

优化设计 学习之师

(代前言)

我们关注每一个角落每一个人的教育；

我们关注每一个学习的环节与需求。

“志鸿优化”经历 10 年的精心打造，

与广大师生已经建立了足够的心理默契和情感依恋。

生有涯，而学无涯。一个学生纵有三头六臂，也不可能在中小学时代学完一生中应具备的各种知识，但却有可能而且应该掌握获取知识的方法。现代教育认为：上学期间的“学习”，不是为了分数的学习，甚至不是为了知识的学习，而是为了“学会学习”。社会的进步、科技的发展、知识的更新以及信息量的剧增都迫使人们必须进行终身学习，从这个意义上讲，“学会学习”也就成了“学会生存”的同义词。因此，如何抓住方法，开发学生潜在的注意力、观察力、记忆力、形象思维能力、逻辑思维能力以及语言表达能力，已成为当今中国学生素质教育最为紧迫、最为重要的课题之一。

为此，我们一直在探索、研究这一课题的学习模式。“学案式教辅”正是我们的研究成果之一。

“学案”即以“学”为主的教辅方案，它的科学之处在于以学生为本，充分调动学生的学习积极性，发挥学生的主体作用，全面培养学生的学习兴趣，挖掘学生的学习潜能，让学生在主动观察、记忆、思考、表达、探究、求索中学会学习。

依据“学案式教辅”的研究成果，我们推出了《高中同步测控优化设计》丛书，并进行了数次细心精心倾心的打磨和提升，以展示我们的爱心与智慧、品质与品位、思想与理想。

丛书主要展示了三方面的风采：

创设教学模式

传统教辅模式存在“重教轻学”的弊端，栏目设置往往忽视对学生学习积极性的培养，缺乏对学习方法的研究与指导。本丛书力求保留成熟而稳定的“优化设计”风范，在广泛听取一线广大师生的建议，吸纳最新教研成果的基础上，融进了“学案式教辅”的研究成果，全力创设了科学的教育模式及学习模式。

尊重教学规律 同步教学辅导不同于高考综合复习。丛书以指导师生顺利进行教材教学为目标,力求遵照同步教学的客观规律,在体例设置、内容安排、方法应用、能力考查等方面都充分考虑教学的实际,并适度地、战略性地把握高考的内容,由浅入深,循序渐进,步步为营。

符合教学实际 丛书在充分体现“同步”的同时,各学科均配备了课后或章后训练题,在严格把控好题的难度和深度的同时,严格把控好题干、题型、题空、答案和解析,最大程度地符合一线教学实际、满足一线师生需求。此外,“1+1”(1本学生用书+1本教师用书)的人性化设计,为广大师生的教学也提供了极大帮助和有效支撑。

高中,是人生的重要阶段;高考,是改变命运的重要时机。顺利地进入理想的高等学府,是学生的梦想,也是我们的心愿。我们愿与广大师生一起携手共铸人生辉煌!

由于我们水平有限,书中的不足在所难免,敬请您提出宝贵意见,以便我们更好地完善,向广大师生献上更加丰盛的精神大餐。

丛书编委会

第四章 三角函数



学生用书页码

一 任意角的三角函数	1	⇒ (1)
4.1 角的概念的推广	1	⇒ (1)
4.2 弧度制	8	⇒ (6)
4.3 任意角的三角函数	15	⇒ (10)
4.4 同角三角函数的基本关系式	22	⇒ (15)
4.5 正弦、余弦的诱导公式	30	⇒ (20)
任意角的三角函数习题课	37	⇒ (25)
二 两角和与差的三角函数	42	⇒ (28)
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	42	⇒ (28)
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	56	⇒ (37)
两角和与差的三角函数习题课	63	⇒ (41)
三 三角函数的图象和性质	67	⇒ (44)
4.8 正弦函数、余弦函数的图象和性质	67	⇒ (44)
4.9 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	80	⇒ (53)
4.10 正切函数的图象和性质	93	⇒ (62)
4.11 已知三角函数值求角	100	⇒ (66)
三角函数的图象和性质习题课	108	⇒ (71)
本章小结	113	⇒ (74)
科海观潮	120	⇒ (79)

第五章 平面向量

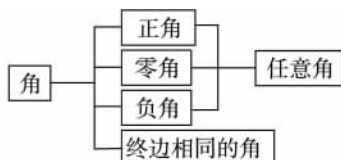
一 向量及其运算	122	⇒ (80)
5.1 向 量	122	⇒ (80)
5.2 向量的加法与减法	126	⇒ (83)
5.3 实数与向量的积	132	⇒ (87)
5.4 平面向量的坐标运算	138	⇒ (92)
5.5 线段的定比分点	144	⇒ (96)
平面向量习题课(一)	148	⇒ (99)
5.6 平面向量的数量积及运算律	152	⇒ (102)
5.7 平面向量数量积的坐标表示	158	⇒ (106)
5.8 平 移	162	⇒ (108)
平面向量习题课(二)	166	⇒ (110)
二 解斜三角形	171	⇒ (113)
5.9 正弦定理、余弦定理	171	⇒ (113)
5.10 解斜三角形应用举例(实习作业)	182	⇒ (120)
研究性学习课题 :向量在物理中的应用	187	⇒ (123)
本章小结	191	⇒ (126)
科海观潮	196	⇒ (130)
期末测试题	197	⇒ (131)

