

目录

contents

第一章 三角函数	1	§ 3 从速度的倍数到数乘向量	44
§ 1 周期现象	2	§ 4 平面向量的坐标	48
§ 2 角的概念的推广	2	§ 5 从力做的功到向量的数量积	52
§ 3 弧度制	6	§ 6 平面向量数量积的坐标表示	56
§ 4 正弦函数	9	§ 7 向量应用举例	60
§ 5 余弦函数	15	本章测评	64
§ 6 正切函数	19	第三章 三角恒等变形	67
§ 7 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	24	§ 1 两角和与差的三角函数	68
§ 8 同角三角函数的基本关系	30	§ 2 二倍角的三角函数	73
本章测评	34	§ 3 三角函数的简单应用	80
第二章 平面向量	37	本章测评	83
§ 1 从位移、速度、力到向量	38	模块综合测评	86
§ 2 从位移的合成到向量的加法	40	参考答案	89

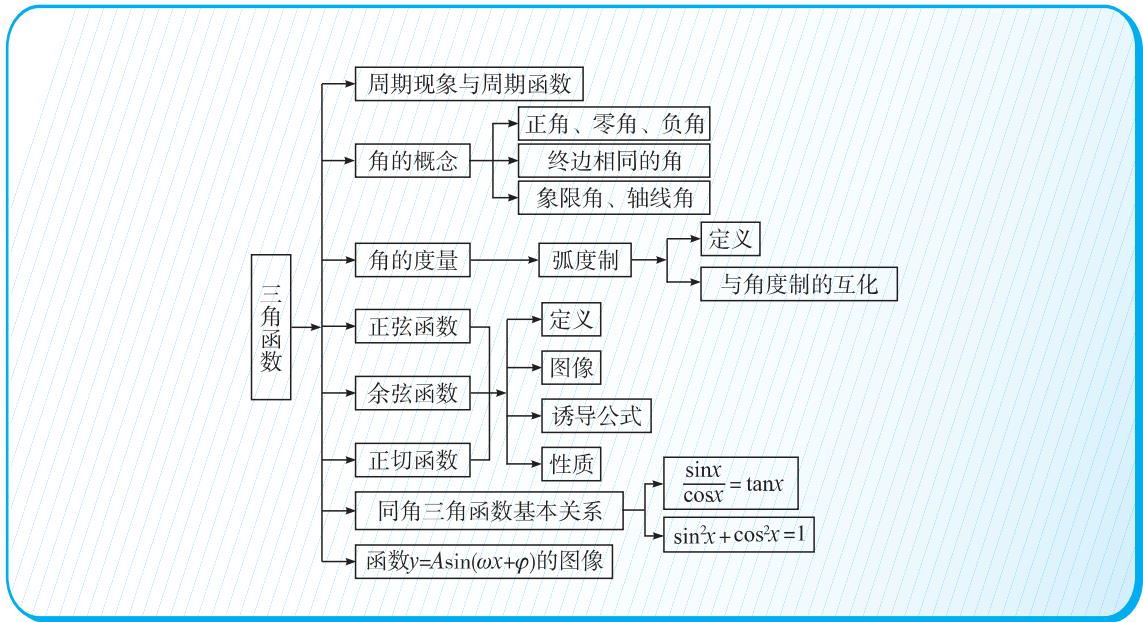
第一章 三角函数



三维目标

1. 理解任意角的概念,掌握弧度制,能进行弧度和角度的互化,探索终边相同的角的表示方法,以便提高用数学的观点分析、解决问题的能力.
2. 理解任意角的正弦、余弦、正切的定义;了解任意角的余切、正割、余割的定义,能够借助单位圆中的有向线段表示正弦、余弦和正切,培养用几何方法解决代数问题即数形结合的思想.
3. 探索并得到同角三角函数的基本关系式和诱导公式,并能熟练应用以便揭示知识之间普遍联系的规律,树立辩证唯物主义思想.
4. 探究正弦、余弦和正切函数的图像和性质,理解周期函数与最小正周期的意义,知道三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型,提高数学的应用能力.
5. 结合具体实例,认识正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义,知道 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中参数 A, ω, φ 对函数图像变化的影响和它们的物理意义,模仿使用“五点法”“变换法”画三角函数的简图,从而培养从特殊到一般,从具体到抽象的思维方法,实现从感性认识到理性认识的飞跃.
6. 探讨用三角函数解决简单的实际问题,发展数学应用意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模型进行思考和判断,以便进一步提高应用数学知识分析和解决实际问题的能力,增加学习数学的兴趣.

