

图书在版编目(CIP)数据

高中同步测控优化设计·数学 A·必修:Ⅳ·新课标人教版/任志鸿主编. —2 版.  
—海口:南方出版社,2005. 2(2006. 11 重印)  
(志鸿优化系列丛书)  
ISBN 7-80701-267-6

I. 高... II. 任... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 014580 号

责任编辑:余云华

装帧设计:邢 丽

志鸿优化系列丛书

高中同步测控优化设计·数学 A·必修:Ⅳ

任志鸿 主编

南方出版社 出版

(海南省海口市海府一横路 19 号华宇大厦 12 楼)

邮编:570203 电话:0898—65371546

山东鸿杰印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

2006 年 11 月第 4 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

开本:890×1240 1/16

印张:6.5 字数:174 千字

定价:10.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

# 目录

content

|                      |    |                                                   |    |
|----------------------|----|---------------------------------------------------|----|
| 第一章 三角函数 .....       | 1  | 1.5 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 ..... | 22 |
| 1.1 任意角和弧度制 .....    | 1  | 知识梳理 .....                                        | 22 |
| 知识梳理 .....           | 1  | 知识导学 .....                                        | 22 |
| 知识导学 .....           | 2  | 疑难突破 .....                                        | 22 |
| 疑难突破 .....           | 2  | 典题精讲 .....                                        | 23 |
| 典题精讲 .....           | 2  | 问题探究 .....                                        | 24 |
| 问题探究 .....           | 4  | 自主广场 .....                                        | 24 |
| 自主广场 .....           | 4  | 1.6 三角函数模型的简单应用 .....                             | 27 |
| 1.2 任意角的三角函数 .....   | 6  | 知识梳理 .....                                        | 27 |
| 知识梳理 .....           | 6  | 知识导学 .....                                        | 27 |
| 知识导学 .....           | 7  | 疑难突破 .....                                        | 27 |
| 疑难突破 .....           | 7  | 典题精讲 .....                                        | 27 |
| 典题精讲 .....           | 7  | 问题探究 .....                                        | 29 |
| 问题探究 .....           | 8  | 自主广场 .....                                        | 30 |
| 自主广场 .....           | 9  | 本章测评 .....                                        | 34 |
| 1.3 三角函数的诱导公式 .....  | 11 | 第二章 平面向量 .....                                    | 38 |
| 知识梳理 .....           | 11 | 2.1 平面向量的实际背景及基本概念 ...                            | 39 |
| 知识导学 .....           | 11 | 知识梳理 .....                                        | 39 |
| 疑难突破 .....           | 11 | 知识导学 .....                                        | 39 |
| 典题精讲 .....           | 12 | 疑难突破 .....                                        | 39 |
| 问题探究 .....           | 13 | 典题精讲 .....                                        | 39 |
| 自主广场 .....           | 13 | 问题探究 .....                                        | 41 |
| 1.4 三角函数的图象与性质 ..... | 16 | 自主广场 .....                                        | 42 |
| 知识梳理 .....           | 16 | 2.2 平面向量的线性运算 .....                               | 43 |
| 知识导学 .....           | 16 | 知识梳理 .....                                        | 43 |
| 疑难突破 .....           | 16 | 知识导学 .....                                        | 44 |
| 典题精讲 .....           | 17 | 疑难突破 .....                                        | 44 |
| 问题探究 .....           | 19 | 典题精讲 .....                                        | 45 |
| 自主广场 .....           | 20 | 问题探究 .....                                        | 47 |

|                        |    |                          |    |
|------------------------|----|--------------------------|----|
| 自主广场.....              | 47 | 问题探究.....                | 62 |
| 2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 ... | 50 | 自主广场.....                | 62 |
| 知识梳理 .....             | 50 | 本章测评.....                | 65 |
| 知识导学.....              | 50 | <b>第三章 三角恒等变换</b> .....  | 70 |
| 疑难突破.....              | 50 | 3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 ... | 70 |
| 典题精讲.....              | 51 | 知识梳理.....                | 70 |
| 问题探究.....              | 52 | 知识导学.....                | 71 |
| 自主广场.....              | 53 | 疑难突破.....                | 71 |
| 2.4 平面向量的数量积 .....     | 55 | 典题精讲.....                | 72 |
| 知识梳理 .....             | 55 | 问题探究.....                | 73 |
| 知识导学.....              | 55 | 自主广场.....                | 73 |
| 疑难突破.....              | 55 | 3.2 简单的三角恒等变换 .....      | 76 |
| 典题精讲.....              | 56 | 知识梳理.....                | 76 |
| 问题探究.....              | 57 | 知识导学.....                | 76 |
| 自主广场.....              | 58 | 疑难突破.....                | 76 |
| 2.5 平面向量应用举例 .....     | 59 | 典题精讲.....                | 77 |
| 知识梳理 .....             | 59 | 问题探究.....                | 79 |
| 知识导学.....              | 60 | 自主广场.....                | 79 |
| 疑难突破.....              | 60 | 本章测评 .....               | 81 |
| 典题精讲.....              | 60 | <b>模块综合测评</b> .....      | 85 |

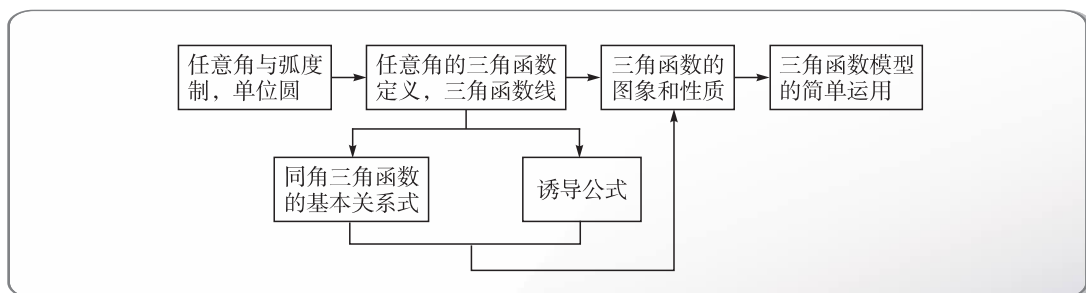
# 第一章 三角函数



## 三维目标

1. 了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化,逐步养成用弧度表示角的习惯;借助单位圆来直观地认识任意角,理解任意角的三角函数的定义,自主地探索三角函数的有关性质,培养分析问题和解决问题的能力.
2. 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式,能利用“五点法”画出  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  和  $y = \tan x$  的图象,了解三角函数的周期性;借助图象理解正弦函数、余弦函数在  $[0, 2\pi]$ , 正切函数在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的性质(如单调性、最大值和最小值、图象与  $x$  轴的交点等).
3. 结合具体实例,了解  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象,观察参数  $A, \omega, \varphi$  对函数图象变化的影响,通过观察、独立思考等过程,培养归纳、概括能力.
4. 能熟练地使用计算器和计算机探索 and 解决问题,例如求三角函数值,计算测量问题,分析  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  中参数对函数的影响等.
5. 通过用三角函数解决一些简单实际问题(如单摆、弹簧振子、圆上一点的运动以及音乐、波浪、潮汐、四季变化等),认识周期现象的广泛存在及变化规律;体会三角函数是体现周期现象的重要模型;领悟数学知识来源于实践;服务于实践;体会数学知识与现实世界的广泛联系,激发学习三角函数的兴趣,培养运用三角函数解决周期现象的能力.

## 知识网络



## 1.1 任意角和弧度制

### 知识梳理

#### 一、角的概念的推广

1. 角:角可以看成是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形,旋转开始时的射线叫做角  $\alpha$  的始边,旋转终止时的射线叫做角  $\alpha$  的终边,射线的端点叫做角  $\alpha$  的顶点.

2. 角的分类:正角、零角、负角.

3. 象限角:如果把角放在直角坐标系内来讨论,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与  $x$  轴的非负半轴重合,那么角的终边落在第几象限,就说这个角是第几象限角.

$\alpha$  是第一象限角可表示为  $\{\alpha | 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

$\alpha$  是第二象限角可表示为  $\{\alpha | 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

$\alpha$  是第三象限角可表示为  $\{\alpha | 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

$\alpha$  是第四象限角可表示为  $\{\alpha | 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

4. 轴线角: 当角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 如果角的终边落在坐标轴上, 就称该角为轴线角.

终边落在  $x$  轴非负半轴上的角的集合可记作:  $\{\alpha | \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $x$  轴非正半轴上的角的集合可记作:  $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $y$  轴非负半轴上的角的集合可记作:  $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在  $y$  轴非正半轴上的角的集合可记作:  $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ;

终边落在坐标轴上的角可表示为:  $\{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

5. 终边相同的角: 所有与角  $\alpha$  终边相同的角, 连同角  $\alpha$  在内, 可构成一个集合  $\{\beta | \beta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

## 二、弧度制

1. 角度制: 规定周角的  $\frac{1}{360}$  为 1 度的角, 这种计量角的度量方法称为角度制.

2. 弧度的定义: 规定圆弧上弧长等于半径的弧所对的圆心角为 1 弧度的角, 即  $\frac{1}{360}$  周角  $= 1^\circ$ ,  $\frac{1}{2\pi}$  周角  $= 1 \text{ rad}$ .