第四章 三角函数

一 任意角的三角函数

4.1 角的概念的推广

第一课时



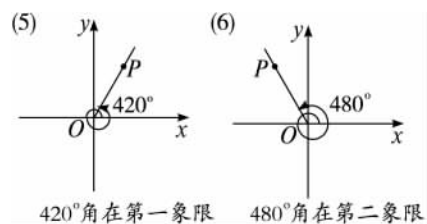
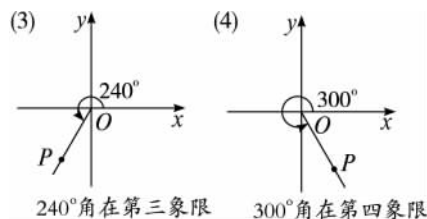
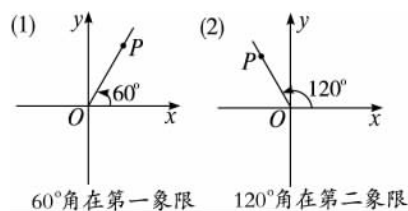
- 1 角是从一点出发的两条射线形成的几何图形,它是由始边、终边、顶点组成.
- 2 角可以看成由一条射线绕其端点旋转而形成的.规定按逆时针方向旋转形成的角叫正角;按顺时针方向旋转形成的角叫负角.如果一条射线没有作任何旋转,称它形成的角叫零角.
- 3 在直角坐标系中讨论角时,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴非负半轴重合,这时角的终边(端点除外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上,则认为此角不在任何象限.



【例1】在直角坐标系中,作出下列各角,并指出它们是第几象限的角.

(1) 60° ; (2) 120° ; (3) 240° ; (4) 300° ; (5) 420° ; (6) 480° .

解析:



点评:通过作图能够更加直观地观察出 120° 、 240° 、 300° 、 420° 、 480° 等角与锐角 60° 之间的关系;也可利用角的形成找出在 0° 到 360° 范围内与任意一个角终边相同的角.

【例2】(1)写出与 -1840° 角终边相同的角的集合M;

(2)把 -1840° 的角写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$)的形式;

(3)若角 $\alpha \in M$,且 $\alpha \in [-360^\circ, 360^\circ]$,求角 α .

解析:(1) $M = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ - 1840^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $-1840^\circ = -6 \times 360^\circ + 320^\circ$.

(3) $\alpha \in M$,且 $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$,
 $-360^\circ \leq k \cdot 360^\circ - 1840^\circ \leq 360^\circ$.

备
课
札
记





$$, 1480^\circ \leq k \cdot 360^\circ \leq 2200^\circ, \frac{37}{9} \leq k \leq \frac{55}{9}.$$

点评 $k \in \mathbb{Z}$, $k=5, 6$. 故 $\alpha = -40^\circ$ 或 $\alpha = 320^\circ$.
在 0° 到 360° 角范围内找与任意一个角终边相同的角时, 可根据实数的带余除法进行. 因为任意一个角 α 均可写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha_1$ ($0^\circ \leq \alpha_1 < 360^\circ$) 的形式, 所以与 α 角终边相同的角的集合也可写成 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha_1, k \in \mathbb{Z}\}$. 如本题 $M = \{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + 320^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 由此确定 $[-360^\circ, 360^\circ]$ 范围内的角时, 只需令 $k = -1$ 和 0 即可.

【例3】求终边落在直线 $y = -x$ 上的角的集合.

解析 终边落在直线 $y = -x$ 上的角分为两种情况:

①若终边落在第二象限的角平分线上时 $\{\alpha | \alpha = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

②若终边落在第四象限的角平分线上时 $\{\beta | \beta = 315^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

综合①②可得终边落在 $y = -x$ 上的角的集合为 $\{\varphi | \varphi = 135^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

点评 在解题过程中注意运用分类讨论的数学思想方法, 并在解题后力求答案最简.

随堂巩固

1. 下列命题中是真命题的是 ()

- A. 小于 90° 的角是锐角
- B. 若 α 是锐角, 则 α 的终边在第一象限
- C. 若角 α 与角 β 的终边相同, 则 $\alpha = \beta$
- D. 若 α 的终边在第一象限, 则 α 是正角

答案 B

2. 在下列各组角中, 终边不相同的一组是.....

..... ()

- A. 60° 与 -300°
- B. 232° 与 952°
- C. 1040° 与 -40°
- D. 1010° 与 70°

解析 考查两角的差是否为 360° 的整数倍, 若不是, 则终边不相同.

答案 D

3. 与 -460° 角终边相同的角可以表示成

()

- A. $460^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- B. $100^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- C. $260^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$

D. $-260^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$

解析: $-460^\circ = -2 \times 360^\circ + 260^\circ$,

, -460° 与 260° 角终边相同.

, 与 -460° 角终边相同的角可表示成 $260^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

答案 C

4. 在 $0^\circ \leq x < 360^\circ$ 中, 与 -510° 的角终边相同的角为 ()

- A. 150°
- B. 210°
- C. 30°
- D. 330°

解析: $-510^\circ = -2 \times 360^\circ + 210^\circ$, 且 $210^\circ \in [0^\circ, 360^\circ)$, 选 B.

