  $S$ , 并把  $S$  中适合不等式  $-2\pi \leq \beta < 4\pi$  的元素  $\beta$  写出来.

**思路分析:** 先在  $[0, 2\pi)$  范围内找出终边在直线  $y = x$  上的角, 即可写出  $S$ ; 利用不等式求出  $k$  的值, 即可写出  $\beta$ .

**解:** 如图 1-1-3 所示, 在直角坐标系中画出直线  $y = x$ , 可以发现它与  $x$  轴的夹角是  $\frac{\pi}{4}$ , 在  $[0, 2\pi)$  范围内, 终

边在直线  $y = x$  上的角有两个:  $\frac{\pi}{4}$  和  $\frac{5\pi}{4}$ .

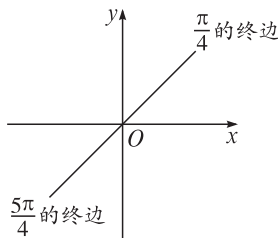


图 1-1-3

所以终边在直线  $y = x$  上的角的集合为

$$S = \{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$= \{\beta | \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

令  $-2\pi \leq k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi$ , 得  $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .

$\therefore S$  中适合不等式  $-2\pi \leq \beta < 4\pi$  的元素  $\beta$  是:

$$-2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}, -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}, 0 \times \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}.$$

**例 2** 如图 1-1-4 所示, 一绳索绕在半径为 40 厘米的滑轮上, 绳索的下端 B 处悬挂着物体 W. 如果轮子按逆时针方向每分钟匀速旋转 6 圈, 那么需要经过几秒钟才能把物体 W 的位置向上提升 100 厘米?

**思路分析:** 考查弧长公式以及应用数学知识解决实际问题的能力. 轮子按逆时针方向旋转, A 点转过的弧  $\widehat{AA'}$  的长等于 B 点上升到 B' 时的距离. 这是本题中潜藏的等量关系.

**解:** 当  $BB' = 100$  厘米时,  $\widehat{AA'}$  的长为 100 厘米,  $\widehat{AA'}$  所对的圆心角  $\angle AOA' = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$ . 因为轮子每分钟匀速

旋转 6 圈, 所以每秒匀速转过的弧度数是  $\frac{6 \times 2\pi}{60} = \frac{\pi}{5}$ , 则

$t$  秒转过的弧度数为  $\frac{\pi}{5}t$ . 故  $\frac{\pi}{5}t = \frac{5}{2}$ , 解得  $t = \frac{25}{2\pi} \approx 4$  (秒).

所以经过 4 秒钟才能把物体 W 的位置向上提升 100 厘米.

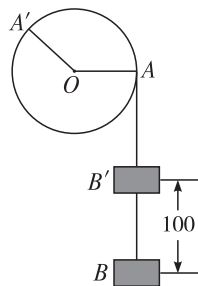


图 1-1-4



**绿色通道:**在实际生活中,滑轮是一种重要的省力工具.单个滑轮转动时,滑轮上的点转过的弧长与跟它连接的绳索上的点移动的距离是相等的.在分析中要注意图形的作用,数形结合是解决此类问题的有效办法.

**变式训练** 如图 1-1-5 所示,已知单位圆上一点  $A(1,0)$  按逆时针方向作匀速圆周运动,1 秒钟时间转过弧度数是  $\theta(0 < \theta \leq \pi)$ ,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟又转到最初位置,则  $\theta$  的弧度数是\_\_\_\_\_.

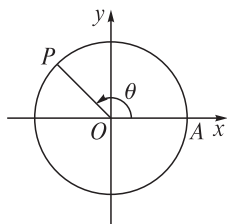


图 1-1-5

**思路解析:**因为  $0 < \theta \leq \pi$ , 可得

$0 < 2\theta \leq 2\pi$ . 又因为  $2\theta$  在第三象限, 所以  $\pi < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$ , 即

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ . 由  $14\theta = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 可得  $\theta = \frac{k\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$ , 所以

$\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{7} < \frac{3\pi}{4}$ , 即  $\frac{7}{2} < k < \frac{21}{4}$ . 所以  $k=4$  或  $5$ , 则  $\theta = \frac{4\pi}{7}$  或  $\frac{5\pi}{7}$ .

**答案:**  $\frac{4\pi}{7}$  或  $\frac{5\pi}{7}$

**例 3** 已知扇形的周长为 20 cm, 当扇形的圆心角为多大时, 扇形的面积取最大值?

**思路分析:** 本题考查扇形面积公式、最值等知识, 以及分析问题和解决问题的能力. 建立周长与圆心角、半径、弧长、面积之间的关系, 转化为求二次函数的最值.

**解:** 设扇形的半径是  $r$ , 弧长是  $l$ , 此时扇形的面积为  $S$ .

由题意, 得  $l + 2r = 20$ , 则  $l = 20 - 2r$ . 由  $0 < l < 2\pi r$ , 得

$$\therefore \frac{10}{\pi+1} < r < 10. \therefore S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(20-2r)r = -r^2 + 10r = -(r-5)^2 + 25 \left( \frac{10}{\pi+1} < r < 10 \right).$$

$\therefore$  当  $r=5$  时,  $S$  取最大值 25, 此时  $l=10, \alpha = \frac{l}{r} = 2$ .

即当扇形的圆心角为 2 时, 扇形的面积取最大值 25.

**绿色通道:**当扇形周长为定值时, 扇形的面积有最大值. 其求法是把面积表示为半径的二次函数, 转化为求二次函数的最值. 但要注意扇形的弧长和半径的取值范围.

**变式训练** 已知扇形面积为  $25 \text{ cm}^2$ , 当扇形的圆心角为多大时, 扇形的周长取最小值?

**思路分析:** 把周长表示为半径的函数, 利用函数的单调性求最值.

**解:** 设扇形的半径是  $r$ , 弧长是  $l$ , 此时扇形的周长为

$y$ , 则  $y = l + 2r$ .

由题意, 得  $\frac{1}{2}lr = 25$ , 则  $l = \frac{50}{r}$ .  $\therefore y = \frac{50}{r} + 2r (r > 0)$ .

利用函数单调性的定义可以证明: 当  $0 < r \leq 5$  时, 函数  $y = \frac{50}{r} + 2r$  是减函数; 当  $r > 5$  时, 函数  $y = \frac{50}{r} + 2r$  是增函数.  $\therefore$  当  $r=5$  时,  $y$  取最小值 20, 此时  $l=10, \alpha = \frac{l}{r} = 2$ .