3. 弧度与角度的换算:  $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ;  $180^\circ = \pi \text{ rad}$ ;  
 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$ ;  $1 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$ .

4. 弧长公式:  $l = |\alpha| \cdot r$  (其中  $r$  为扇形的半径,  $\alpha$  为扇形圆心角的弧度数).

5. 扇形的面积公式:  $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| r^2$  (其中  $r$  为扇形的半径,  $\alpha$  为扇形圆心角的弧度数).

### 知识导学

要理解任意角概念, 可通过创设情境: “转体  $720^\circ$ , 逆(顺)时针旋转”, 从而知晓角有大于  $360^\circ$  角、零角和旋转方向不同所形成的角等; 角的概念得到推广以后, 将角放入平面直角坐标系, 引入象限角、非象限角的概念; 列出

几个终边相同的角, 画出终边所在的位置, 找出它们的关系, 探索具有相同终边的角的表示; 再通过创设情境, 引入弧度制度量角的大小, 通过探究理解并掌握弧度制的定义, 领会定义的合理性. 根据弧度制的定义推导并运用弧长公式和扇形面积公式. 以具体的实例学习角度制与弧度制的互化, 能正确使用计算器.

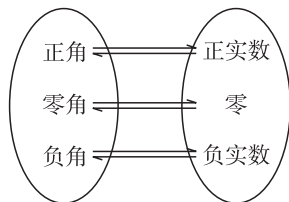
### 疑难突破

1. 弧度制与角度制相比, 具有哪些优点?

剖析: (1) 用角度制来度量角时, 人们总是十进制、六十进制并用的. 例如  $\alpha = 66^\circ 32' 2''$ , 其中  $66, 32, 2$  都是十进制数, 而度、分、秒之间的关系是六十进(退)位的. 于是, 为了找出与角对应的实数(我们学的实数都是十进制), 需要经过一番计算, 这就太不方便了. 但在用弧度表示角时, 只用十进制, 所以容易找到与角对应的实数.

(2) 弧度制下的弧长公式  $l = |\alpha| r$ , 扇形面积公式  $S = \frac{1}{2} |\alpha| r^2$ , 与角度制下的弧长公式  $l = \frac{n\pi r}{180}$ , 扇形面积公式  $S = \frac{n\pi r^2}{360}$  比较, 不但具有更简洁的形式, 而且在计算弧长和扇形面积时, 也更为方便.

2. 为何说三角函数看成是以实数为自变量的函数, 角的集合与实数集  $\mathbb{R}$  是一一对应关系?



剖析: 在用弧度制或角度制度量角的前提下, 角的集合与实数集  $\mathbb{R}$  建立了一一对应关系: 每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的角度数或弧度数)与它对应; 反过来, 每一个实数也都有唯一的一个角(角的角度数或弧度数等于这个实数)与它对应. 于是, 就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数. 有了角的集合与实数集  $\mathbb{R}$  的一一对应关系, 要注意角度制是 60 进位制, 类似  $22^\circ 30'$  这样的角, 应该把它化为十进制  $22.5^\circ$ , 它与实数  $22.5$  对应, 但弧度制不存在这个问题, 因为弧度制是十进制的实数.

### 典题精讲

例 1 一条弦的长度等于半径  $r$ , 求:

- (1) 这条弦所对的劣弧长;
- (2) 这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

思路分析: 解决此类问题, 要首先根据题意画出相关

的图形,然后对涉及的量的大小进行确定.由已知可知圆心角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ ,然后用公式求解即可.

解:(1)如图 1-1-1,因为半径为 $r$ 的 $\odot O$ 中,弦 $AB=r$ ,则 $\triangle OAB$ 为等边三角形,所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ .则弦 $AB$ 所对的劣弧长为 $\frac{\pi}{3}r$ .

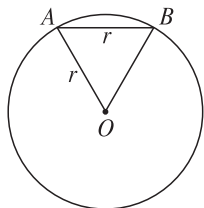


图 1-1-1

$$(2) \because S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2,$$

$$S_{\text{扇形} OAB} = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times r^2 = \frac{\pi}{6} r^2,$$

$$\therefore S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形} OAB} - S_{\triangle OAB} = \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2.$$

**绿色通道:**图形的分解与组合是解决数学问题的基本方法之一,本例要把弓形看成是扇形与三角形的差,即可运用已有知识解决要求解的问题.此类数形结合的题目,要尽可能地从图中各种图形的组合关系中找到解决问题的突破口.

**变式训练** 地球赤道的半径是 6 370 km,所以赤道上的 $l'$ 弧长是\_\_\_\_\_ (精确到 0.01 km).

**思路解析:**由于在弧长公式中圆心角的单位是弧度,所以首先将 $l'$ 化为弧度,还要注意地球赤道的半径就是地球的半径. $l' = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}$  弧度,弧长 $l = r|\alpha| = 6\,370 \times \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \approx 1.85$  km.

答案:1.85 km

**例 2** 2005 全国高考卷 III, 1 已知 $\alpha$ 为第三象限角,

则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 \_\_\_\_\_ ( )

- A. 第一或第二象限
- B. 第二或第三象限
- C. 第一或第三象限
- D. 第二或第四象限

**思路解析:**根据 $\alpha$ 的取值范围,确定 $\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围.

因为第三象限角与 $\frac{\pi}{2} \sim \pi$ 之间的角并不等价.由 $\alpha$ 在第三象限, $\alpha$ 应在区间 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}) (k \in \mathbb{Z})$ 内,即

$2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ,当 $k$ 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限;当 $k$ 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限.

答案:D

**绿色通道:**(1)由 $\alpha$ 的象限确定 $2\alpha$ 的象限时,应注意 $2\alpha$ 可能不再是象限角,对此特殊情况应特别指出.如 $\alpha = 45^\circ, 2\alpha = 90^\circ$ 就不再是象限角.

(2)在本例的基础上,还可以进一步推导出各个象限角的半角范围.可以借助图 1-1-2 来记忆.图中 I、II、III、IV 分别指第一、二、三、四象限角的半角范围.如:当 $\alpha$ 为第一象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角的前半区域;当 $\alpha$ 为第二象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角的后半区域.依此类推.

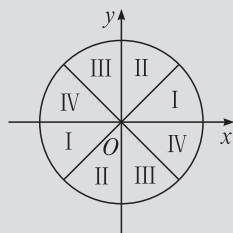


图 1-1-2

**黑色陷阱:**应避免以下错误:由 $\alpha$ 是第二象限角,仅想到 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,由 $45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ 得出 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角,而将 $\frac{\alpha}{2}$ 中第三象限角丢掉.

**变式训练 1** 已知单位圆上一点 $A(1,0)$ 按逆时针方向做匀速圆周运动,1 秒钟时间转过 $\theta (0 < \theta \leq \pi)$ 角,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟转到与最初位置重合,求 $\theta$ 角的弧度数.

**思路分析:**这是一个涉及终边相同的角和匀速圆周运动的问题,首先要根据题意画出坐标系,然后按照题中描述表示出角的范围,再进行计算.

解:由 $0 < \theta \leq \pi$ ,可得 $0 < 2\theta \leq 2\pi$ ,又因为 $2\theta$ 在第三象限,所以 $\pi < 2\theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .

$$\text{由 } 14\theta = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 可得 } 2\theta = \frac{2k\pi}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

所以 $\pi < \frac{2k\pi}{7} < \frac{3\pi}{2}$ ,即 $\frac{7}{2} < k < \frac{21}{4}$ .所以 $k=4$ 或 $5$ ,则 $\theta = \frac{4\pi}{7}$ 或 $\frac{5\pi}{7}$ .

**变式训练 2** 若锐角 $\alpha$ 的终边与它的 10 倍角的终边相同,求 $\alpha$ .

**思路分析:**与角 $\alpha$ 终边相同的角均可以表示为 $2k\pi +$

$\alpha(k \in \mathbb{Z})$  的形式. 注意题目中说的  $\alpha$  是锐角. 根据题意列出方程解出  $\alpha$ , 这一方法也体现了在三角函数中“方程思想”的应用.

解: 由题意, 有  $10\alpha = 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z}), \therefore \alpha = \frac{2k\pi}{9} (k \in \mathbb{Z})$ . 又  $\because \alpha$  为锐角, 所以  $k$  可以取 1, 2 两个值, 即  $\alpha = 40^\circ$  或  $\alpha = 80^\circ$ .

**例 3** 已知扇形的周长为 20 cm, 当扇形的半径和圆心角各取什么值时, 才能使扇形的面积最大?

思路分析: 根据题中的已知条件, 列出扇形的半径、圆心角及周长的关系表达式, 然后把扇形的面积表示成半径的函数, 利用求函数最值的方法求解.

解: 设扇形的圆心角为  $\theta$ , 半径为  $r$ , 扇形的弧长  $l = r\theta$ .  
 $\therefore 2r + r\theta = 20, \theta = \frac{20-2r}{r}, \therefore S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{20-2r}{r}$   
 $\frac{20-2r}{r} = r(10-r) = -r^2 + 10r$ . 当  $r = -\frac{10}{2 \times (-1)} = 5$  时,  $S_{\text{扇形最大}} = 25$ , 此时  $\theta = 2$ .

答: 当扇形半径为 5, 圆心角为 2 时, 扇形面积最大.