答案 B

5. 与 1560° 角终边相同的角的集合中, 最小正角是....., 最大负角是......

解析 $1560^\circ = 120^\circ + 4 \times 360^\circ$,

$1560^\circ = -240^\circ + 5 \times 360^\circ$.

答案 120° - 240°

6. 把 -1485° 化成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z})$ 的形式为......

答案 $315^\circ + (-5) \cdot 360^\circ$

强化训练

1. 下列命题中正确的是 ()

- A. 终边在 y 轴非负半轴上的角是直角
- B. 第二象限角一定是钝角
- C. 第四象限角一定是负角
- D. 若 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 则 α 与 β 终边相同

解析: -270° 角终边在 y 轴非负半轴上, 但不是直角.

-240° 角在第二象限, 但不是钝角.

330° 角在第四象限, 但不是负角.

答案 D

2. 将 -885° 化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z})$ 的形式是 ()

- A. $-165^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$
- B. $195^\circ + (-3) \cdot 360^\circ$
- C. $195^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$
- D. $165^\circ + (-3) \cdot 360^\circ$

解析: $-885^\circ = 195^\circ + (-1080^\circ) = 195^\circ + (-3) \cdot 360^\circ$.

答案 B

3. 在 $360^\circ \sim 1080^\circ$ 之间与 35° 终边相同的角的



个数是 ()

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

解析 $:395^\circ = 35^\circ + 360^\circ$, $755^\circ = 35^\circ + 2 \times 360^\circ$.

答案 B

4 若 α, β 角的终边互为反向延长线, 则有 ()

- A. $\alpha = -\beta$
B. $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$
C. $\alpha = 180^\circ + \beta$
D. $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$

解析 若 $\alpha, \beta \in [0, 360^\circ]$, 有 $\alpha = 180^\circ + \beta$ 或 $\beta = 180^\circ + \alpha$,

$$\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z}).$$

答案 D

5 在 -720° 到 720° 之间与 -1050° 角终边相同的角是_____.

解析: 与 -1050° 终边相同的角可写成

$$\begin{aligned} & -1050^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}), \\ & -720^\circ \leq -1050^\circ + k \cdot 360^\circ \leq 720^\circ, \\ & 330^\circ \leq k \cdot 360^\circ \leq 1770^\circ, \\ & \text{整数 } k \text{ 的值为 } 1, 2, 3, 4. \\ & \text{所求角为 } -690^\circ, -330^\circ, 30^\circ, 390^\circ. \end{aligned}$$

答案: $-690^\circ, -330^\circ, 30^\circ, 390^\circ$

6 当 α 为锐角时, $-\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 在第_____象限, $\alpha + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 在第_____象限.

解析 由 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 得 $-90^\circ < -\alpha < 0^\circ$,
 $-90^\circ + k \cdot 360^\circ < -\alpha + k \cdot 360^\circ < k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$,
 $-\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 在第四象限.

又 $k \cdot 180^\circ < \alpha + k \cdot 180^\circ < 90^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$,

当 k 为偶数, 设 $k=2n (n \in \mathbb{Z})$ 时, 得
 $n \cdot 360^\circ < \alpha + n \cdot 360^\circ < 90^\circ + n \cdot 360^\circ (n \in \mathbb{Z})$;

当 k 为奇数, 设 $k=2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 时, 得
 $n \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha + n \cdot 360^\circ + 180^\circ < 270^\circ + n \cdot 360^\circ (n \in \mathbb{Z})$,
 $\alpha + k \cdot 180^\circ$ 在第一或第三象限.

答案 四 一或三

7 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判断下列各角是哪个象限的角.

(1) $908^\circ 28'$; (2) -734° .

解析: (1) $908^\circ 28' = 188^\circ 28' + 2 \times 360^\circ$, 则

$188^\circ 28'$ 即为所求角, 因为它是第三象限的角, 从而 $908^\circ 28'$ 也是第三象限的角.

(2) $-734^\circ = 346^\circ - 3 \times 360^\circ$, 则 346° 即为所求角, 因为它是第四象限的角, 从而 -734° 也是第四象限的角.

8 在与角 10030° 终边相同的角中, 求满足下列条件的角.

- (1) 最大的负角;
(2) 最小的正角;
(3) $360^\circ \sim 720^\circ$ 的角.

解析: (1) 与 10030° 终边相同的角的一般形式为 $\beta = k \cdot 360^\circ + 10030^\circ (k \in \mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} & \text{由 } -360^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 0^\circ, \text{ 得} \\ & -10390^\circ < k \cdot 360^\circ < -10030^\circ, \\ & \text{解得 } k = -28. \end{aligned}$$

故所求的最大负角为 $\beta = -50^\circ$.

$$\begin{aligned} & (2) \text{ 由 } 0^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 360^\circ, \\ & \text{得 } -10030^\circ < k \cdot 360^\circ < -9670^\circ, \\ & \text{解得 } k = -27. \end{aligned}$$

故所求的最小正角为 $\beta = 310^\circ$.

$$\begin{aligned} & (3) \text{ 由 } 360^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 720^\circ, \\ & \text{得 } -9670^\circ < k \cdot 360^\circ < -9310^\circ, \\ & \text{解得 } k = -26. \end{aligned}$$

故所求的角为 $\beta = 670^\circ$.