知识网络



§1 周期现象

§2 角的概念的推广

知识梳理

1. 周期现象

某种动作或现象每隔“一段”就会_____出现,这种现象被称为周期现象.

2. 任意角

(1) 角的定义

①静态定义:具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角,这个公共端点叫做角的_____,这两条射线叫做角的_____.

②动态定义:一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形,所旋转射线的端点叫做顶点,开始位置的射线叫做角的_____,终止位置的射线叫做角的_____.

(2)在平面内,一条射线绕它的端点旋转时,有顺时针和逆时针两个相反的方向.习惯上规定:按照逆时针方向旋转而成的角叫做_____;按照_____时针方向旋转而成的角叫做负角;当射线没有旋转时,也把它看成一个角,称为零角;旋转生成的角又常称为转角.这样就形成了任意大小的角,即任意角.

(3) 角的记法

用_____个希腊字母;用_____个大写的英文字母表示(字母前面要写“ $\angle$ ”).

(4) 角的分类

按旋转方向分为_____;

按终边所在位置分为_____.

3. 象限角、轴线角

(1)定义:将角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么就把角放在了平面直角坐标系中.如果角的终边(除原点外)在第几象限,则就说这个角是第几象限角;如果角的终边落在_____,则这个角不属于任何象限,称之为轴线角(或称为象限界角).

(2) 表示方法

第一象限角的集合:_____;

第二象限角的集合:_____;

第三象限角的集合:_____;

第四象限角的集合:_____;

终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合:_____;

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合:_____;

终边落在 x 轴上的角的集合:_____;

终边落在 y 轴的非负半轴上的角的集合:_____;

终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合:_____;

终边落在 y 轴上的角的集合:_____;

终边落在坐标轴上的角的集合:_____;

象限角与轴线角的表示形式并不唯一,还有其他的表示形式,如终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合也可表示为 $\{x|x=k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. 终边相同的角

(1)研究终边相同的角的前提条件:角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

(2)所有与 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合:_____,即任一个与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

知识导学

- 结合课本实例,理解生活中的“周而复始”“来回反复”等周期现象.
- 复习初中学习过的角的定义、特点、范围.
- 在学习过程中一定要用任意角的观点看待问题,防止“穿新鞋走老路”,虽然学了任意角,还是以锐角、直角、钝角来考虑问题.

疑难突破

1. 当角 α 与角 β 的终边相同时, α 与 β 相等吗?为什么与角 α 终边相同的角的集合可以写成 $S = \{\beta|\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$?

剖析 角的定义有两种:静态定义和动态定义.受思维定势的影响,往往会先想到用角的静态定义来考虑这个问题,那样就会陷入迷茫.其突破的途径是用角的动态定义来分析.

若 α, β 的终边相同,则它们的关系为:将角 α 终边旋转(逆时针或顺时针) $k(k \in \mathbb{Z})$ 周即得 β ,所以 α, β 的数量关系为 $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha(k \in \mathbb{Z})$,即 α, β 的大小相差 360° 的整数 k 倍,所以 α 与 β 不一定相等.

例如 β 与 30° 角的终边相同,但是 β 不一定等于 30° .

将 30° 的终边按逆时针旋转1周即得角 $\beta = 1 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$,按逆时针旋转2周即得角 $\beta = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ = 750^\circ, \dots$,所以 $390^\circ, 750^\circ, \dots$ 都与 30° 的终边相同.