**绿色通道:** 几何图形求最值的途径有两条: 一是利用几何意义, 从图形中直接找出 (本例不好找); 二是利用函数求解, 即设出未知量, 建立函数关系式, 然后用函数的方法解决.

**变式训练** 一个半径为  $r$  的扇形, 若它的周长等于弧所在的半圆的长, 那么扇形的圆心角是 \_\_\_\_\_ 弧度, 扇形的面积是 \_\_\_\_\_.

思路解析: 设扇形的圆心角是  $\theta$  弧度, 则扇形的弧长是  $r\theta$ , 扇形的周长是  $2r + r\theta$ .

由题意, 可知  $2r + r\theta = r\pi, \therefore \theta = \pi - 2$  (弧度).

扇形的面积为  $S = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2 = \frac{1}{2}r^2(\pi - 2)$ .

答案:  $\pi - 2 \quad \frac{1}{2}r^2(\pi - 2)$

## 问题探究

**问题 1** 在体操、花样滑冰、跳台跳水比赛中, 常常听到“转体三周”“转体两周半”的说法, 像这种动作名称表示的角是多大?

导思: 解答此类问题时, 要考虑到问题的多种情况, 不要上来就盲目地解答, 首先对问题有个大体的了解, 然后再调动所学知识进行解答, 可能起到事半功倍的效果. 此题不要忽视了转体的顺、逆方向会影响到角的正、负号. 利用角的定义及正角、负角的概念, 这个问题迎刃而解.

探究: 如果是逆时针转体, 则分别是  $360^\circ \times 3 = 1\ 080^\circ$  和  $360^\circ \times 2.5 = 900^\circ$ ; 若是顺时针转体, 则分别为  $-1\ 080^\circ$  和  $-900^\circ$ .

**问题 2** 在弧度制下, 角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边一般具有什么关系, 我们可否分别探究出它们应该满足的条件呢?

导思: 在弧度制下, 角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边一般具有以下 6 种关系:

(1) 关于  $x$  轴对称; (2) 关于  $y$  轴对称; (3) 关于  $y = -x$  对称; (4) 关于  $y = x$  对称; (5) 在同一条直线上; (6) 互相垂直. 结合图形, 我们可以探究出它们应满足的条件.

探究: (1) 若  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于  $x$  轴对称, 则  $\alpha + \beta = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

(2) 若  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于  $y$  轴对称, 则  $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

(3) 若  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于  $y = -x$  对称, 则  $\alpha + \beta = (2k + \frac{3}{2})\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

(4) 若  $\alpha$  的终边与  $\beta$  的终边关于  $y = x$  对称, 则  $\alpha + \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

(5) 若  $\alpha$  与  $\beta$  终边在同一直线上, 则  $\alpha - \beta = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

(6) 若  $\alpha$  的终边与  $\beta$  的终边互相垂直, 则  $\alpha - \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## 自主广场

### 我夯基 我达标

1 集合  $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$ , 则  $A \cap B$  等于 \_\_\_\_\_ ( )

- A.  $\{-36^\circ, 54^\circ\}$   
 B.  $\{-126^\circ, 144^\circ\}$   
 C.  $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$   
 D.  $\{-126^\circ, 54^\circ\}$

思路解析: 在集合  $A$  中, 令  $k$  取不同的整数, 找出既属于  $A$  又属于  $B$  的角度即可.  $k = -1, 0, 1, 2$  验证可知  $A \cap B = \{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$ .

答案: C

2 如果  $\alpha$  与  $x + 45^\circ$  具有同一条终边, 角  $\beta$  与  $x - 45^\circ$  具有同一条终边, 那么  $\alpha$  与  $\beta$  间的关系是 \_\_\_\_\_ ( )

- A.  $\alpha + \beta = 0$   
 B.  $\alpha - \beta = 0$   
 C.  $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$   
 D.  $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

思路解析: 利用终边相同的角的关系, 分别写出  $\alpha, \beta$ , 找出它们的关系即可. 由题意, 得  $\alpha = k \cdot 360^\circ + x + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}; \beta = n \cdot 360^\circ + x - 45^\circ, n \in \mathbb{Z}$ . 两式相减, 得  $\alpha - \beta = (k - n) \cdot 360^\circ + 90^\circ, (k - n) \in \mathbb{Z}$ .

答案: D

3  $\alpha = -2$  rad, 则  $\alpha$  的终边在 \_\_\_\_\_ ( )



- A. 第一象限                      B. 第二象限  
C. 第三象限                      D. 第四象限

思路解析:  $-2 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ , 所以  $-2 \text{ rad}$  是第三象限角.

答案: C

- 4 若扇形的面积是  $1 \text{ cm}^2$ , 它的周长是  $4 \text{ cm}$ , 则扇形圆心角的弧度数为 ..... ( )

- A. 1                                  B. 2  
C. 3                                  D. 4

思路解析: 确定扇形的条件有两个, 最直接的条件是给出扇形的半径、弧长和圆心角中的两个. 设扇形的半径为  $R$ 、弧长为  $l$ , 由已知条件可知

$$\begin{cases} \frac{1}{2}lR=1, \\ 2R+l=4. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} l=2, \\ R=1. \end{cases} \text{ 所以扇形的圆心角度数为}$$

$$\frac{l}{R}=2.$$

答案: B

- 5 角  $\alpha$  小于  $180^\circ$  而大于  $-180^\circ$ , 它的 7 倍角的终边又与自身终边重合, 则满足条件的角  $\alpha$  的集合为 \_\_\_\_\_

思路解析: 与角  $\alpha$  终边相同的角连同角  $\alpha$  在内可表示为  $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

$\therefore$  它的 7 倍角的终边与其终边相同,  $\therefore 7\alpha = \alpha + k \cdot 360^\circ$ . 解得  $\alpha = k \cdot 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

$\therefore$  满足  $\alpha$  的集合为  $\{-120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$ .

答案:  $\{-120^\circ, -60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$

- 6 圆的一段弧长等于这个圆内接正三角形的一条边长, 那么这段弧所对的圆心角是 \_\_\_\_\_ 弧度.

思路解析: 先求圆内接正三角形的边长, 即得到圆弧长, 再利用公式  $|\alpha| = \frac{l}{r}$  求得这段弧所对圆心角的弧度数. 设圆的半径为  $r$ , 则圆内接正三角形的边长为  $\sqrt{3}r$ , 即弧长为  $\sqrt{3}r$ , 所以所求圆心角的弧度数为  $|\alpha| =$

$$\frac{l}{r} = \frac{\sqrt{3}r}{r} = \sqrt{3}.$$

答案:  $\sqrt{3}$

- 7 已知  $A = \{\text{锐角}\}$ ,  $B = \{0^\circ \text{ 到 } 90^\circ \text{ 的角}\}$ ,  $C = \{\text{第一象限角}\}$ ,  $D = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$ . 求  $A \cap B, A \cup C, C \cap D, A \cup D$ .

思路解析: 搞清各集合的范围, 是解题的关键.

$$A = \{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}; B = \{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\};$$

$$C = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$D = \{\alpha | \alpha < 90^\circ\}.$$

$$\therefore A \cap B = \{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}; A \cup C = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$C \cap D = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \text{ 为非正整数}\}; A \cup D = \{\alpha | \alpha < 90^\circ\}.$$

- 8 在直径为  $10 \text{ cm}$  的轮子上有一长为  $6 \text{ cm}$  的弦,  $P$  为弦的中点, 轮子以每秒  $5$  弧度的角速度旋转, 求经过  $5$  秒钟后, 点  $P$  转过的弧长.

思路分析:  $P$  点在一新圆上, 所以要求点  $P$  转过的弧长需先求新圆的半径. 画出草图, 根据位置关系求出  $P$  点到圆心的距离, 即为新圆的半径.

解:  $P$  到圆心  $O$  的距离  $PO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$ , 即为点  $P$  所在新圆的半径.

又点  $P$  转过的角的弧度数  $\alpha = 5 \times 5 = 25$ ,

所以  $P$  点转过的弧长为  $\alpha \cdot OP = 25 \times 4 = 100(\text{cm})$ .

### 我综合我发展

- 9 如图 1-1-3 在扇形  $AOB$  中,  $\angle AOB = 90^\circ$ , 弧  $AB$  的长为  $l$ , 求此扇形的内切圆的面积.

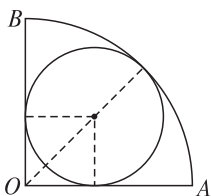


图 1-1-3

思路分析: 因为圆内切于扇形, 所以可以建立圆的半径与扇形的半径的关系式, 再由弧长公式代入解出圆的半径, 即可解决问题.

解: 设扇形  $AOB$  所在圆面的半径为  $R$ , 此扇形内切圆的半径为  $r$ , 则有  $R = r + \sqrt{2}r$ ,  $\widehat{AB} = l = \frac{\pi}{2} \cdot R$ , 故  $r =$

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)l}{\pi}.$$

则扇形的内切圆的面积为  $S = \pi r^2 = \frac{12-8\sqrt{2}}{\pi} l^2$ .

- 10 集合  $A = \{\alpha | \alpha = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$ ,

$$B = \{\beta | \beta = \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}, \text{ 则 } A$$

与  $B$  的关系如何?

思路分析: 将三角函数的问题放在集合里, 要求用集合的方法求解, 来找出两集合中元素之间的关系是三角函数常见的变形之一. 这类题型只需要根据三角函数的规律找出集合的特征即可顺利求解.