9 已知角 α 的终边与 y 轴的正半轴所夹的角为 30° , 且终边落在第二象限, 又 $-720^\circ < \alpha < 0^\circ$. 求 α .

解析: 由题意得 $\alpha = 120^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$,
 又 $-720^\circ < \alpha < 0^\circ$,
 $\alpha = -240^\circ, -600^\circ$.

10 设 $0^\circ < \theta < 360^\circ$, 角 7θ 与角 θ 的终边相同, 求角 θ .

解析: 由角 7θ 与角 θ 的终边相同, 则

$$\begin{aligned} & 7\theta = k \cdot 360^\circ + \theta (k \in \mathbb{Z}), \\ & \theta = k \cdot 60^\circ. \end{aligned}$$

由 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 得

$$0 < k < 6 (k \in \mathbb{Z}).$$

故当 $k=1, 2, 3, 4, 5$ 时, $\theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

本课升华

判断角终边所在位置, 可在直角坐标系中作出所给角, 也可将所给角化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}, 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$ 的形式加以判断, 初步体现了数形结合的思想.

备
课
札
记





备
课
札
记



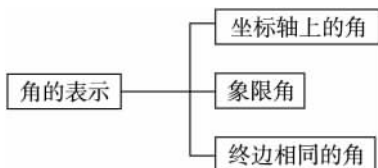
讲与角 α 终边相同的角的一般形式 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ 时,应指出:

- (1) $k \in \mathbb{Z}$;
- (2) α 是任意角;
- (3) 终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同. 终边相同的角有无限多个,它们相差 360° 的整数倍;
- (4) 角 $\alpha + k \cdot 720^\circ$ 与角 α 终边相同,但不能表示与角 α 终边相同的所有角.





第二课时



1. 终边在 x 轴非负半轴上角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ；终边在 x 轴上角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. 若 α 为锐角，则角 α 终边在第一象限，角 $180^\circ - \alpha$ 终边在第二象限，角 $180^\circ + \alpha$ 终边在第三象限，角 $360^\circ - \alpha$ 终边在第四象限.
3. 象限角的集合
 第一象限角的集合为 $\{x | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.
 第二象限角的集合为 $\{x | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.
 第三象限角的集合为 $\{x | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.
 第四象限角的集合为 $\{x | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.



【例1】分别写出：

- (1) 终边落在 y 轴负半轴上的角的集合；
- (2) 终边落在第二象限的角的集合.

解析：(1) 在 0° 到 360° 间满足条件的角是 270° ，故终边落在 y 轴负半轴上的角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 在 0° 到 360° 间满足条件的角为 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

所以第二象限的角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

点评：(1) 终边相同的角是指直角坐标系中，均以 x 轴的非负半轴为始边，并具有同一条终边的角的集合. 熟练写出终边相同的角是重要的基本功. 其方法是在这条终边中找出一个角，然后加上 360° 的整数倍.

(2) 象限角是指终边位置落在第几象限而得名. 这里应注意下面几个问题：

① 例如 $30^\circ, 30^\circ < \alpha < 60^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$ 均是第一象限的角，反之第一象限的角不一定满足上述条件；② 坐标轴上的角不属于任何象限；③ 象限角是特殊的区域角，它的写法是先从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 找出终边，再加上 360° 的整数倍.

【例2】若 α 是第二象限的角，试判断 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$

角各是第几象限的角.

解析： α 是第二象限的角，

$k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

(1) $2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ$,

2α 是第三或第四象限的角，或角的终边在 y 轴的非正半轴上.

(2) $k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$,

当 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$ 时，

$n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$ ；

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbb{Z})$ 时，

$n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$.

$\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.

(3) $k \cdot 120^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 60^\circ$,

当 $k = 3n (n \in \mathbb{Z})$ 时，

$n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 60^\circ$ ；

当 $k = 3n + 1 (n \in \mathbb{Z})$ 时，

$n \cdot 360^\circ + 150^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ$ ；

当 $k = 3n + 2 (n \in \mathbb{Z})$ 时，

$n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 300^\circ$.

备
课
札
记

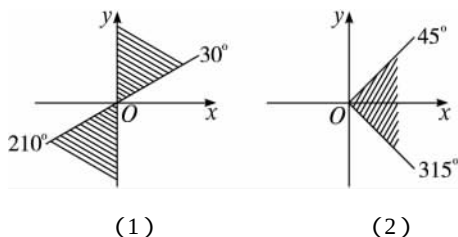




, $\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第四象限的角.

点评: 已知 α 在第几象限, 要确定 $\frac{\alpha}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n > 1$) 所在的象限, 常用的方法是分类讨论, 并且按被 n 除所得的余数 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 分为 n 类.

【例3】写出下图区域所表示的角的集合.



解析: (1) $k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 90^\circ$ 或 $k \cdot 360^\circ + 210^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 270^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,

即 $2k \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq 2k \cdot 180^\circ + 90^\circ$ 或

$(2k+1)180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq (2k+1)180^\circ + 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,

, $n \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 180^\circ + 90^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$.