将 30° 的终边按顺时针旋转 1 周即得角 $\beta = (-1) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -330^\circ$, 按顺时针旋转 2 周即得角 $\beta = (-2) \cdot 360^\circ + 30^\circ = -690^\circ, \dots$, 所以 $-330^\circ, -690^\circ, \dots$ 都与 30° 角的终边相同.

由以上可看出 β 与 30° 角的终边相同, 但是 β 不一定等于 30° , 它们的数量关系是 $\beta = k \cdot 360^\circ + 30^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

因此所有与角 α 终边相同的角, 连同角 α 在内, 可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 即任一与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

理解集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 要注意以下几点:

(1) 式中角 α 为任意角, 它说明终边相同的角有无数个, 它们相差 360° 的整数倍;

(2) $k \in \mathbb{Z}$ 这一条件必不可少;

(3) $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”, 如 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$ 应看成 $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$, 即与 -30° 终边相同的角;

(4) 终边相同的角不一定相等, 但是相等的角, 终边一定相同;

(5) 终边相同的角有无数个, 它们相差 360° 的整数倍. 在求终边相同的角的问题中关键是找到一个与其终边相同的某一角 (一般找 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角), 然后用集合和符号语言表示出来.

2. 第一象限角、小于 90° 的角、 $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角、锐角这四类角有什么区别?

剖析 受初中所学角的影响, 看到这四种角, 往往就说它们相同. 其原因是虽然已经将角扩充到了任意角, 但是解决问题时, 考虑的角还是仅仅停留在锐角、直角、钝角, 即初中所学角的范围上, 没有按任意角来看待. 其突破方法是把握住各自的取值范围.

这四种角的范围用集合表示, 分别是: 锐角: $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$, $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角: $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$, 小于 90° 的角: $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$, 第一象限角是 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 所以锐角一定是第一象限角, 而第一象限角不都是锐角, 小于 90° 的角包括锐角、零角、负角. 如果用弧度制表示角, 角的表示形式变为实数, 其大小关系会更加明显.

典题精讲

例 1 走路时, 我们的手臂自然地随步伐周期性摆动, 那么, 手臂的周期摆动满足什么规律呢?

思路分析 由于每隔一定时间, 手臂来回摆动, 此现象是周期现象.

答案 如图 1-(1.2)-1, 以 ON 代表手臂的垂直位置, 当手臂摆动到 OP 位置, 设 $\theta = \angle PON$ 为摆动的幅角, 而 y 为 P 点离开直线 ON 的水平距离, r 为手臂的长度. 根据初中平面几何知识可知 $y = r \sin \theta$.

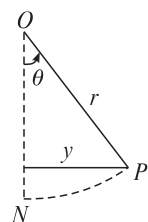


图 1-(1.2)-1

绿色通道 如果一个现象每隔相同的一段, 总是来回重复出现, 那么这个现象是周期现象, 就可以用周期函数来刻画.

变式训练 “春去春又回”是周期现象吗? 若是, 请说出其周期.

思路分析 每隔一年, 春天就重复一次, 因此“春去春又回”是周期现象. 设春天是否到来为变量 y, 时间为 t, 则 y 是 t 的周期函数, 一年是一个周期, 也是最小正周期.

答案 “春去春又回”是周期现象, 周期为一年.

例 2 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间, 求出与下列各角终边相同的角, 并判定下列各角是哪个象限的角.

(1) $908^\circ 28'$; (2) -734° .

思路分析 将题中角化成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ 的形式即可.

解 (1) $908^\circ 28' = 188^\circ 28' + 2 \times 360^\circ$, 则 $188^\circ 28'$ 即为所求的角, 因为它是第三象限角, 从而 $908^\circ 28'$ 也是第三象限角.

(2) $-734^\circ = 346^\circ - 3 \times 360^\circ$, 则 346° 即为所求的角, 因为它是第四象限角, 从而 -734° 也是第四象限角.

绿色通道 一般地, 化角 β 为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 时, 可由 β 除以 360° 来确定 k 及 α 的值, 对不合要求的 α 可以通过修正 k 来进一步求解.

变式训练 在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间, 写出与 60° 角终边相同的角的集合 S.