解: 在集合  $A$  里对  $n$  分奇数和偶数进行讨论有:

$$\{\alpha | \alpha = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

在集合  $B$  里对  $n$  分成 3 的倍数进行讨论, 有

$$\{\beta | \beta = \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\} = \{\beta | \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 2k\pi \pm$$

$$\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}.$$



由此可以看出: $B$  中的元素都是  $A$  中的元素,而  $A$  中的元素  $\alpha=(2k+1)\pi, (k\in\mathbf{Z})$  不是集合  $B$  中的元素,即  $B$  是  $A$  的真子集.

- 11 有人说,钟的时针和分针一天内会重合 24 次,你认为这种说法是否正确?请说明理由.

思路分析:钟的时针与分针重合,实质是角的终边相同的问题.

解:设经过  $t$  min 分针就与时针重合, $n$  为两针重合的次数.

因为分针旋转的角速度为  $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$  (rad/min),

时针旋转的角速度为  $\frac{2\pi}{12\times 60}=\frac{\pi}{360}$  (rad/min),所以

$$(\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{360})t=2n\pi,$$

即  $t=\frac{720}{11}n$ . 用计算机或计算器作出函数  $t=\frac{720}{11}n$  的

图象或表格,从中可清楚地看到时针与分针每次重合

所需的时间.

因为时针旋转一天所需的时间为  $24\times 60=1\,440$  (min),

$$\text{所以 } \frac{720}{11}n\leq 1\,440.$$

于是  $n\leq 22$ . 故时针与分针一天内只会重合 22 次.

- 12 在炎炎夏日,用纸扇驱走闷热,无疑是很好的办法.纸扇在美观的设计上,可考虑用料、图案和形状.若从数学角度看,能否利用黄金比例(0.618)去设计一把有美感的白纸扇呢,此时张开角  $\theta$  为多少?

思路分析:在设计纸扇张开角( $\theta$ )时,可以考虑从一圆形(半径为  $r$ )分割出来的扇形的面积( $A_1$ )与剩余面积( $A_2$ )的比值.若这一比值等于黄金比例,便可找到  $\theta$ .

$$\text{解:若 } \frac{A_1}{A_2}=\frac{\frac{1}{2}r^2\theta}{\frac{1}{2}r^2(2\pi-\theta)}=0.618, \theta \text{ 以弧度表示.}$$

$$\text{则 } \theta=0.618(2\pi-\theta).$$

$$\text{所以 } \theta=0.764\pi\approx 140^\circ.$$

## 1.2 任意角的三角函数

### 知识梳理

#### 一、任意角的三角函数

1. 定义:设  $\alpha$  是一个任意角, $\alpha$  的终边上任意一点  $P$  的坐标是  $(x, y)$ ,它与原点的距离是  $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$ ,

$$\text{那么 } \sin\alpha=\frac{y}{r}, \cos\alpha=\frac{x}{r}, \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

2. 在直角坐标系中,以原点  $O$  为圆心,以单位长度为半径的圆为单位圆.单位圆上点的坐标定义任意角的正弦函数、余弦函数、正切函数.

如图 1-2-1,设  $\alpha$  是一个任意角,它的终边与单位圆交于点  $P(x, y)$ ,那么

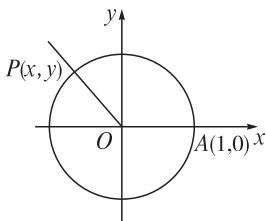


图 1-2-1

(1)  $y$  叫做  $\alpha$  的正弦,记作  $\sin\alpha$ ,即  $\sin\alpha=y$ ;

(2)  $x$  叫做  $\alpha$  的余弦,记作  $\cos\alpha$ ,即  $\cos\alpha=x$ ;

(3)  $\frac{y}{x}$  叫做  $\alpha$  的正切,记作  $\tan\alpha$ ,即  $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$ .

3. 三角函数的定义:正弦、余弦、正切等以角为自变量,以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数,统称三角函数.

#### 二、三角函数的定义域、值域

| 函 数            | 定义域                                                       | 值域           |
|----------------|-----------------------------------------------------------|--------------|
| $y=\sin\alpha$ | $\mathbf{R}$                                              | $[-1, 1]$    |
| $y=\cos\alpha$ | $\mathbf{R}$                                              | $[-1, 1]$    |
| $y=\tan\alpha$ | $\{\alpha \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ | $\mathbf{R}$ |

#### 三、三角函数的符号

由三角函数的定义,以及各象限内点的坐标的符号,可以得知:

(1) 正弦值  $\frac{y}{r}$  对于第一、二象限为正( $y>0, r>0$ ),对于第三、四象限为负( $y<0, r>0$ );

(2) 余弦值  $\frac{x}{r}$  对于第一、四象限为正( $x>0, r>0$ ),对于第二、三象限为负( $x<0, r>0$ );

(3) 正切值  $\frac{y}{x}$  对于第一、三象限为正( $x, y$  同号),对于第二、四象限为负( $x, y$  异号).

#### 四、诱导公式

由三角函数的定义,就可知道:终边相同的角三角函数值相同.

即有  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ ,  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ ,  $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

这组公式的作用是可把任意角的三角函数值问题转化为  $0 \sim 2\pi$  间角的三角函数值问题.

#### 五、正弦线、余弦线、正切线

1. 有向线段:坐标轴是规定了方向的直线,那么与之平行的线段亦可规定方向.规定:与坐标轴方向一致时为正,与坐标轴方向相反时为负.

2. 三角函数线的定义:在单位圆中,设任意角  $\alpha$  的顶点在原点  $O$ ,始边与  $x$  轴非负半轴重合,终边与单位圆相交于点  $P(x, y)$ ,过点  $P$  作  $x$  轴的垂线,垂足为  $M$ ;过点  $A(1, 0)$  作单位圆的切线,它与角  $\alpha$  的终边或其反向延长线交于点  $T$ .

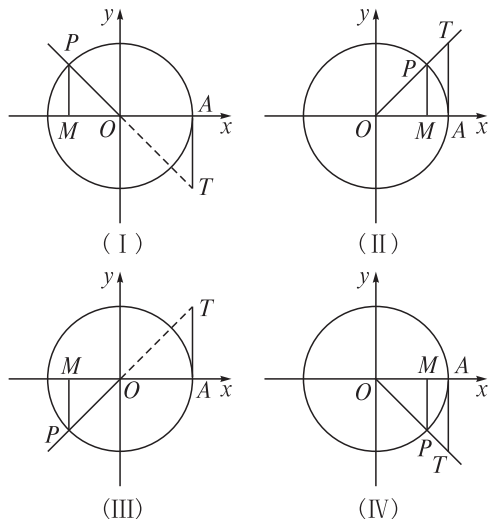


图 1-2-2

由图 1-2-2 看出:

当角  $\alpha$  的终边不在坐标轴上时,有向线段  $OM = x$ ,  $MP = y$ ,于是有  $\sin\alpha = \overline{MP}$ ,  $\cos\alpha = \overline{OM}$ ,  $\tan\alpha = \overline{AT}$ .我们就分别称有向线段  $\overline{MP}$ 、 $\overline{OM}$ 、 $\overline{AT}$  为正弦线、余弦线、正切线.

#### 六、同角的三角函数的基本关系

1. 平方关系:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ .

2. 商数关系:  $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ .

#### 知识导学

要学好本节内容,可从复习初中学过:锐角三角函数就是以锐角为自变量,以比值为函数值的函数入手.把这个定义推广到任意角,通过单位圆和角的终边,探讨任意角的三角函数值的求法,最终得到任意角三角函数的定义.根据角终边所在位置不同,分别探讨各三角函数的定

义域以及这三种函数的值在各象限的符号.最后主要是借助有向线段进一步认识三角函数.由圆的几何性质出发,利用三角函数线,探究同一个角的不同三角函数之间的关系;学习已知一个三角函数值,求它的其余各三角函数值;利用同角三角函数关系式化简三角函数式;利用同角三角函数关系式证明三角恒等式等.总结方法,通过做练习,巩固所学知识.

#### 疑难突破

1. 求任意角的三角函数值时应注意的几点.

剖析:(1)以后在平面直角坐标系内研究角的问题的,其顶点都在原点,始边都与  $x$  轴的非负半轴重合.

(2) $\alpha$  是任意角,射线  $OP$  是角  $\alpha$  的终边, $\alpha$  的各三角函数值与  $\alpha$  绕  $x$  轴转了几圈,按什么方向旋转到  $OP$  的位置无关.

(3) $\sin\alpha$  是个整体符号,不能认为是“ $\sin$ ”与“ $\alpha$ ”的积,其余五个符号也是这样.

(4)任意角的三角函数的定义与锐角三角函数的定义的联系与区别:

锐角三角函数是任意角三角函数的一种特例,它们的基础建立于相似(直角)三角形的性质,“ $r$ ”同为正值.所不同的是,锐角三角函数是以边的比来定义的,任意角的三角函数是以坐标与距离、坐标与坐标、距离与坐标的比来定义的,它也适合锐角三角函数的定义.实质上,由锐角三角函数的定义到任意角的三角函数的定义是由特殊到一般的认识和研究过程.