故当扇形的圆心角为 2 时, 扇形的周长取最小值 20.

### 问题探究

**问题 1** 根据  $\alpha$  的象限, 如何确定  $\frac{\alpha}{n}$  所在的象限 ( $n > 1, n \in \mathbb{N}^*$ )?

**导思:** 这类问题有两种方法: 不等式法和八卦图法.

**探究:** 方法一: (不等式法) 下面以  $\alpha$  为第一象限的角,

确定  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限为例.

$\because \alpha$  是第一象限角,  $\therefore \alpha$  可以表示为  $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\therefore k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ.$$

当  $k$  为偶数时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限角; 当  $k$  为奇数时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第三象限角.

即当  $\alpha$  是第一象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限角或第三象限角.

同理, 可得当  $\alpha$  为其他象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  的终边所在象限:

当  $\alpha$  是第二象限角,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限角或第三象限角;

当  $\alpha$  是第三象限角,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二象限角或第四象限角;

当  $\alpha$  是第四象限角,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二象限角或第四象限角.

**方法二:** (八卦图法) 以确定  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限为例.

如图 1-1-6 所示, 作出各个象限的平分线, 它们与坐标轴把周角等分成 8 个区域. 从  $x$  轴的正半轴起, 按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4, 则标号是几的两个区域就是  $\alpha$  为第几象限角时  $\frac{\alpha}{2}$  终边落在的区域. 于是  $\frac{\alpha}{2}$  所在象限可以直观地看出来, 这种方法称为八卦图法, 它的优点是直观形象, 特别是它还能清晰地显现  $\frac{\alpha}{2}$  的更具体范围.

由图 1-1-6 可得:

当  $\alpha$  是第一象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限角或第三象限角;

当  $\alpha$  是第二象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一象限角或第三象限角;

当  $\alpha$  是第三象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二象限角或第四象限角;

当  $\alpha$  是第四象限角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二象限角或第四象限角.

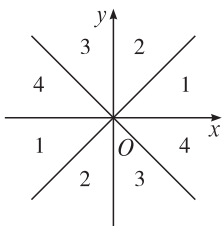


图 1-1-6

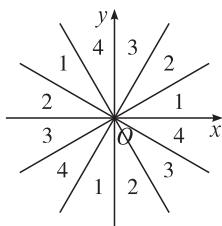


图 1-1-7

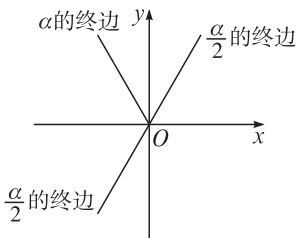


图 1-1-8

以上两种方法还适用于确定  $\frac{\alpha}{3}$ 、 $\frac{\alpha}{4}$ 、 $\dots$ 、 $\frac{\alpha}{n}$  的终边所

在象限,图 1-1-7 是用八卦图法确定  $\frac{\alpha}{3}$  的终边所在象限.作出三等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成 12 个区域.从  $x$  轴的正半轴起,按逆时针方向把这 12 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标号是几的区域就是  $\alpha$  为第几象限角时  $\frac{\alpha}{3}$  终边落在的区域,于是  $\frac{\alpha}{3}$  所在的象限就可根据图形直观地看出来.一

般地,要确定  $\frac{\alpha}{n}$  所在的象限,就需要  $n$  等分每个象限.

对于  $\frac{\alpha}{2}$ ,还有如下的简便作法:首先在直角坐标系中画出  $\alpha$  的终边,然后将其与  $x$  轴正半轴所成的两个角分别平分,平分线所在象限即  $\frac{\alpha}{2}$  的终边所在象限.如图 1-1-8 所示,  $\alpha$  是第二象限角,则  $\frac{\alpha}{2}$  的终边在第一、三象限.这种方法称为直接平分法.

问题 2 若  $\alpha$ 、 $\beta$  的终边关于坐标轴、原点对称,则  $\alpha$ 、 $\beta$  的大小有何关系?

导思:这类题目的解决策略是由特殊到一般,先将  $\alpha$ 、 $\beta$  的范围限制在  $[0, 360^\circ)$  内,再推广到任意角.

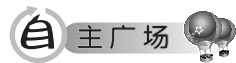
探究:在平面直角坐标系中,画出终边关于  $y$  轴对称的  $\alpha$ 、 $\beta$ ,以终边所代表的最小正角为例,可得  $\alpha + \beta = 180^\circ$  或  $\alpha + \beta = 360^\circ + 180^\circ$ ,推广到任意角有  $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$ ,即终边关于  $y$  轴对称的  $\alpha$ 、 $\beta$  的大小关系为  $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

同理,可得:

当  $\alpha$ 、 $\beta$  的终边关于  $x$  轴对称时,则  $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ;

当  $\alpha$ 、 $\beta$  的终边关于坐标原点对称时,则  $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ;

当  $\alpha$ 、 $\beta$  的终边互相垂直时,则  $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .



### 我夯基 我达标

1 与  $-457^\circ$  终边相同的角的集合是 ..... ( )

- A.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- B.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- C.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- D.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

思路解析:当  $\beta$  与  $\alpha = k \cdot 360^\circ + \gamma, k \in \mathbb{Z}$  的终边相同时,  $\beta$  与  $\gamma$  的终边也相同,则  $\beta - \gamma$  为  $360^\circ$  的整数倍.  $-457^\circ - 457^\circ = -914^\circ$  不是  $360^\circ$  的整数倍,故 A 错;  $-457^\circ - 97^\circ = -554^\circ$  不是  $360^\circ$  的整数倍,故 B 错;  $-457^\circ - 263^\circ = -720^\circ = (-2) \cdot 360^\circ$  是  $360^\circ$  的整数倍,故 C 对;  $-457^\circ - (-263^\circ) = -194^\circ$  不是  $360^\circ$  的整数倍,故 D 错.

答案:C

2 下列说法中,正确的是 ..... ( )

- A. 第二象限的角是钝角
  - B. 第二象限的角必大于第一象限的角
  - C.  $-150^\circ$  的角是第二象限角
  - D.  $-252^\circ 16'$ 、 $467^\circ 44'$ 、 $1\ 187^\circ 44'$  的角是终边相同的角
- 思路解析:第二象限的角中,除包含钝角以外,还包含与钝角相差  $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  的角,如  $460^\circ$  角是第二象限的角但不是钝角, A 错;  $460^\circ$  角是第二象限的角,  $730^\circ$  角是第一象限角,显然  $460^\circ$  小于  $730^\circ$ , B 错; C 中  $-150^\circ$  角应为第三象限角. 故 A、B、C 都是错误的, D 中三个角相差  $360^\circ$  的整数倍,则它们的终边相同.