, 图(1)区域所表示的角 α 的集合为

$\{\alpha | k \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 315° 角与 -45° 角的终边相同,

, $k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

, 图(2)区域所表示的角 β 的集合为

$\{\beta | k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

点评: 区间角集合的表示一般有两种情况: (1) 分别用正角或负角(零角)终边相同的角的集合表示区域的边界; (2) 都用正角(或零角)的终边相同的角的集合表示区域的边界. 如本题(2)中就要注意 315° 角的终边的角的选取. 若选 315° 且 45° 角不变, 则写出的不等式不成立. 写出的集合 $\{\beta | k \cdot 360^\circ + 315^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 为空集. 故应将 315° 角的终边的角写为 -45° (若第一象限的终边写 45° 则第四象限只能写 -45°). 若第四象限的终边写 315° 那么第一象限只能写 405° .

随堂巩固

1. 角 α 的终边经过点 $M(0, -3)$ 则 α

...()

A. 是第三象限角

B. 是第四象限角

C. 既是第三象限角又是第四象限角

D. 不是任何象限的角

解析: 点 M 落在 y 轴的非正半轴上,
角 α 的终边在 y 轴的非正半轴上.
角 α 不是任何象限的角.

答案: D

2. 以下四个命题:

① 大于 90° 的角是钝角; ② 第二象限的角一定是钝角; ③ 第二象限的角必定大于第一象限的角; ④ 负角也可能是第一象限角. 其中, 不正确的命题的个数有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析: ①②③均不正确.

答案: C

3. 若 α 为第一象限角, 则 $180^\circ + \alpha$ 的终边所在的象限是 ()

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

解析: α 为第一象限角,

, $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

, $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 180^\circ + \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,

即 $180^\circ + \alpha$ 的终边在第三象限, 选 C.

答案: C

4. “ α 是第一象限角”是“ 2α 是第二象限角”的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

解析: 若 α 是第一象限角, 即

$k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,

, $2k \cdot 360^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 2α 为第一或第二象限角.

又若 2α 为第二象限角, 即 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < 2\alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,

, $k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

当 k 为偶数时, α 为第一象限角; 当 k 为奇数时, α 为第三象限角.

, 既不是充分条件也不是必要条件.

答案: D

5. 终边在 y 轴的左方的角的集合是

_____.

答案: $\{\alpha | 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

6. 若 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 则 _____ $< \frac{\alpha}{2} <$



若 $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$.

答案 $45^\circ \quad 90^\circ \quad 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

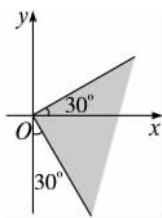
强化训练

1. 对于第四象限角的集合, 下列四种表示中错误的是 ()

- A. $\{\theta | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 B. $\{\theta | k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{\theta | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 D. $\{\theta | k \cdot 360^\circ + 630^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 720^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

答案 C

2. 如图 终边落在阴影处(包括边界)的角的集合为 ()



- A. $\{\alpha | -60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ\}$
 B. $\{\alpha | k \cdot 180^\circ - 60^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ - 60^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
 D. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 60^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

答案 D

3. 若 α, β 的终边相同, 则 $\alpha - \beta$ 的终边在 ()

- A. x 轴上
 B. x 轴的非负半轴上
 C. y 轴上
 D. y 轴的非负半轴上

解析: α 与 β 终边相同,
 $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta$ ($k \in \mathbb{Z}$),
 $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 故 $\alpha - \beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上.

答案 B

4. 已知角 2α 的终边在 x 轴上方, 那么 α 是 ... ()

- A. 第一象限角 B. 第一、二象限角
 C. 第一、三象限角 D. 第一、四象限角

解析: $k \cdot 360^\circ < 2\alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ$,
 $k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ$. 当 $k = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时 α 是第一象限角; 当 $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时 α 是第三象限角.

答案 C

5. 若 α 为第四象限角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是第 象限角.

解析: α 是第四象限角,
 $k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$),
 $-k \cdot 360^\circ < -\alpha < -k \cdot 360^\circ + 90^\circ$,
 $-k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 180^\circ - \alpha < -k \cdot 360^\circ + 270^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 $180^\circ - \alpha$ 是第三象限角.

答案 三

6. 终边在第一或第三象限的角的集合是 _____.

解析 终边在第一或第三象限的角的集合是
 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup$
 $\{\alpha | 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} =$
 $\{\alpha | k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

答案 $\{\alpha | k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

7. 写出下列关于角的集合.

- (1) 锐角;
 (2) 0° 到 90° 的角;
 (3) 第一象限的角;
 (4) 小于 90° 的角.

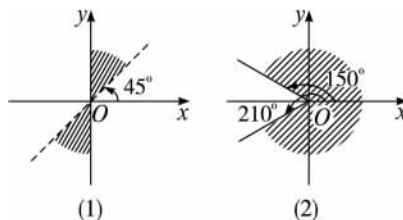
解析 (1) $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$.

(2) $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$.

(3) $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(4) $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$.

8. 写出终边在下列各图中阴影部分的角的集合(虚线表示不含边界, 实线表示含边界).



解析 (1) $\{\alpha | k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $\{\beta | k \cdot 360^\circ - 150^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

9. 如果 α 是第三象限角, 那么 2α 的终边的位

备
课
札
记





置如何? $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角?