(5)为了便于记忆,可以利用两种三角函数定义的一致性,将直角三角形置于平面直角坐标系的第一象限,使一锐角顶点与原点重合,一直角边与  $x$  轴的非负半轴重合,利用我们熟悉的锐角三角函数类比记忆.

2. 三角函数线的几点说明.

剖析:(1)三条有向线段的位置:正弦线为  $\alpha$  的终边与单位圆的交点到  $x$  轴的垂直线段;余弦线在  $x$  轴上;正切线在过单位圆与  $x$  轴正方向的交点的切线上,三条有向线段中两条在单位圆内,一条在单位圆外.

(2)三条有向线段的方向:正弦线由垂足指向  $\alpha$  的终边与单位圆的交点;余弦线由原点指向垂足;正切线由切点指向与  $\alpha$  的终边的交点.

(3)三条有向线段的正负:三条有向线段凡与  $x$  轴或  $y$  轴同向的为正值,与  $x$  轴或  $y$  轴反向的为负值.

(4)三条有向线段的书写:有向线段的起点字母在前,终点字母在后面.

#### 典题精讲

例 1 已知  $\sin\alpha = t$  且  $|t| < 1$ ,求角  $\alpha$  的余弦值和正切值.

思路分析:在已知角的某一三角函数值的情况下,利用三角函数基本关系式,可以对其他三角函数进行求解,但是要注意进行分类讨论.

解:∵  $\sin \alpha = t$  且  $|t| < 1$ , ∴ 角  $\alpha$  可能为四个象限和  $x$  轴上的轴线角.

① 当  $\alpha$  为第一、四象限或  $x$  轴非负半轴上的角时,有

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - t^2}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

② 当  $\alpha$  为第二、三象限或  $x$  轴非正半轴上的角时,有

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - t^2},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

**绿色通道:**若已知正弦、余弦、正切中的某一个三角函数值是用字母表示的,且角所在象限也没有指定时,这个角  $\alpha$  可能在四个象限(也可能是轴线角),此时,不必按四个象限讨论,只需将四个象限角(可能含轴线角)的三角函数值分成两组讨论.

**变式训练** 2006 重庆高考卷,文 13 已知  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.

思路解析:由  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $\tan \alpha = -2$ .

答案: -2

**例 2**  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$  的定义域是 \_\_\_\_\_.

思路解析:利用函数  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  的定义域和分式函数的定义域即可求解. 要使函数有意义必须使  $\tan x$  有意义且  $\tan x \neq 0$ .

∴  $\begin{cases} x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}), \\ x \neq k\pi, \end{cases}$  ∴ 函数  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\tan x}$  的定

义域为  $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

答案:  $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

**黑色陷阱:**解答本题,往往容易忽视  $\tan x$  本身有意义这个条件,只考虑到  $\tan x$  作为分母不能为 0.

**变式训练** 求函数  $y = \sqrt{\sin x} + \tan x$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

思路解析:由  $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

得  $\begin{cases} 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \\ x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

∴  $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  且  $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

答案:  $[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cup (2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi] (k \in \mathbb{Z})$

**例 3** 已知  $\tan \alpha = 2$ , 则 (1)  $\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{4\sin \alpha - 9\cos \alpha} =$  \_\_\_\_\_;

(2)  $\frac{2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{4\sin^2 \alpha - 9\cos^2 \alpha} =$  \_\_\_\_\_.

思路分析:题中给出的已知是某角的正切值,所求的是含有正弦和余弦的分数式,可以利用三角函数基本关系式进行适当变形,然后利用已知求解.

解: (1) ∵  $\cos \alpha \neq 0$ , ∴ 分子分母同除  $\cos \alpha$ , 得

$$\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{4\sin \alpha - 9\cos \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 3}{4\tan \alpha - 9} = \frac{2 \times 2 - 3}{4 \times 2 - 9} = -1.$$

(2) ∵  $\cos^2 \alpha \neq 0$ , ∴ 分子分母同除  $\cos^2 \alpha$  得

$$\frac{2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{4\sin^2 \alpha - 9\cos^2 \alpha} = \frac{2\tan^2 \alpha - 3}{4\tan^2 \alpha - 9} = \frac{2 \times 2^2 - 3}{4 \times 2^2 - 9} = \frac{5}{7}.$$

答案: (1) -1 (2)  $\frac{5}{7}$

**绿色通道:**这是一组在已知  $\tan \alpha = m$  的条件下,求关于  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  的齐次式值的问题. 解这类问题需注意以下几点:

(1) 一定是关于  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  的齐次式(或能化为齐次式)的三角函数式;

(2) 因为  $\cos \alpha \neq 0$ , 所以可用  $\cos^2 \alpha (n \in \mathbb{N}^+)$  除之. 这样可以将所求式化为关于  $\tan \alpha$  的表达式,可整体代入  $\tan \alpha = m$  的值,求解.

**变式训练** 已知  $\sin \alpha = 2\sin \beta$ ,  $\tan \alpha = 3\tan \beta$ , 求  $\cos^2 \alpha$ .

思路分析:本题中只给出了  $\alpha, \beta$  的正弦和正切关系,要求  $\alpha$  余弦的平方,显然应该考虑平方之间的关系,依此考虑则可得出解题的方法,在解答过程中还要注意灵活变形.

解:由题设,知  $\sin \alpha = 2\sin \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = 4\sin^2 \beta$ , ①

$\tan \alpha = 3\tan \beta \Rightarrow \tan^2 \alpha = 9\tan^2 \beta$ . ②

① ÷ ②, 得  $9\cos^2 \alpha = 4\cos^2 \beta$ . ③

① + ③, 得  $\sin^2 \alpha + 9\cos^2 \alpha = 4 \Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha + 9\cos^2 \alpha = 4$ .

∴  $\cos^2 \alpha = \frac{3}{8}$ .

## 问题探究

**问题 1** 你能找到三角函数值在各个象限的符号记忆规律吗?

导思:三角函数的符号是根据三角函数的定义和各象限内的坐标符号导出的,从原点到角的终边上任意一点的距离  $r$  总是正值,根据三角函数的定义可知:正弦的符号取决于纵坐标  $y$  的符号,余弦的符号取决于横坐标  $x$  的符号,正切当  $x, y$  同号时为正,异号时为负.

探究：方法一：利用口诀“一全正，二正弦，三正切，四余弦”，也可简称为“全、S、T、C”来记忆。上述口诀表示：第一象限全是正值，第二象限正弦(S)是正值，第三象限正切(T)是正值，第四象限余弦(C)是正值。至于正割、余割和余切函数值在各象限的符号，只需记住它们与余弦、正弦、正切在各象限内的符号相同就可以了。

方法二：利用图 1-2-3 记忆，口诀在图下方：

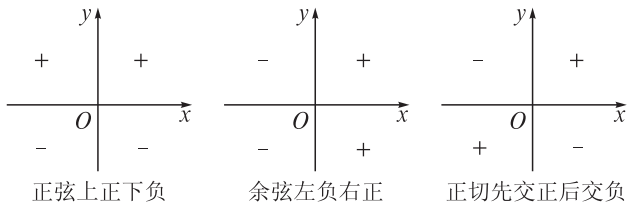


图 1-2-3

问题 2 如何用  $\sin\alpha$  表示  $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ 。

导思：首先对角  $\alpha$  按象限角和轴线角详细分类，然后才能用  $\sin\alpha$  表示  $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$  的值。

探究：见下表 ( $k \in \mathbb{Z}$ )。

| 函数                                       | $\cos\alpha$               | $\tan\alpha$                                  | $\cot\alpha$                                  |
|------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $2k\pi$                                  | 1                          | 0                                             | 不存在                                           |
| $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$         | $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$  | $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$  | $\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$  |
| $2k\pi + \frac{\pi}{2}$                  | 0                          | 不存在                                           | 0                                             |
| $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi)$   | $-\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ | $-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$ | $-\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ |
| $2k\pi + \pi$                            | -1                         | 0                                             | 不存在                                           |
| $(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$  | $-\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ | $-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$ | $-\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ |
| $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$                 | 0                          | 不存在                                           | 0                                             |
| $(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi)$ | $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$  | $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$  | $\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$  |



主广场

### 我夯基 我达标

1 当  $\alpha$  为第二象限角时， $\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha} - \frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}$  的值是... ( )

- A. 1      B. 0      C. 2      D. -2

思路解析：利用三角函数值在各象限的符号，去掉绝对值号。

$\because \alpha$  为第二象限角，

$$\therefore \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \text{故 } \frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha} - \frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

答案：C

2  $a^2 \sin(-1350^\circ) + b^2 \tan 405^\circ - (a-b)^2 \cot 765^\circ - 2ab \cos(-1080^\circ)$  等于 ..... ( )

- A. 0      B. -1      C.  $a^2$       D.  $b^2$

思路解析：利用三角函数诱导公式将任意角的三角函数化为  $0 \sim 2\pi$  间的三角函数，进而求值。即  $a^2 \sin 90^\circ + b^2 \tan 45^\circ - (a-b)^2 \cot 45^\circ - 2ab \cos 0^\circ = a^2 + b^2 - (a-b)^2 - 2ab = 0$ 。

答案：A

3 已知角  $\alpha$  的终边在射线  $y = -3x (x \geq 0)$  上，则  $\sin\alpha \cos\alpha$  等于 ..... ( )