答案:D

3 2005 全国高考卷 III, 1 已知  $\alpha$  为第三象限角,则  $\frac{\alpha}{2}$  所

- 在的象限是 ..... ( )
- A. 第一或第二象限
- B. 第二或第三象限



C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限

思路解析:不等式法和八卦法均可判断.

答案:D

- 4 角  $\alpha$  终边上的一点的坐标是  $P(0, -3)$ , 则角  $\alpha$  的集合是\_\_\_\_\_.

思路解析:角  $\alpha$  的终边是  $y$  轴的负半轴.答案: $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 

- 5 若  $\alpha, \beta$  满足  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha - 2\beta$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

思路解析:由题意,得  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\pi < -2\beta < \pi$ ,

$$\therefore -\frac{3\pi}{2} < \alpha - 2\beta < \frac{3\pi}{2}.$$

答案: $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 

- 6 已知角  $\alpha$  的终边在如图 1-1-9 阴影所示的范围内(包括边界),求角  $\alpha$  的范围.

思路分析:首先写出终边在  $x$  轴上方最小正角的范围,再加上  $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  即可.终边在 $x$  轴下方的角的范围也可以同样得出.

解:终边在  $x$  轴上方最小正角  $\alpha$  的范围是  $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ , 则终边在  $x$  轴上方角  $\alpha$  的范围是  $k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

终边在  $x$  轴下方最小正角  $\alpha$  的范围是  $210^\circ \leq \alpha \leq 330^\circ$ , 则终边在  $x$  轴下方角  $\alpha$  的范围  $k \cdot 360^\circ + 210^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 330^\circ$ .

$\therefore$  角  $\alpha$  的范围是  $[k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \cdot 360^\circ + 150^\circ] \cup [k \cdot 360^\circ + 210^\circ, k \cdot 360^\circ + 330^\circ]$ , 即  $[k \cdot 180^\circ + 30^\circ, k \cdot 180^\circ + 150^\circ] (k \in \mathbb{Z})$ .

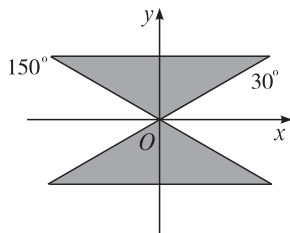


图 1-1-9

## 我综合我发展

- 7 已知集合  $A = \{\alpha | 2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

思路解析:求两个集合的交集,就是找两个集合的公共部分,有效的方法就是数形结合.将两个集合表示在数轴上,观察公共部分.如图 1-1-10 所示,显然公共部分有两块,  $-4$  到  $-\pi$  和  $0$  到  $\pi$ , 由此可得答案.

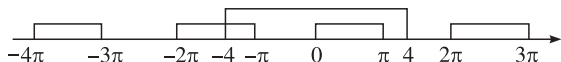


图 1-1-10

答案: $\{\alpha | -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ 

- 8 将钟表上的时针作为角的始边,分针作为终边,那么当钟表上显示 8 点 5 分时,时针与分针构成的角度是\_\_\_\_\_.

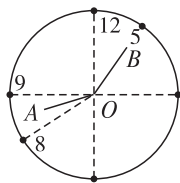
思路解析:本题应从任意角的概念出发,研究时针与分针所构成的角  $\alpha$ ,其中有正角、负角,共有无穷多个角.要求这无穷多个角,可先求出在  $-360^\circ \sim 0^\circ$  范围内的  $\angle AOB$ ,如图 1-1-11 所示.

图 1-1-11

所以角  $\alpha$  可表示为  $\alpha = k \cdot 360^\circ - 147.5^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\angle AOB = -(\frac{1}{12} \times 360^\circ \times \frac{11}{12} + 90^\circ + \frac{1}{12} \times 360^\circ) = -147.5^\circ.$$

答案: $k \cdot 360^\circ - 147.5^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 

- 9 如图 1-1-12, 扇形  $OAB$  的面积是  $4 \text{ cm}^2$ , 它的周长是  $8 \text{ cm}$ , 求扇形的中心角及弦  $AB$  的长.

思路分析:利用扇形面积和周长建立弧长与半径的方程组求解.应当注意的是题目中扇形的周长应该包含两条半径.

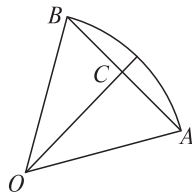


图 1-1-12

解:设扇形的弧长为  $l$ , 半径为  $r$ ,

$$\text{由题意,得} \begin{cases} l + 2r = 8, \\ \frac{1}{2}lr = 4. \end{cases} \text{解之,得} \begin{cases} l = 4, \\ r = 2. \end{cases}$$

$$\therefore \text{中心角为 } \alpha = \frac{l}{r} = \frac{4}{2} = 2.$$

过  $O$  作  $OC \perp AB$  于  $C$ , 则  $C$  是  $AB$  的中点.在  $\text{Rt}\triangle OAC$  中,  $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = 1$ .

$$\therefore AC = 2\sin 1.$$

$\therefore AB = 2AC = 4\sin 1$ , 即扇形的中心角为 2, 弦  $AB$  的长为  $4\sin 1$ .

- 10 一条铁路在转弯处成圆弧形, 圆弧的半径为  $2 \text{ km}$ , 一列火车用每小时  $30 \text{ km}$  的速度通过,  $10 \text{ s}$  间转过几度?

思路分析:利用速度和时间求出路程, 即得圆弧的弧长.再由弧长公式可得圆心角的度数.因为火车前进的方向未知, 所以将圆心角的大小加上绝对值.