解析: α 是第三象限角, $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

, $2k \cdot 360^\circ + 360^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 540^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

, 2α 角的终边在第一、二象限以及 y 轴的正半轴上.

又 $k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

①若 k 为偶数, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角;

②若 k 为奇数, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

综上所述, $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限的角.

10 有一个小于 360° 的正角, 这个角的 6 倍的终边与 x 轴的正半轴重合, 求这个角.

解析: 设所求角为 $\alpha (0^\circ < \alpha < 360^\circ)$, 则

$6\alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = k \cdot 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$. 使 $0^\circ < k \cdot 60^\circ < 360^\circ$, 得 $0 < k < 6$.

, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

, 所求角为 $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

本课升华

角 $\alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$, $\alpha + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 都可化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 的形式, 进而可确定角终边所在的位置.



1. 终边落在 x 轴及 y 轴上角的集合的写法, 可分为在 x 轴的非负半轴、在 x 轴的非正半轴、在 y 轴的非负半轴、在 y 轴的非正半轴及在 x 轴上、在 y 轴上等情况.

2. 用区间表示角的集合有两种情况: ①用正角表示: 比如第一象限角的集合可以表示为 $S = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 即 $(k \cdot 360^\circ, 90^\circ + k \cdot 360^\circ), k \in \mathbb{Z}$; ②用负角表示: 如角的终边落在 $y = \pm x (x \geq 0)$ 所夹区域内的角 (不包含边界) 的集合 $S = \{\alpha | -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 即 $(-45^\circ + k \cdot 360^\circ, 45^\circ + k \cdot 360^\circ), k \in \mathbb{Z}$.

3. 角 α 在第一象限, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限; 角 α 在第二象限, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 应在第一或第三象限. 这是以后使用半角公式确定三角函数值符号的依据, 还要注意二者之间是有区别的.



意犹未尽

领 悟

教授把一只罐子放在讲台上,然后放满了鹅卵石,问同学们:“这只罐子是不是满的?”同学们异口同声地说:“是。”“真的吗?”教授拿出了一些碎石子又装了进去。“现在是不是满的?”同学们不确定地说:“也许没有满吧?”教授笑了,又拿出一些沙子装了进去。“现在有没有满?”同学们毫不犹豫地说:“没有满!”“很好,”教授说道,然后把一杯水倒了进去。我们领悟到学习潜力是可以不断发掘的,这个故事更重要的是告诉我们:如果不把大的鹅卵石先装进去,以后就再也没有机会装进去了。

备课札记

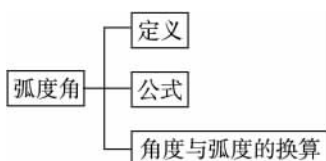




4.2 弧度制

第一课时

自学导引



- 1 我们规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角 ; 把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角 .
- 2 正角的弧度数为 正数 ; 负角的弧度数为 负数 , 零角的弧度数为 0 ; $|\alpha| = \frac{l}{r}$ (其中 α 为圆心角的弧度数) .
- 3 $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.
- 4 分别写出下列各角的弧度数 : $30^\circ = \frac{\pi}{6}$,
 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$,
 $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$.

典题精析

【例1】已知 $\alpha = 15^\circ$, $\beta = \frac{\pi}{10}$, $\gamma = 1$, $\theta = 105^\circ$, $\varphi =$

$\frac{7\pi}{12}$, 试比较 $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$ 的大小 .

解析 : 由于角的单位不同 , 应将角度换成弧度 , 再根据实数的大小来进行比较 .

$$\alpha = 15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} , \theta = 105^\circ = \frac{7\pi}{12} ,$$

$$\frac{7\pi}{12} ,$$

$$\text{显然 } \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{10} < 1 < \frac{7\pi}{12} ,$$

故 $\alpha < \beta < \gamma < \theta = \varphi$.

点评 : (1) 此题也可以将 β, φ 换算成角度后 , 比较大小 .

(2) 角度制与弧度制之间换算的实质是 $180^\circ = \pi$ (弧度) . 但要注意 , 用弧度制表示角时 , “弧度”二字或 “rad” 通常略去不写 .

(3) 特殊角的弧度数 , 在掌握互化方法的前提下 , 熟记下表是很有用的 .

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
度	135°	150°	180°	270°	360°	...
弧度	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	...

【例2】将下列各角化成 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$) 的形式 , 并确定其所在的象限 .

$$(1) \frac{19\pi}{6} ; (2) -\frac{31\pi}{6} .$$

$$\text{解析 : (1) } \frac{19\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6} ,$$

, $\frac{19\pi}{6}$ 与 $\frac{7\pi}{6}$ 的终边相同 .

而 $\frac{7\pi}{6}$ 是第三象限的角 ,

, $\frac{19\pi}{6}$ 是第三象限的角 .

$$(2) -\frac{31\pi}{6} = -6\pi + \frac{5\pi}{6} , -\frac{31\pi}{6} \text{ 与 } \frac{5\pi}{6} \text{ 的}$$

终边相同 ,

, 它是第二象限的角 .

点评 : 用弧度制表示终边相同的角 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时 , 是 π 的偶数倍 , 而不是 π 的整数倍 .