- A.  $-\frac{3}{10}$       B.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$       C.  $\frac{3}{10}$       D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

思路解析：根据三角函数的定义，在终边上取点求值。在  $\alpha$  终边上取一点  $P(1, -3)$ ，此时  $x=1, y=-3$ ，

$$\therefore r = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}. \therefore \sin\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

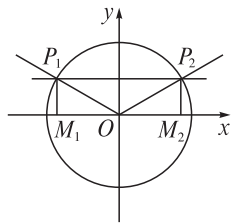
$$\therefore \sin\alpha \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{10}.$$

答案：A

4 在  $[0, 2\pi]$  上满足  $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$  的  $\alpha$  的取值范围是 ( )

- A.  $[0, \frac{\pi}{6}]$       B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$       C.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$       D.  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$

思路解析：如右图所示，利用单位圆解不等式。按“等号”画出适合的角的终边，按“不等号”画出适合的角的终边（或终边与单位圆的交点组成的弧段），按弧段在函数的定义域内写出相应的不等式。



答案：B

5  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  为方程  $2x^2 - mx + 1 = 0$  的两根，则

$$\frac{\sin\theta}{1 - \cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

思路解析：首先对原式化简，然后由根与系数的关系及三角函数基本关系式求出  $m$ ，进而得出结果。

$\because \sin\theta$  和  $\cos\theta$  为方程  $2x^2 - mx + 1 = 0$  的两根，

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{m}{2}, \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}. \therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta +$$

$$2\sin\theta \cos\theta = \frac{m^2}{4}. \therefore 1 = \frac{m^2}{4} - 1. \therefore m = \pm 2\sqrt{2}. \therefore \sin\theta +$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{2}.$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{1 - \cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} =$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \pm\sqrt{2}.$$

答案： $\pm\sqrt{2}$

6  $\sin 2\alpha > 0$  且  $\cos\alpha < 0$ ，试确定  $\alpha$  所在的象限。

思路分析:由  $\sin 2\alpha > 0$  得出  $\alpha$  的范围,再由  $\cos \alpha < 0$  得出  $\alpha$  的范围,两者取交集即可.

解:  $\because \sin 2\alpha > 0, \therefore 2k\pi < 2\alpha < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}), \therefore k\pi < \alpha < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$

当  $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$  时,有  $2n\pi < \alpha < 2n\pi + \frac{\pi}{2} (n \in \mathbf{Z}),$   
 $\therefore \alpha$  在第一象限.

当  $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$  时,有  $2n\pi + \pi < \alpha < 2n\pi + \frac{3\pi}{2} (n \in \mathbf{Z}), \therefore \alpha$  在第三象限.

$\therefore \alpha$  在第一或第三象限.

由  $\cos \alpha < 0$  可知  $\alpha$  在第二或第三象限或  $\alpha$  终边在  $x$  轴的负半轴上.

综上所述,  $\alpha$  在第三象限.

### 我综合我发展

- 7 集合  $M = \{x | \sin |x| = 1\}, N = \{x | |\sin x| = 1\}$ , 则  $M$  与  $N$  之间的关系是 ..... ( )

A.  $M \subset N$  B.  $M \supset N$  C.  $M = N$  D.  $M \cap N = \emptyset$

思路解析:采用淘汰法.

$\sin |x| = 1 \Rightarrow |x| = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x = \pm (2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z}),$

$|\sin x| = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$  从而淘汰 D.

又  $|\sin \frac{3\pi}{2}| = 1, \therefore \frac{3\pi}{2} \in N,$  而  $|\sin \frac{3\pi}{2}| = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$

$\therefore \frac{3\pi}{2} \notin M,$  从而淘汰 B、C.

答案:A

- 8 如图 1-2-4, 已知长方形的四个顶点:  $A(0,0), B(2,0), C(2,1), D(0,1)$ . 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  出发, 沿与  $AB$  夹角为  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$  (入射角等于反射角). 设  $P_4$  的坐标为  $(x_4, 0)$ , 若  $1 < x_4 < 2$ , 则  $\tan \theta$  的范围是 ..... ( )

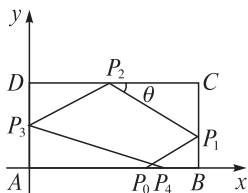


图 1-2-4

- A.  $(\frac{1}{3}, 1)$  B.  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  C.  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$  D.  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

思路解析:我们可以把  $\tan \theta$  表示为  $x_4$  的函数,即得到  $\tan \theta = f(x_4)$ ,再根据  $1 < x_4 < 2$  求解;或得到  $x_4 = f(\tan \theta)$ ,然后根据  $1 < f(\tan \theta) < 2$  解  $\tan \theta$ ;也可用淘汰法.

设  $P_1(2, y_1), P_2(x_2, 1), P_3(0, y_3)$ , 其中  $P_0(1, 0)$ , 根据反射角与入射角相等的关系,得到关系式  $\tan \theta = \frac{y_1}{1}$

$$= \frac{1 - y_1}{2 - x_2} = \frac{1 - y_3}{x_2} = \frac{y_3}{x_4},$$

$$\therefore y_1 = \tan \theta, x_2 = 2 - \frac{1 - y_1}{\tan \theta} = 3 - \frac{1}{\tan \theta},$$

$$y_3 = 1 - x_2 \tan \theta = 2 - 3 \tan \theta,$$

$$x_4 = \frac{y_3}{\tan \theta} = \frac{2 - 3 \tan \theta}{\tan \theta} = \frac{2}{\tan \theta} - 3.$$

$\because \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), x_4 \in (1, 2), \therefore 1 < \frac{2}{\tan \theta} - 3 < 2$ , 解得

$$\frac{2}{5} < \tan \theta < \frac{1}{2}.$$

答案:C

- 9 已知  $\theta$  为锐角,用三角函数定义证明  $1 < \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$ .

思路分析:运用三角函数的定义将三角函数表示为比值,从而将三角问题转化为代数问题而获得解决.

证明:在角  $\theta$  的终边上任取一点  $P(x, y)$  (异于原点), 则

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\because \theta$  为锐角,  $\therefore x > 0, y > 0$ .

$$\text{于是 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$\sqrt{2 - \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{又 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}} > 1.$$

$\therefore 1 < \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}.$

- 10 如图 1-2-5, 某大风车的半径为 2 m, 每 12 秒旋转一周, 它的最低点  $O$  离地面 0.5 m, 风车圆周上一点  $A$  从最低点  $O$  开始, 运动  $t$  秒后与地面的距离为  $h$  m. 你能想个办法, 求  $A$  点距地面的高度  $h$  与转动时间  $t$  之间的关系吗?

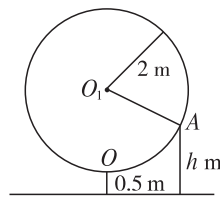


图 1-2-5

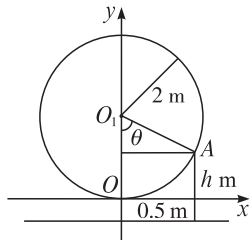
解:如图,以  $O$  为原点,过点  $O$  的切线为  $x$  轴建立平面直角坐标系. 设点  $A$  的坐标为  $(x, y)$ , 则  $h = y + 0.5$ .

设  $\angle OO_1A = \theta$ , 则  $\cos \theta =$

$$\frac{2 - y}{2}, y = -2 \cos \theta + 2.$$

$$\text{又 } \theta = \frac{2\pi}{12} \times t = \frac{t\pi}{6}, \therefore y = -2 \cos \frac{\pi t}{6} + 2.$$

$$\therefore h = -2 \cos \frac{\pi t}{6} + 2.5.$$





### 1.3 三角函数的诱导公式

#### 知识梳理

##### 一、三角函数的对称关系

1. 终边与角  $\alpha$  的终边关于  $x$  轴对称的角可以表示为:

$$2k\pi - \alpha;$$

2. 终边与角  $\alpha$  的终边关于  $y$  轴对称的角可以表示为:

$$2k\pi + \pi - \alpha;$$

3. 终边与角  $\alpha$  的终边关于直线  $y = x$  对称的角可以表示为:

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

##### 二、三角函数的诱导公式

| $x$                                 | $\sin x$       | $\cos x$       | $\tan x$       |
|-------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| $-\alpha$                           | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\tan \alpha$ |
| $\pi - \alpha$                      | $\sin \alpha$  | $-\cos \alpha$ | $-\tan \alpha$ |
| $\pi + \alpha$                      | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\tan \alpha$  |
| $2k\pi - \alpha (k \in \mathbb{Z})$ | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\tan \alpha$ |
| $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ | $\sin \alpha$  | $\cos \alpha$  | $\tan \alpha$  |
| $\frac{\pi}{2} - \alpha$            | $\cos \alpha$  | $\sin \alpha$  | $\cot \alpha$  |
| $\frac{\pi}{2} + \alpha$            | $\cos \alpha$  | $-\sin \alpha$ | $-\cot \alpha$ |

#### 知识导学

要学好本节内容,可先复习终边相同的角同名三角函数值相等的公式;单位圆与三角函数线等.在此基础上创设情境,引入发现结论的条件,促成发现终边与角  $\alpha$  的终边关于原点、 $x$  轴、 $y$  轴和直线  $y = x$  对称的各类角的表示方法,借助单位圆,通过图形观察,由此发现公式二至四,然后概括四组公式,认识它们的作用.结合例题与练习,来熟悉公式,理解并知道任意角的三角函数一定可以等价于转化为  $0$  至  $\frac{\pi}{2}$  内的角的三角函数.对公式五、六的学习可同上安排.突出几何图形对发现结论的影响,即我们是如何从单位圆的对称性与任意角终边的对称性中发现结论的.