解: $\because$  圆弧半径为  $2 \text{ km} = 2000 \text{ m}$ ,  $V_k = 30 \text{ km/h} = \frac{25}{3} \text{ m/s}$ ,  $10 \text{ s}$  走过的弧长为  $\frac{250}{3} \text{ m}$ ,

$$\therefore |\alpha| = \frac{l}{r} = \frac{250}{3 \times 2000} = \frac{1}{24} \text{ rad} \approx 2.39^\circ, \text{ 即 } 10 \text{ s 间转过约 } 2.39^\circ.$$

- 11 如图 1-1-13, 已知一长为  $\sqrt{3} \text{ dm}$ , 宽为  $1 \text{ dm}$  的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第四次时被一小木板挡住, 且木块底面与桌面成角为  $\frac{\pi}{6}$ , 求点  $A$

走过的路程及走过的弧所在扇形的总面积。

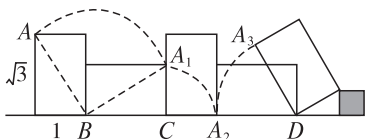


图 1-1-13

**思路分析:**点  $A$  首先以  $B$  为圆心,以  $2$  为半径旋转  $\frac{\pi}{2}$  达到  $A_1$  的位置;再以  $C$  为圆心,以  $1$  为半径旋转  $\frac{\pi}{2}$  到  $A_2$  的位置;然后以  $A_2$  为圆心,  $2$  为半径旋转  $\frac{\pi}{2}$ ,最后以  $D$  为圆心,以  $\sqrt{3}$  为半径转过  $\frac{\pi}{3}$  到达  $A_3$ .  $A$  点走过的路程将包括三段弧.

**解:**由题意,得  $\widehat{AA_1}$  所对的圆的半径为  $2$ ,圆心角为  $\frac{\pi}{2}$ ,则

$$\text{弧长 } l_1 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi, \text{扇形面积 } S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 2^2 = \pi.$$

$\widehat{A_1A_2}$  所对的圆半径是  $1$ ,圆心角是  $\frac{\pi}{2}$ ,则弧长

$$l_2 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{扇形面积 } S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

$\widehat{A_2A_3}$  所对的圆半径为  $\sqrt{3}$ ,圆心角为  $\frac{\pi}{3}$ ,则弧长

$$l_3 = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}, \text{扇形面积 } S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{2}.$$

故点  $A$  走过的路程即三段圆弧之和为  $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

$$= \frac{9 + 2\sqrt{3}}{6} \pi (\text{dm}); \text{点 } A \text{ 走过的弧所在扇形的总面积}$$

$$\text{积即三个扇形面积的和为 } \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} (\text{dm})^2.$$

## 1.2 任意角的三角函数

### 知识梳理

#### 1. 任意角的三角函数

(1)定义:如图 1-2-1 所示,  $\alpha$  是一个任意大小的角,以  $\alpha$  的顶点  $O$  为坐标原点,以  $\alpha$  的始边为  $x$  轴的正半轴建立平面直角坐标系.设  $P(x, y)$  是  $\alpha$  的终边上任意一点,它到原点的距离  $|OP| = r$ ,则有  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,规定:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}; \tan \alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}; \sec \alpha = \frac{r}{x}; \csc \alpha = \frac{r}{y}.$$

对于每一个确定的  $\alpha$ , 都分别有唯一确定的正弦值、余弦值、正切值、余切值、正割值、余割值与之对应,所以这六个对应法则都是以角  $\alpha$  为自变量的函数,分别叫做正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数,这六个函数统称为三角函数.

#### (2)定义域

正弦函数  $\sin \alpha$  的定义域是  $\mathbb{R}$ ; 余弦函数  $\cos \alpha$  的定义域是  $\mathbb{R}$ ;

正切函数  $\tan \alpha$  的定义域是  $\{\alpha | \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

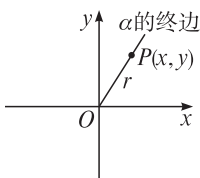


图 1-2-1

#### 2. 三角函数值的符号

(1)用图形表示:如图 1-2-2 所示,

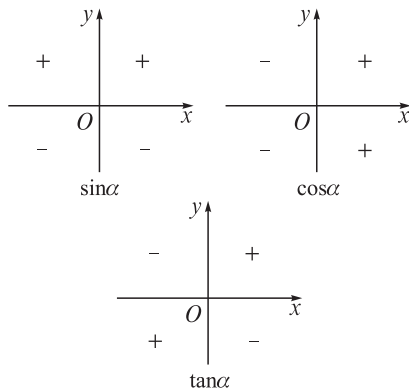


图 1-2-2

(2)用表格表示

| $\alpha$ 的终边  | $x$ 轴正半轴 | 第一象限 | $y$ 轴正半轴 | 第二象限 | $x$ 轴负半轴 | 第三象限 | $y$ 轴负半轴 | 第四象限 |
|---------------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|
| $\sin \alpha$ | 0        | +    | +        | +    | -        | -    | -        | -    |
| $\cos \alpha$ | +        | +    | 0        | -    | -        | -    | 0        | +    |
| $\tan \alpha$ | 0        | +    | 不存在      | -    | 0        | +    | 不存在      | -    |

(3)三角函数值在各象限的符号的记忆方法:

三角函数值在各象限的符号可用以下口诀记忆:“一全正,二正弦,三两切,四余弦”.

其含义是在第一象限各三角函数值全为正,在第二象限只有正弦值为正,在第三象限只有正、余切值为正,在第四象限只有余弦值为正(这里说的三角函数值不指正割和余割函数).

### 3. 单位圆与三角函数线

(1)单位圆:圆心在原点  $O$ , 半径等于  $1$  的圆称为单位圆.

#### (2)三角函数线

如图 1-2-3, 设单位圆与  $x$  轴正方向交于  $A$  点, 与角  $\alpha$  的终边交于  $P$  点(角  $\alpha$  的顶点与原点重合, 角  $\alpha$  的始边与  $x$  轴的正半轴重合).

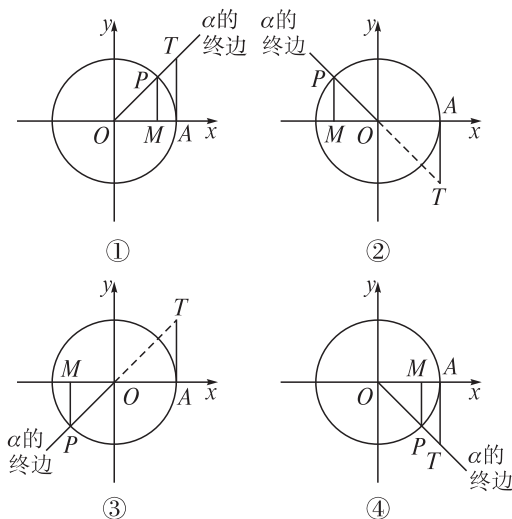


图 1-2-3

过点  $P$  作  $x$  轴的垂线  $PM$ , 垂足为  $M$ , 过  $A$  作单位圆的切线交  $OP$  的延长线(或反向延长线)于  $T$  点, 这样就有  $\sin\alpha = \overline{MP}$ ,  $\cos\alpha = \overline{OM}$ ,  $\tan\alpha = \overline{AT}$ . 单位圆中的有向线段  $MP$ 、 $OM$ 、 $AT$  分别叫做角  $\alpha$  的正弦线、余弦线、正切线. 当角  $\alpha$  的终边落在  $x$  轴上时,  $M$  与  $P$  重合,  $A$  与  $T$  重合, 此时正弦线、正切线分别变成一个点; 当角  $\alpha$  的终边在  $y$  轴上时,  $O$  与  $M$  重合, 余弦线变成一个点, 过  $A$  的切线平行于  $y$  轴, 不能与角  $\alpha$  的终边相交, 所以此时正切线不存在.