【例3】集合 $A = \{x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2},$

$k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{x \mid 6 + x - x^2 \geq 0\}$, 求 $A \cap B$.

解析 : 因为 $6 + x - x^2 \geq 0$, 即 $x^2 - x - 6 \leq 0$,



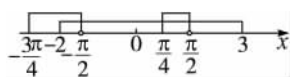
可得 $-2 \leq x \leq 3$.

对 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ 取 $k=0$ 有

$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$, 取 $k=-1$, 有 $-\frac{3\pi}{4} \leq x <$

$-\frac{\pi}{2}$, 当 k 取其他值时, $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2})$

与 $[-2, 3]$ 没有公共元素.



故由图可得 $A \cap B = \{x | -2 \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ 或}$

$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\}$.

点评: 引入弧度制后, 就使得“角度”与“实数”之间建立了一一对应关系, 这使得角度具有了实数的属性.

随堂巩固

1. 下列各式中正确的是 ()

A. $\pi = 180$ B. $\pi = 3.14$

C. $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ D. $1 \text{ rad} = \pi$

答案 C

2. 一条弦的长等于半径, 则这条弦所对劣弧的圆周角的弧度数为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

答案 D

3. $\frac{16\pi}{3}$ 化为 $\alpha + 2k\pi$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) 的形式是

..... ()

A. $\frac{16\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 5\pi$ B. $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi$

C. $\frac{16\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 6\pi$ D. $\frac{16\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} + 3\pi$

解析 符合要求的形式是 $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi$.

答案 B

4. $M = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha | -\pi < \alpha \leq \pi\}$ 则 $M \cap N$ 为 ()

A. $\{-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\}$

B. $\{-\frac{7\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}\}$

C. $\{-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, -\frac{7\pi}{10}\}$

D. $\{\frac{3\pi}{10}, -\frac{7\pi}{10}\}$

解析: $\alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, -\pi < \alpha \leq \pi,$

$-\pi < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \leq \pi, k \in \mathbb{Z}.$

解得 $k = -1, 0, 1, 2,$

即 $M \cap N = \{-\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}\}.$

答案 C

5. 在下列表格中填上相应的角度或弧度数.

角度	0°	45°	60°	90°	135°	150°	180°		
弧度	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{5\pi}{12}$				$\frac{3\pi}{2}$	2π

答案 角度 30° 75° 270° 360°

弧度 0 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ π

6. 若 $4\pi < \alpha < 6\pi$, 且与 $\frac{4\pi}{3}$ 的终边相同, 则 $\alpha =$

解析: 由 $4\pi < 2k\pi + \frac{4\pi}{3} < 6\pi, k \in \mathbb{Z}$, 知 $\frac{4}{3} <$

$k < \frac{7}{3}$, $k=2$. 故 $\alpha = 2 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}.$

答案 $\frac{16\pi}{3}$

强化训练

1. $\frac{5\pi}{12}$ 的角度数为 ()

A. 30° B. 60°

C. 75° D. 105°

解析 $\frac{5\pi}{12} = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$, 选 C.

答案 C

2. 下列各对角中终边相同的角是 ... ()

A. $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $-\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{22\pi}{3}$

C. $-\frac{7\pi}{9}$ 和 $\frac{11\pi}{9}$

D. $\frac{20\pi}{3}$ 和 $\frac{122\pi}{9}$

解析 $\frac{11\pi}{9} - (-\frac{7\pi}{9}) = 2\pi.$

答案 C

备
课
札
记





3. 若 $\alpha = -4.71$ 则 α 是 ()

- A. 第一象限的角 B. 第二象限的角
C. 第三象限的角 D. 第四象限的角

解析 $\alpha = -4.71 = -2\pi + (2\pi - 4.71)$.

$2\pi - 4.71$ 为第二象限角 故选 B.

答案 B

4. 若 $\alpha = 2k\pi - \frac{35}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$ 则角 α 所在象限是

..... ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

解析: $-9 < -\frac{35}{4} < -8$, $-3\pi < -\frac{35}{4} <$

$-3\pi + \frac{\pi}{2}$, $-\frac{35}{4}$ 在第三象限. 故 α 也在第三象限.

答案 C

5. (用弧度制表示) 第一象限角的集合为

..... 第一或第三象限角的集合为

解析 第一象限角的集合为

$$\{\alpha | 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

第一或第三象限角的集合为

$$\{\alpha | 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \pi$$

$$+ 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | k\pi < \alpha <$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{答案 } \{\alpha | 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{\alpha | k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

6. 和 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的角的集合中, 最大的负角是

解析 令 $\alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$ $2k\pi + \frac{3\pi}{4} < 0$,

$k < -\frac{3}{8}$ $k \in \mathbb{Z}$, $k = -1$ 时, 可得最大负

$$\text{角 } \alpha = -2\pi + \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{答案 } -\frac{5\pi}{4}$$

7. 已知 $\alpha = 1690^\circ$,

(1) 把 α 表示成 $2k\pi + \beta$ 的形式 ($k \in \mathbb{Z}$ $\beta \in [0, 2\pi)$);

(2) 求 θ 使 θ 与 α 终边相同且 $\theta \in (-4\pi, -2\pi)$.