形象的诱导公式的记忆口诀:

奇变偶不变,符号看象限.

#### 疑难突破

1. 如何借助单位圆理解角  $\alpha$  与  $-\alpha$  的三角函数间的关系?

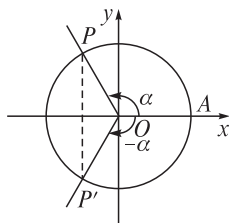


图 1-3-1

剖析:如图 1-3-1,设单位圆与  $\alpha$ 、 $-\alpha$  终边的交点分别为  $P$  和  $P'$ ,则点  $P$  和  $P'$  关于  $x$  轴对称,所以它们的横坐标相等,纵坐标互为相反数,从而可以设  $P(x, y)$ ,  $P'(x, -y)$ .由三角函数定义,有  $\sin \alpha = y$ ,  $\cos \alpha = x$ ,  $\therefore P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ .

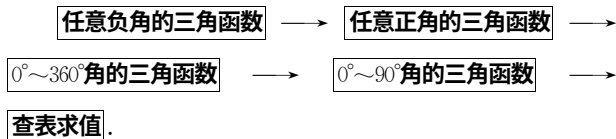
$$\sin(-\alpha) = -y, \cos(-\alpha) = x, \therefore P'[\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)].$$

由  $P$  和  $P'$  坐标关系,得  $\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \end{cases}$  又  $\tan(-\alpha) =$

$$\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

2. 对负角的三角函数值应如何求解,其一般步骤为何?

剖析:一种是化为正角的三角函数值,再用公式化为锐角的三角函数值;另一种是先用公式化为  $n\pi + \alpha (|\alpha| < \frac{\pi}{2})$  的角的三角函数值,再转化为锐角的三角函数值.由此可以得到利用诱导公式求任意角的三角函数值的一般步骤:



3. 诱导公式的作用是什么?诱导公式的规律又是怎样的?

剖析:诱导公式的作用是可以将任意角的三角函数转化为  $0^\circ \sim 90^\circ$  角的三角函数值.

诱导公式的规律为:

(1)  $-\alpha, \pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$  的三角函数值等于  $\alpha$  的同名三角函数值,前面加上一个把  $\alpha$  看成锐角时原

函数值的符号，为了便于记忆，可以说成“函数名不变，符号看象限”。例如： $\sin(180^\circ - 300^\circ) = \sin 300^\circ$ ，把  $300^\circ$  看成一个锐角  $\alpha$ ，则  $180^\circ - 300^\circ = 180^\circ - \alpha$  为锐角，所以  $\sin(180^\circ - 300^\circ)$  的符号为正，即  $\sin 300^\circ$  前面所带符号也为正。

(2)  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的三角函数值，等于  $\alpha$  的余名三角函数值前面加上一个把  $\alpha$  看成锐角的原函数值的符号，记忆口诀为：“函数名改变，符号看象限”。例如： $\cos(90^\circ + 100^\circ) = -\sin 100^\circ$ ，把  $100^\circ$  看成锐角  $\alpha$ ，则  $90^\circ + 100^\circ = 90^\circ + \alpha$  钝角，所以  $\cos(90^\circ + 100^\circ)$  的符号为负，即  $\sin 100^\circ$  前面所带符号为负。

(3) 这两套公式可以归纳为  $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbb{Z})$  的三角函数值。当  $k$  为偶数时，得  $\alpha$  的同名函数值；当  $k$  为奇数时，得  $\alpha$  的余名三角函数值，然后在前面加上一个把  $\alpha$  看成锐角时原函数值的符号，概括为“奇变偶不变，符号看象限”，这里的奇偶指  $k$  的奇偶。

### 典题精讲

**例 1** 已知  $\sin \alpha$  是方程  $6x = 1 - \sqrt{x}$  的根，那么  $\frac{\cos(\alpha - 5\pi) \tan(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cot(\pi - \alpha)}$  的值等于 ..... ( )

- A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{20}$                       B.  $\pm \frac{\sqrt{15}}{15}$   
C.  $-\frac{\sqrt{5}}{20}$                       D.  $\frac{1}{80}$

**思路解析：**先求出方程  $6x = 1 - \sqrt{x}$  的根，即为  $\sin \alpha$  的值，然后对所求式子用诱导公式化简，最后把  $\sin \alpha$  的值代入化简后的式子即可。

由  $6x = 1 - \sqrt{x}$ ，解得  $x = \frac{1}{9}$ ，即  $\sin \alpha = \frac{1}{9}$ 。  

$$\frac{\cos(\alpha - 5\pi) \tan(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cot(\pi - \alpha)} = \frac{(-\cos \alpha)(-\tan \alpha)}{\sin \alpha(-\cot \alpha)} = -\tan \alpha,$$
  
 $\therefore \sin \alpha = \frac{1}{9}, \therefore \alpha$  应为第一或第二象限的角， $\therefore \tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{20}, -\tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{20}$ 。

**答案：**A

**黑色陷阱：**解答此题的容易出错的地方有两处：一是在解方程  $6x = 1 - \sqrt{x}$  时，忽视了  $x$  的定义域，错误地把得到的负值也保留；二是对各诱导公式掌握不熟练，在化简所求关系式的过程中出错。

**变式训练** 化简  $\frac{\cot(\alpha + 4\pi) \cos(\alpha + \pi) \sin^2(\alpha + 3\pi)}{\tan(\alpha + \pi) \cos^3(-\alpha - \pi)}$ 。

**思路分析：**此题先用诱导公式化为  $\alpha$  的三角函数，达到角统一，再切化弦，以保证三角函数名最少。

$$\text{解：原式} = \frac{\cot \alpha (-\cos \alpha) (-\sin \alpha)^2}{\tan \alpha (-\cos \alpha)^3} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin^2 \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha} = 1.$$

**例 2** 已知  $\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求  $\cos(\frac{5\pi}{6} + \alpha) - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6})$  的值。

**思路分析：**注意到  $\frac{\pi}{6} - \alpha + \frac{5\pi}{6} + \alpha = \pi$ ，可以把  $\frac{5\pi}{6} + \alpha$  化成  $\pi - (\frac{\pi}{6} - \alpha)$ ， $\alpha - \frac{\pi}{6} = -(\frac{\pi}{6} - \alpha)$ ，利用诱导公式即可。

$$\begin{aligned} \text{解：} \cos(\frac{5\pi}{6} + \alpha) &= \cos[\pi - (\frac{\pi}{6} - \alpha)] = -\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) &= \sin^2[-(\frac{\pi}{6} - \alpha)] = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{6} - \alpha) = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2}{3}, \\ \therefore \cos(\frac{5\pi}{6} + \alpha) - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

**绿色通道：**此类题目要灵活运用诱导公式，在做题时要注意观察角与角之间的关系，例如  $\frac{5\pi}{6} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{6} - \alpha)$ ，从而利用诱导公式把未知三角函数值用已知三角函数表示出来。

**变式训练** 已知  $\frac{1}{2} \sin(\alpha - \pi) = \cos(\alpha - 2\pi)$ ，求  $\frac{\sin(\pi - \alpha) + 5\cos(2\pi - \alpha)}{3\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \sin(-\alpha)}$  的值。

**思路分析：**对已知式和要求值的式子，都先用诱导公式转化为  $\alpha$  的三角函数值，再用同角三角函数的基本关系进行运算。

$$\begin{aligned} \text{解：由已知，得} -\frac{1}{2} \sin \alpha &= \cos \alpha, \therefore \tan \alpha = -2. \\ \text{原式} &= \frac{\sin \alpha + 5\cos \alpha}{-3\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + 5}{-3 + \tan \alpha} = \frac{-2 + 5}{-3 - 2} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

**例 3** 若  $f(\sin x) = \cos 17x$ ，求  $f(\frac{1}{2})$  的值。

**思路分析：**此类题目是诱导公式与函数之间的一种混合运算，在运算的过程中，要理解函数表达式的意义，灵活运用诱导公式。

$$\text{解：} f(\frac{1}{2}) = f(\sin \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6}$$



$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**绿色通道:** 此类题目在运算过程中要注意选取恰当的角, 在运用诱导公式时, 要注意角的合理拆分. 解答三角函数问题的时候, 除了掌握固定角的三角函数值外, 还要能够把某些数值恰当地转化成某个特殊角的三角函数的形式, 以达到简化问题的目的.

**变式训练**  $f(\cos x) = \cos 17x$ , 求  $f(\sin x)$ .

**思路分析:** 本题中引入抽象函数并结合三角函数的关系设计题目, 在求解过程中我们要明确三角函数的相关诱导公式及抽象函数的性质, 熟悉相关知识是解决本题的关键.

**解:**  $f(\sin x) = f[\cos(90^\circ - x)] = \cos[17(90^\circ - x)]$   
 $= \cos(4 \times 360^\circ + 90^\circ - 17x) = \cos(90^\circ - 17x) = \sin 17x.$

### 问题探究

**问题 1** 比较公式一和公式二, 你能得出什么结论?

**导思:** 由公式一可得到  $\alpha$  与  $\alpha$  加上  $\pi$  的偶数倍的所有三角函数值相等;

由公式二可得到  $\alpha$  与  $\alpha$  加上  $\pi$  的奇数倍的余弦、正弦互为相反数, 而正切值相等.