(3)三角函数线的方向表示三角函数值的符号:(如图 1-2-3)正弦线、正切线的方向同  $y$  轴一致, 向上为正, 向下为负; 余弦线的方向同  $x$  轴一致, 向右为正, 向左为负. 三角函数线的长度等于所表示的三角函数值的绝对值.

### 4. 同角三角函数的基本关系

(1)基本关系式:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ;  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

还可以了解下面关系式(不要求掌握):

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha; 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha; \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1; \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1; \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1.$$

(2)基本关系式成立的条件:

当  $\alpha \in \mathbb{R}$  时,  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  成立;

当  $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$  时,  $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$  成立.

(3)基本关系式的变形

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ 的变形: } 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha; \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha; \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha; \sin\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha}; \cos\alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ 的变形: } \sin\alpha = \cos\alpha \tan\alpha; \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.$$

### 5. 诱导公式

(1) $\alpha$  与  $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$  的三角函数间的关系:

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha, \sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha, \tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha.$$

(2) $\alpha$  与  $-\alpha$  的三角函数间的关系:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

(3) $\alpha$  与  $(2k+1)\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$  的三角函数间的关系:

$$\cos[(2k+1)\pi + \alpha] = -\cos\alpha, \sin[(2k+1)\pi + \alpha] = -\sin\alpha, \tan[(2k+1)\pi + \alpha] = \tan\alpha.$$

$$\text{特别地: } \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha.$$

(4) $\alpha$  与  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的三角函数间的关系:

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha, \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha, \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha.$$

(5) $\alpha$  与  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  的三角函数间的关系:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha.$$

### 知识导学

1. 学好本节要复习初中学过的锐角三角函数, 本节是锐角三角函数的补充和延伸.

2. 善于利用三角函数的定义及三角函数值的符号规律解决三角问题.

3. 在运用诱导公式时, 要仔细体会其中的转化与化归的数学思想, 并在解题过程中自觉应用.

#### 4. 诱导公式的记忆方法

(1)(2)(3)组可用口诀“函数名不变, 符号看象限”记忆, 其中“函数名改变”是指等式两边的三角函数同名, “符号”是指等号右边是正号还是负号, “看象限”是指把  $\alpha$  看成锐角时原三角函数值的符号.

(4)(5)组可用口诀“函数名改变, 符号看象限”记忆, “函数名改变”是指把函数名变为原函数的余名三角函数, 即正弦变余弦, 余弦变正弦, 正切变余切. “符号看象限”同上.



5. 诱导公式的选择方法:先用 $-\alpha$ 化为正角,再用 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 化为 $[0, 2\pi)$ 内的角,然后用 $\pi + \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha$ 化为锐角的三角函数,还可继续用 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 化为 $[0, \frac{\pi}{4})$ 内的角的三角函数.由此看,利用诱导公式能将任意角的三角函数化为锐角(或更小角)的三角函数,也就是说:诱导公式真是好,负化正后大化小.

图 1-2-4

**思路解析:** 因为  $\sin \alpha < 0$ , 所以角  $\alpha$  的终边在第三或第四象限或  $y$  轴的负半轴上.  $y = 3x$  经过第一象限和第三象限, 所以角  $\alpha$  的终边在第三象限. 可得  $m < 0, n < 0$ . 又因为  $P(m, n)$  在直线  $y = 3x$  上, 所以满足  $n = 3m$ ; 同时  $|OP| = \sqrt{10}$ , 可得  $m^2 + n^2 = 10$ . 解方程组  $\begin{cases} n = 3m, \\ m^2 + n^2 = 10, \end{cases}$  得

$$\begin{cases} m=-1, \\ n=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=1, \\ n=-3 \end{cases} \text{ (舍去). 所以 } m-n=-1-(-3)=2.$$

答案:A

变式训练 2 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(3, 4t)$ , 且

$$\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}, \text{ 则 } t = \underline{\hspace{2cm}}.$$

思路解析:应用三角函数的定义求解.由题意得  $t <$

$$0, \sin \alpha = \frac{4t}{\sqrt{9+16t^2}}, \text{ 所以有 } \frac{4t}{\sqrt{9+16t^2}} = -\frac{3}{5}, \text{ 解方程得}$$

$$t = -\frac{9}{16}.$$

$$\text{答案: } -\frac{9}{16}$$

变式训练 3 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(3t, 4t)$ ,  $t \neq 0$ , 求角  $\alpha$  的六个三角函数值.

思路分析:应用三角函数的定义.

$$\text{解:由 } x=3t, y=4t, \text{ 得 } r = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 5|t|.$$

当  $t > 0$  时,  $r = 5t$ .

$$\text{因此 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}, \sec \alpha = \frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{5}{4};$$

当  $t < 0$  时,  $r = -5t$ .

$$\text{因此 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = -\frac{3}{4}, \sec \alpha = -\frac{5}{3}, \csc \alpha = -\frac{5}{4}.$$

**例 2** 已知  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ , 且角  $\alpha$  是第四象限角, 求  $\sin \alpha$  和  $\tan \alpha$ .

思路分析:本题考查同角三角函数基本关系式和三角函数值的符号.  $\alpha$  是第四象限角, 于是可利用平方关系式求出  $\sin \alpha$ , 进而利用商数关系式求出  $\tan \alpha$ .

$$\text{解:} \because \cos \alpha = \frac{5}{13}, \text{ 且 } \alpha \text{ 是第四象限角,}$$

$$\therefore \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

**绿色通道:**已知某角的弦函数值求其他三角函数值时,先利用  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  求出另一弦函数值,再利用  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  求出切函数值.