解析 (1) $\alpha = 1690^\circ = 1690 \times \frac{\pi}{180} = \frac{169\pi}{18} =$

$$8\pi + \frac{25\pi}{18}, \text{ 所以 } \alpha = 4 \times 2\pi + \frac{25\pi}{18}.$$

(2) 依题意有 $\theta = 2k\pi + \frac{25\pi}{18}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 由

$\theta \in (-4\pi, -2\pi)$ 得

$$-4\pi < 2k\pi + \frac{25\pi}{18} < -2\pi,$$

又 $k \in \mathbb{Z}$ 所以 $k = -2$.

$$\text{所以 } \theta = -4\pi + \frac{25\pi}{18} = -\frac{47\pi}{18}.$$

8. 已知四边形的四个内角之比是 1:3:5:6 分

别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

解析一 设该四边形的四个内角分别为 α ,

$3\alpha, 5\alpha, 6\alpha$ 则有 $\alpha + 3\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 360^\circ$,

得 $\alpha = 24^\circ$.

, 这四个内角的大小分别为 $24^\circ, 72^\circ,$

$120^\circ, 144^\circ$.

分别把它们化为弧度, 为 $\frac{2\pi}{15}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3},$

$$\frac{4\pi}{5}.$$

解析二 设该四边形的四个内角分别为 α ,

$3\alpha, 5\alpha, 6\alpha$, 由于四边形的内角和为 $360^\circ =$

2π 弧度 则有

$$\alpha + 3\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 2\pi,$$

$$15\alpha = 2\pi.$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{2\pi}{15}.$$

$$\text{, 四个内角分别为 } \frac{2\pi}{15}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}.$$

再化为角度分别是 $24^\circ, 72^\circ, 120^\circ,$

144° .

9. 若 θ 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同, 在 $[0, 2\pi)$

内哪些角的终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同?

解析 设 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 则 $\frac{\theta}{3} = \frac{2k\pi}{3} +$

$$\frac{\pi}{9} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{令 } 0 \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} < 2\pi \text{ 得}$$

$$-\frac{1}{6} \leq k < 2\frac{5}{6},$$

$$k = 0, 1, 2.$$

$$\text{把 } k = 0, 1, 2 \text{ 代入 } \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \text{ 得 } \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9},$$

$$\frac{13\pi}{9}.$$

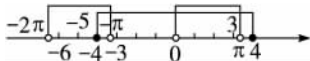


故与 $\frac{\theta}{3}$ 终边相同的角为 $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$.

10. 已知集合 $A = \{\alpha | 2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$, 求 $A \cap B$.

解析: $A = \{\alpha | 0 < \alpha < \pi\} \cup \{\alpha | 2\pi < \alpha < 3\pi\} \cup \{\alpha | -2\pi < \alpha < -\pi\} \dots$,

在数轴上表示是无数个区间 如图所示.



, $A \cap B = \{\alpha | -4 \leq \alpha < -\pi \text{ 或 } 0 < \alpha <$

$\pi\}$.

本课升华

掌握弧度的概念、角度和弧度的换算公式以及在 $[0, 2\pi)$ 范围内找与已知角终边相同角的方法.

既然角度和弧度可以互化, 凡是前面用角度表示的角和角的集合, 都可以转化为用弧度表示. 要逐步养成用弧度表示角的习惯.

教学建议

教学中应注意以下几点:

1. 理清角度、角度制、1 弧度、弧度、弧度制,

1 弧度的角的概念.

2. 对于角度数和弧度数的换算应熟练掌握.

$180^\circ = \pi$ 弧度,

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度,

1 弧度 $= (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$.

3. 角度制与弧度制的比较

(1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度, 角度制是以“度”为单位度量角的制度.

(2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小, 而 1° 是圆周的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小.

(3) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

(4) 用弧度为单位表示角的大小时, “弧度”两字可以省略不写, 这时弧度数在形式上虽是一个无名数, 但我们应当把它理解为名数. 如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2 \text{ 弧度})$, $\pi = 180^\circ$ 是指 $\pi \text{ 弧度} = 180^\circ$; 但如果以度($^\circ$)为单位表示角时, 度($^\circ$)就不能省去.

(5) 用弧度为单位表示角时, 常常把弧度数写成多少 π 的形式, 如无特殊要求, 不必把 π 写成小数. 如 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ 弧度, 不必写成 $45^\circ \approx 0.785$ 弧度.

备
课
札
记

第二课时

自学导引

公式

弧长公式

扇形面积公式

1. 弧度制下的弧长公式为 $l = r|\alpha|$, 扇形面积公式为 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}r^2|\alpha|$.

2. 角度制下的弧长公式为 $l = \frac{n\pi r}{180}$, 扇形面积公式为 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$.

典题精析

【例1】若扇形 OAB 的面积是 1 cm^2 , 它的周长是 4 cm , 求扇形圆心角的弧度数.

解析: 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 由已知条件可知

$$\begin{cases} \frac{1}{2}lR = 1, \\ 2R + l = 4. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} l = 2, \\ R = 1. \end{cases}$$

, 扇形圆心角的弧度数为 $\frac{l}{R} = 2$.

点评: 确定扇形的条件有两个, 最直接的条件是给出扇形的半径、弧长和圆心角其中的两个.

【例2】已知扇形的周长为 20 cm , 当扇形的中心