**探究:** 一般地,  $\alpha$  与  $\alpha + n\pi (n \in \mathbb{Z})$  的三角函数值的关系如下:

$$\sin(\alpha + n\pi) = \begin{cases} -\sin \alpha, & n \text{ 为奇数,} \\ \sin \alpha, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + n\pi) = \begin{cases} -\cos \alpha, & n \text{ 为奇数,} \\ \cos \alpha, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + n\pi) = \tan \alpha.$$

因为任意角都可以化为  $\alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  的形式, 并使  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ . 所以利用课本中公式一、二、三, 可以把任意角的三角函数求值问题转化为  $0$  至  $\frac{\pi}{2}$  之间的角的三角函数求值问题.

**问题 2** 诱导公式六:  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ . 课本中已经给出了推导方法, 你还能用其他的方法推导出这两个公式吗?

**导思:** 思路一: 借助诱导公式五, 实现正弦函数与余弦函数的相互转化, 再借助公式三判断出函数值的符号; 思路二: 借助单位圆, 根据三角函数值去找角的终边, 从而得出公式的推导.

**探究:**  $\because \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (-\alpha),$

$\therefore$  由公式五和公式三有  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

此外, 如果是角  $\alpha$  的终边与单位圆的交点为  $P(x, y)$ , 则  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  的终边与单位圆的交点为  $P_1(y, x)$  (原因是角  $\alpha$  与角  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  的终边关于  $y = x$  对称), 又  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的终边与  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  的终边关于  $y$  轴对称, 所以  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的终边与单位圆的交点为  $P_2(-y, x)$ .

于是有  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -y = -\sin \alpha$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = x = \cos \alpha.$

### 自主广场

#### 我夯基 我达标

1 如果  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , 那么下列等式中成立的是 ... ( )

- A.  $\cos \alpha = \cos \beta$       B.  $\cos \alpha = -\cos \beta$   
 C.  $\sin \alpha = -\sin \beta$       D. 以上都不对

**思路解析:** 利用诱导公式  $\beta = \pi - \alpha$  即可推导.  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta.$

**答案:** B

2  $\sqrt{1 + 2\sin(\pi - 3)\cos(\pi + 3)}$  化简的结果是 ... ( )

- A.  $\sin 3 - \cos 3$   
 B.  $\cos 3 - \sin 3$   
 C.  $\pm(\sin 3 - \cos 3)$   
 D. 以上都不对

**思路解析:** 用诱导公式化简后, 配成完全平方形式.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + 2\sin(\pi - 3)\cos(\pi + 3)} \\ &= \sqrt{1 + 2\sin 3(-\cos 3)} \\ &= \sqrt{1 - 2\sin 3\cos 3} = \sqrt{(\cos 3 - \sin 3)^2} = |\cos 3 - \sin 3|. \end{aligned}$$

$$\because \frac{\pi}{2} < 3 < \pi, \therefore \sin 3 > 0, \cos 3 < 0.$$

$$\therefore \text{原式} = \sin 3 - \cos 3.$$

**答案:** A

3 设  $A, B, C$  是一个三角形的三个内角, 则下列式子中值为常数的有 ( $C \neq \frac{\pi}{2}$ ) ..... ( )

- ①  $\sin(A + B) - \sin C$     ②  $\cos(A + B) + \cos C$   
 ③  $\tan(A + B) + \tan C$     ④  $\cot(A + B) - \cot C$   
 A. 1      B. 2  
 C. 3      D. 4

**思路解析:** 利用三角形内角和定理  $A + B + C = \pi$ , 结合诱导公式即可推导.

$$\therefore A+B+C=\pi, \therefore A+B=\pi-C.$$

$$\therefore \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C, \sin(A+B)-\sin C=0.$$

$$\text{同理 } \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C, \cos(A+B)+\cos C=0;$$

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=\frac{\sin(\pi-C)}{\cos(\pi-C)}=-\tan C,$$

$$\tan(A+B)+\tan C=0;$$

$$\cot(A+B)=\cot(\pi-C)=\frac{\cos(\pi-C)}{\sin(\pi-C)}=-\cot C,$$

$$\cot(A+B)-\cot C=2\cot C.$$

所以结果为常数的有 3 个.

答案:C

4  $\tan 300^\circ + \sin 450^\circ$  的值是 ..... ( )

A.  $1+\sqrt{3}$

B.  $1-\sqrt{3}$

C.  $-1-\sqrt{3}$

D.  $-1+\sqrt{3}$

思路解析:利用诱导公式将角化到锐角范围,由特殊角的三角函数值即可求解.

$$\tan 300^\circ + \sin 450^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) + \sin(360^\circ + 90^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ + \sin 90^\circ = 1 - \sqrt{3}.$$

答案:B

5 设  $f(x) = a\sin(\pi x + \alpha) + b\cos(\pi x + \beta)$ , 其中  $a, b, \alpha, \beta$  都是非零实数, 若  $f(2\ 002) = -1$ , 则  $f(2\ 003) =$  \_\_\_\_\_.

思路解析:用诱导公式寻求  $f(2\ 002)$  和  $f(2\ 003)$  的关系.

$$\begin{aligned} f(2\ 003) &= a\sin(2\ 003\pi + \alpha) + b\cos(2\ 003\pi + \beta) \\ &= a\sin[\pi + (2\ 002\pi + \alpha)] + b\cos[\pi + (2\ 002\pi + \beta)] \\ &= -a\sin(2\ 002\pi + \alpha) - b\cos(2\ 002\pi + \beta) \\ &= -[a\sin(2\ 002\pi + \alpha) + b\cos(2\ 002\pi + \beta)] \\ &= -f(2\ 002) = 1. \end{aligned}$$

答案:1

6 已知  $\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$  ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ), 则

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

思路解析:将已知平方可求  $\sin \alpha \cos \alpha$ , 然后利用  $(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2\sin \alpha \cos \alpha$  求解.

$$\text{易知 } \sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{两边平方,得 } 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{9}, \therefore 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{7}{9}.$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \therefore \sin \alpha > 0 > \cos \alpha.$$

$$\text{故有 } \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$\sqrt{1 + \frac{7}{9}} = \frac{4}{3}.$$

答案:  $\frac{4}{3}$

7  $|\cos \alpha| = \cos(\pi + \alpha)$ , 则角  $\alpha$  的集合为 \_\_\_\_\_.

思路解析:由绝对值的意义确定角  $\alpha$  所在象限,进而写出范围.由已知得:  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ,  $\therefore \alpha$  为第二、三象限角或终边落在  $y$  轴上的角.

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{答案: } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

8 已知  $\sin(\alpha + \beta) = 1$ , 求证:  $\tan(2\alpha + \beta) + \tan \beta = 0$ .

思路分析:由  $\sin(\alpha + \beta) = 1$  出发得到  $\alpha + \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

即  $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta$ . 将其代入被证式的左边,然后利用诱导公式进行化简,直到推得右边.

$$\text{证明: } \therefore \sin(\alpha + \beta) = 1, \therefore \alpha + \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \tan(2\alpha + \beta) + \tan \beta = \tan[2(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta) + \beta] +$$

$$\tan \beta$$

$$= \tan(4k\pi + \pi - 2\beta + \beta) + \tan \beta = \tan(4k\pi + \pi - \beta) +$$

$$\tan \beta$$

$$= \tan(\pi - \beta) + \tan \beta = -\tan \beta + \tan \beta = 0.$$

$$\therefore \tan(2\alpha + \beta) + \tan \beta = 0. \text{ 得证.}$$

9 化简  $\frac{\sin(\theta - 5\pi)}{\cos(3\pi - \theta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\theta - 3\pi)} \cdot \frac{\cos(8\pi - \theta)}{\sin(-\theta - 4\pi)} + \sin(-\theta).$

思路分析:由三角函数诱导公式,结合同角基本关系化简即可.

$$\text{解: } \frac{\sin(\theta - 5\pi)}{\cos(3\pi - \theta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\theta - 3\pi)} \cdot \frac{\cos(8\pi - \theta)}{\sin(-\theta - 4\pi)} + \sin(-\theta)$$

$$= \frac{-\sin(5\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} \cdot \frac{\sin \theta}{-\sin(3\pi - \theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{-\sin(4\pi + \theta)} +$$

$$\sin(-\theta)$$

$$= \frac{-\sin(\pi - \theta)}{-\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{-\sin(\pi - \theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} - \sin \theta$$

$$= \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{-\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} - \sin \theta = 1 - \sin \theta.$$

## 我综合我发展

10 判断函数  $y = A\sin(\frac{15\pi}{2} + \frac{2x}{3})$  ( $A \neq 0$ ) 的奇偶性.

思路分析:先化简,然后利用奇偶性定义作出判断.

$$\text{解: } y = A\sin(\frac{15\pi}{2} + \frac{2x}{3}) = A\sin(6\pi + \frac{3\pi}{2} + \frac{2x}{3}) =$$

$$A\sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{2x}{3})$$