变式训练 1 已知  $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$ , 那么  $\cos \alpha$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )

$$\text{A. } \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{B. } \frac{1}{2}$$

$$\text{C. } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{D. } \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

思路解析:由已知得  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , 所以  $\cos \alpha =$

$$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

答案:D

变式训练 2 已知  $\tan \alpha = 2$ , 求  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值.

思路分析:应用方程的思想,列方程组求得.

$$\text{解:由题意得 } \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \end{cases}$$

$$\text{解之,得 } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

变式训练 3 已知  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 而  $\sin \theta, \cos \theta$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - kx + k + 1 = 0$  的两实数根, 求  $k$  和  $\theta$  的值.

思路分析:利用一元二次方程根与系数的关系,得到  $\sin \theta, \cos \theta$  与  $k$  的关系式,再结合平方关系式,就可建立  $k$  的方程,求出  $k$  之后再计算  $\theta$  的值.

解:由题意得  $\Delta = k^2 - 4(k + 1) \geq 0$ , 解得  $k \leq 2 - 2\sqrt{2}$  或  $k \geq 2 + 2\sqrt{2}$ .

$\because \sin \theta, \cos \theta$  是方程  $x^2 - kx + k + 1 = 0$  的两实数根,

$$\therefore \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = k, \\ \sin \theta \cos \theta = k + 1. \end{cases}$$

$$\because (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta,$$

$$\therefore k^2 = 1 + 2(k + 1), \text{ 即 } k^2 - 2k - 3 = 0.$$

$$\therefore k = -1 \text{ 或 } k = 3 \text{ (舍去).}$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = -1, \\ \sin \theta \cos \theta = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} \sin \theta = 0, \\ \cos \theta = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta = -1, \\ \cos \theta = 0. \end{cases}$$

$$\because \theta \in [0, 2\pi), \therefore \theta = \pi \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

**例 3** 2006 河南新乡第四次调研卷,文 2 已知  $\tan \alpha =$   
2, 则  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$  ( )

$$\text{A. } \frac{3}{2}$$

$$\text{B. } \frac{5}{2}$$

$$\text{C. } 3$$

$$\text{D. } 5$$

思路解析:考查同角三角函数基本关系式的应用.





$$\because \tan \alpha = 2, \therefore \cos \alpha \neq 0.$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = 3.$$

答案:C

**绿色通道:** (1) 已知  $\tan \alpha = m$ , 求关于  $\sin \alpha, \cos \alpha$  的齐次式之值的问题, 需注意以下几点:

① 解决此类问题的策略是先化简再求值 (用  $\tan \alpha$  来表示);

② 一定是关于  $\sin \alpha, \cos \alpha$  的齐次式 (或能化为齐次式) 的三角函数式;

③ 因为  $\cos \alpha \neq 0$ , 可用  $\cos^n \alpha (n \in \mathbb{N}^+)$  去除原式分子、分母的各项, 这样可以将原式化为关于  $\tan \alpha$  的表达式, 再整体代入  $\tan \alpha = m$  的值, 从而完成求值任务;

$$(2) \text{ 形如 } \frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha}$$

或  $\frac{a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha}{d \sin^2 \alpha + e \sin \alpha \cos \alpha + f \cos^2 \alpha}$  的分式, 分子、分母同时除以  $\cos^2 \alpha$ , 将正、余弦转化为正切, 从而求值.

(3) 同角三角函数基本关系式的应用: 化简三角函数式.

**黑色陷阱:** 如果先求出  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值, 那么运算量会很大, 问题就会变得很烦琐.

**变式训练 1** 2006 河南新乡第四次调研卷, 理 2 已知  $\tan \alpha = \sqrt{3}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\cos \alpha - \sin \alpha$  的值为 ..... ( )

$$A. -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$B. \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$C. \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$D. \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

**思路解析:** 求出  $\alpha$  的值, 即可得解.  $\because \tan \alpha = \sqrt{3}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$ .

$$\therefore \cos \alpha - \sin \alpha = \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

答案:C

**变式训练 2** 已知  $\tan \alpha = 3$ , 求  $\sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha$  的值.

**思路分析:** 先化简再求值.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{\sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha + 4 \tan \alpha - 2}{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \frac{9 + 12 - 2}{9 + 1} = \frac{19}{10}. \end{aligned}$$

**例 4** 若  $\sin \theta \tan \theta < 0$ , 则  $\theta$  在 ..... ( )

A. 第一、二象限

B. 第一、三象限

C. 第一、四象限

D. 第二、三象限

**思路解析:** 考查三角函数值的符号. 思路 1:

$\because \sin \theta \tan \theta < 0, \therefore \sin \theta > 0, \tan \theta < 0$  或  $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ . 当  $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$  时,  $\theta$  在第二象限; 当  $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$  时,  $\theta$  在第三象限. 综上可知  $\theta$  在第二、三象限.

**思路 2:**  $\sin \theta \tan \theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0 \Leftrightarrow \cos \theta < 0, \theta$  在第二、三象限.

答案:D

**绿色通道:** 已知同角的某两个三角函数积或商的符号, 可通过分类讨论来确定此角所在的象限; 还可以把已知两个三角函数积或商的符号化归为此角的另一个三角函数值的符号后, 再判断此角所在的象限. 此种类型的题目要用三角函数值的符号来解决.

**变式训练 1** 2006 江苏徐州一模, 2 若  $\theta$  是第一或第四象限角, 则有 ..... ( )

$$A. \frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0$$

$$B. \frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$$

$$C. \frac{\cos \theta}{\tan \theta} > 0$$

$$D. \frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$$

**思路解析:** 考查三角函数值的符号. 思路 1: 当  $\theta$  在第一象限时,  $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ , 排除 A、D; 当  $\theta$  在第四象限时,  $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ , 排除 C; 思路 2:  $\because \theta$  是第一或第四象限角,  $\therefore \cos \theta > 0, \sin \theta$  的符号不确定.

又  $\because \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \cos \theta, \frac{\cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta^2}{\sin \theta}, \therefore$  仅有  $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$ .

答案:B

**变式训练 2** 已知点  $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$  在第三象限, 则  $|\tan \frac{\alpha}{2}|$  等于 ..... ( )

$$A. \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$B. -\tan \frac{\alpha}{2}$$

$$C. \pm \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$D. \frac{\tan \alpha}{2}$$

**思路解析:** 由于点  $P$  在第三象限, 则  $\tan \alpha < 0, \cos \alpha < 0$ , 所以  $\alpha$  的终边在第二象限, 则  $\frac{\alpha}{2}$  在第一、三象限,

$$|\tan \frac{\alpha}{2}| = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

答案:A

### 问题探究

**问题 1** 三角函数式的化简与证明是三角部分的重要问题, 那么三角函数式的化简与证明有哪些常用方法?

**导思:** 探究思路是明确什么是三角函数式的化简与证明.



**探究:**三角函数式的化简是将三角函数式尽量化为最简单的形式,其基本要求:尽量减少角的种数,尽量减少三角函数的种数,尽量化同角、化同名角等.三角函数式的化简实质上是一种不指定答案的恒等变形,体现了由繁到简的最基本的数学解题原则.它不仅要求熟悉和灵活运用所学的三角公式,还需要熟悉和灵活运用这些公式的等价形式.同时,这类问题还具有较强的综合性,对其他非三角知识的运用也具有较高的要求,因此在平常学习时要注意经验的积累.而三角函数的证明是证明等式两边相等,它是一种指定答案的恒等变形,与三角函数式的化简相比要简单一些.

化简三角函数式时,在题设的要求下,应合理利用有关公式,常见的化简方法:异次化同次、高次化低次、切化弦、化和差为乘积、化乘积为和差、特殊角三角函数与特殊值互化等.

证明三角恒等式就是通过转化和消去等式两边差异来促成统一的过程,证明的方法在形式上显得较为灵活,常用的有以下几种:

(1)直接法:从不等式的一边开始直接化为等式的另一边,常从比较复杂、繁杂的一边开始化简到另一边,其依据是相等关系的传递性;

(2)综合法:由一个已知成立的等式(如公式等)恒等变形得到所要证明的等式,其依据是等价转化的思想;

(3)中间量法:证明等式左右两边都等于同一个式子,其依据是等于同一个量的两个量相等,即“ $a=c, b=c$ , 则  $a=b$ ”,它可由等量关系的传递性及对称性推出;

(4)分析法:即从结论出发,逐步推向已知条件.其证明过程的书写格式为“要证明……,只需……”,只要所需的条件都已经具备,则结论就成立.

例如:求证  $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

**证法一:(分析法)**

要证明原等式成立,只需  $\cos\alpha \cdot \cos\alpha = (1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$  成立,

即  $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ ,  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ,

上式显然成立,故原等式成立.

**证法二:(综合法)**

$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \therefore \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ .

$\therefore \cos\alpha \cdot \cos\alpha = (1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$ .

$\therefore \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

**证法三:(直接法)**

左边  $= \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha} =$

$\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} =$  右边.

$\therefore$  原等式成立.

**证法四:(中间量法)**

左边  $= \frac{\cos\alpha \cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha},$

右边  $= \frac{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} =$   
 $\frac{\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}.$

$\therefore$  左边 = 右边,  $\therefore$  原等式成立.

三角恒等式的证明的关键是选择适当的证明方法,而三角函数式的化简的关键是选择适当的变形手段.

**问题 2**  $\sin\alpha + \cos\alpha, \sin\alpha - \cos\alpha, \sin\alpha \cos\alpha$  之间有什么关系?

**导思:**这三个三角函数式都含有  $\sin\alpha$  和  $\cos\alpha$ ,因此探究思路是从  $\sin\alpha$  和  $\cos\alpha$  的关系式  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  开始讨论.

**探究:**  $\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

$\therefore \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$

$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$

同理,可得  $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha.$

$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2,$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)^2.$

$\therefore \sin\alpha + \cos\alpha, \sin\alpha - \cos\alpha, \sin\alpha\cos\alpha$  “知一求二”,也就是已知这三个三角函数式中任意一个式子的值,就能求其他两个三角函数式的值.这些关系式的应用非常广泛,是高考的热点之一,应引起我们的重视.

例如:已知  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}, \theta \in (0, \pi)$ , 求  $\sin^2\theta - \cos^2\theta$  的值.

**思路分析:**由  $\sin\theta + \cos\theta$  的值求出  $\sin\theta - \cos\theta$  的值,从而求得  $\sin^2\theta - \cos^2\theta$  的值.

解:  $\because \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5},$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} - \frac{1}{2} =$   
 $-\frac{12}{25} < 0.$

$\therefore \sin\theta$  和  $\cos\theta$  的符号相反.

又  $\because \theta \in (0, \pi), \therefore \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi).$

$\therefore \sin\theta > 0, \cos\theta < 0. \therefore \sin\theta - \cos\theta > 0.$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{1 - 2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{1 + \frac{24}{25}} = \frac{7}{5}.$

$\therefore \sin^2\theta - \cos^2\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{1}{5} \times$   
 $\frac{7}{5} = \frac{7}{25}.$

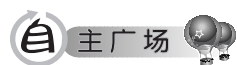
又如:已知  $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{8}$ , 且  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\cos\alpha - \sin\alpha$  的值是 \_\_\_\_\_.



思路解析:利用三角函数线可得:当  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  时,

$$\cos \alpha < \sin \alpha, \text{ 则 } \cos \alpha - \sin \alpha = -\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = -\sqrt{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{1}{2}.$$

答案:  $-\frac{1}{2}$



### 我夯基 我达标

1 2006 山东临沂二模,理 1  $\cos(-\frac{16\pi}{3}) + \sin(-\frac{16\pi}{3})$  的值为 ..... ( )

- A.  $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  B.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  D.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

思路解析:  $\cos(-\frac{16\pi}{3}) + \sin(-\frac{16\pi}{3}) = \cos \frac{16\pi}{3} - \sin \frac{16\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

答案:C

2 2006 北京西城 5 月抽样测试,理 1  $\sin 600^\circ + \tan 240^\circ$  的值是 ..... ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
C.  $-\frac{1}{2} + \sqrt{3}$  D.  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

思路解析:  $\sin 600^\circ + \tan 240^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) + \tan(180^\circ + 60^\circ) = \sin 240^\circ + \tan 60^\circ = -\sin 60^\circ + \tan 60^\circ = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ .

答案:C

3 已知  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$ , 则  $\tan \alpha$  等于 ..... ( )

- A.  $\frac{4}{3}$  B.  $-\frac{4}{3}$   
C.  $\frac{3}{4}$  D.  $-\frac{3}{4}$

思路解析:  $\because \alpha \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z}), \therefore \alpha$  在第三象限.

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}.$$

答案:C

4 若  $\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$ , 则  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

思路解析:由  $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = -\cos x$ , 得  $\cos x \leq 0$ . 利用三角函数线得  $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

答案:  $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}] (k \in \mathbb{Z})$

5 已知  $\tan(\pi + \alpha) = -2$ , 求  $\sin(3\pi - \alpha)$  和  $\sin(\frac{5\pi}{2} - \alpha)$ .

思路分析:对  $\alpha$  所在象限分类讨论.

解:  $\because \tan(\pi + \alpha) = -2, \therefore \tan \alpha = -2$ .

$$\text{由题意得 } \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

由②得  $\sin \alpha = -2\cos \alpha$ , 代入①式整理得  $5\cos^2 \alpha = 1$ .

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

又  $\because \tan \alpha = -2 < 0, \therefore \alpha$  为第二、四象限角.

当  $\alpha$  为第二象限角时,  $\sin(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

$$\sin(3\pi - \alpha) = \sin \alpha = -2\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

当  $\alpha$  为第四象限角时,  $\sin(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

$$\sin(3\pi - \alpha) = \sin \alpha = -2\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

6 化简:  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$ .

思路分析:分组提取公因式,再利用  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  化简.

$$\begin{aligned} \text{解:原式} &= (\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1. \end{aligned}$$

7 已知角  $\alpha$  的顶点在原点,始边为  $x$  轴的正半轴,若角  $\alpha$

的终边过点  $P(-\sqrt{3}, y)$ , 且  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}y (y \neq 0)$ , 判断角  $\alpha$  所在的象限,并求  $\cos \alpha$  和  $\tan \alpha$  的值.

思路分析:依据点  $P$  的坐标和  $\alpha$  的正弦值可以建立  $y$  的方程,在求得  $y$  的值之后,就可利用三角函数定义求  $\cos \alpha$  和  $\tan \alpha$  的值,应当注意  $y$  有两值,所以应对点  $P$  分情况说明.

解:依题意,点  $P$  到原点  $O$  的距离为  $|OP| = r =$

$$\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + y^2} = \sqrt{3 + y^2},$$

$$\therefore \frac{y}{\sqrt{3 + y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}y, \therefore y \neq 0, \therefore 9 + 3y^2 = 16.$$

$$\therefore y^2 = \frac{7}{3}, y = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}, \therefore r = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore P$  在第二或第三象限.

当点  $P$  在第二象限时,  $y = \frac{\sqrt{21}}{3}$ , 则  $\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{4}$ ,  $\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ ;

当点  $P$  在第三象限时,  $y = -\frac{\sqrt{21}}{3}$ , 则  $\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{4}$ ,  $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ .

## 我综合我发展

8  $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ =$  \_\_\_\_\_.

思路解析:  $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) \sin^2 45^\circ = \frac{88}{2} + 1$ .

答案: 45

9 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-3\cos\theta, 4\cos\theta)$ , 其中  $\theta \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi) (k \in \mathbb{Z})$ , 求角  $\alpha$  的各三角函数值.

思路分析: 本题中的点  $P$  的坐标是用三角函数表示的, 在求点  $P$  到原点的距离时, 应特别注意角  $\theta$  的范围对  $r$  值的影响.

解:  $\because \theta \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi) (k \in \mathbb{Z})$ ,  $\therefore \cos\theta < 0$ .

$$\therefore x = -3\cos\theta, y = 4\cos\theta, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3\cos\theta)^2 + (4\cos\theta)^2} = -5\cos\theta.$$

$$\therefore \sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}, \cot\alpha = -\frac{3}{4}, \sec\alpha = \frac{5}{3}, \csc\alpha = -\frac{5}{4}.$$

10 2005 福建高考卷, 理 17 已知  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ,  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ , 求  $\sin x - \cos x$  的值.

思路分析: 利用  $\sin x + \cos x$  和  $\sin x - \cos x$  的关系求值.

解法一:  $\because \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ,  $\therefore \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$ .

$$\therefore 2\sin x \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$\therefore (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = \frac{49}{25}.$$

又  $\because -\frac{\pi}{2} < x < 0$ ,  $\therefore \sin x < 0$ ,  $\cos x > 0$ ,  $\sin x -$

$$\cos x < 0, \therefore \sin x - \cos x = -\frac{7}{5}.$$

解法二:  $\because \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ,

$$\therefore \sin x = \frac{1}{5} - \cos x.$$

$$\therefore (\frac{1}{5} - \cos x)^2 + \cos^2 x = 1.$$

整理得  $25\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$ .

$$\therefore \cos x = -\frac{3}{5} \text{ 或 } \cos x = \frac{4}{5}.$$

$$\because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5}, \\ \cos x = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore \sin x - \cos x = -\frac{7}{5}.$$

11 求证:  $\frac{2\sin(\pi+\theta) \cdot \cos\theta - 1}{1 - 2\sin^2\theta} = \frac{\tan(9\pi+\theta) + 1}{\tan(\pi+\theta) - 1}$ .

思路分析: 由于等式两边均很复杂, 故用中间量法证明.

证明: 左边  $= \frac{-2\sin\theta\cos\theta - 1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{-(\sin\theta + \cos\theta)^2}{(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ ,

$$\text{右边} = \frac{\tan\theta + 1}{\tan\theta - 1} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta},$$

$$\therefore \text{左边} = \text{右边},$$

$$\therefore \text{原等式成立}.$$

12 设  $f(\theta) = \frac{2\cos^3\theta + \sin^2(2\pi - \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) - 3}{2 + 2\cos^2(\pi + \theta) + \cos(-\theta)}$ , 求

$$f(\frac{\pi}{3}) \text{ 的值}.$$

思路分析: 先化简再求值.

解:  $f(\theta) = \frac{2\cos^3\theta + \sin^2\theta + \cos\theta - 3}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{2\cos^3\theta + 1 - \cos^2\theta + \cos\theta - 3}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{2\cos^3\theta - 2 - (\cos^2\theta - \cos\theta)}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{2(\cos^3\theta - 1) - \cos\theta(\cos\theta - 1)}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{2(\cos\theta - 1)(\cos^2\theta + \cos\theta + 1) - \cos\theta(\cos\theta - 1)}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{(\cos\theta - 1)(2\cos^2\theta + \cos\theta + 2)}{2 + 2\cos^2\theta + \cos\theta} = \cos\theta - 1,$   
 $\therefore f(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$