思路分析 先写出所有与 60° 角终边相同的角, 然后确定在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间的角.

解 与 60° 终边相同的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 令 $-720^\circ \leq 60^\circ + k \cdot 360^\circ \leq 720^\circ$, 得 $k = -2, -1, 0, 1$. 相应的角为 $-660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ$, 从而 $S = \{-660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ\}$.

例 3 在角的集合 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 中,

(1) 有几类终边不相同的角?

(2) 有几个属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 内的角?

思路分析 从代数角度看, 取 $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 可以得 α 为 $\dots, -135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \dots$,

从图形角度可以看成是以 45° 角为基础，依次加上 90° 的整数倍，即依次按顺时针方向或逆时针方向旋转 90° ，如图 1-(1 2)-2 所示。

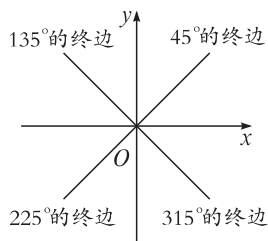


图 1-(1 2)-2

解 (1) 在给定的角的集合中终边不相同的角共有四类。

(2) 由 $-360^\circ < k \cdot 90^\circ + 45^\circ < 360^\circ$ ，得 $-\frac{9}{2} < k < \frac{7}{2}$ ，

又 $k \in \mathbb{Z}$ ，故 $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 。

所以在给定的角的集合中属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 的角共有 8 个。

绿色通道 把代数计算与对图形的认识结合起来，会使这类问题处理起来更容易些，在数学学习中，数形结合是解决问题的最重要的方法之一，做题时要注意自觉地应用。

变式训练 求终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合。

思路分析 先写出 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内终边在直线 $y = -x$ 上的角，再根据终边相同的角写出集合。

解 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内满足条件的角为 135° 和 315° ，终边在直线 $y = -x$ 上的角的集合为

$$\begin{aligned} & \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 135^\circ, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

问题探究

问题 1 根据 α 的象限，思考 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的象限 ($n > 1, n \in \mathbb{N}^*$)。

导思 解决这类问题有两种办法：不等式法和八卦图法。

探究 方法一（不等式法）：下面以 α 为第一象限的角，确定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限为例。

α 是第一象限角，
， α 可以表示为 $k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 。

$$, k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 45^\circ.$$

当 α 为偶数时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；当 k 为奇数时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角。

即当 α 是第一象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角；

同理可得当 α 为其他象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限：

当 α 是第二象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角；

当 α 是第三象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角；

当 α 是第四象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角。

方法二（八卦图法）：以确定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限为例。

如图 1-(1 2)-3 所示，作出各个象限的平分线，它们与坐标轴把周角等分成 8 个区域，从 x 轴的正半轴起，按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4，则标号是几的两个区域，就说明 α 第几象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 终边落在的区域，于是 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限可以直观看出来，这种方法称为八卦图法，它的优点是直观形象，特别是它还能清晰地显现 $\frac{\alpha}{2}$ 的更具体范围。

由图 1-(1 2)-3 可得

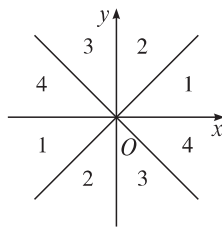


图 1-(1 2)-3

当 α 是第一象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角；

当 α 是第二象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角；

当 α 是第三象限角时， $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角；

当 α 是第四象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角.

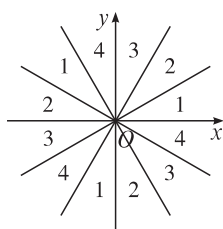


图 1-(1 2)-4

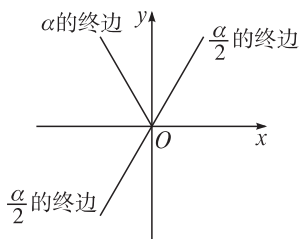


图 1-(1 2)-5

以上两种方法还适用于确定 $\frac{\alpha}{3}$ 、 $\frac{\alpha}{4}$ 、...、 $\frac{\alpha}{n}$ 的终边所在象限. 如图 1-(1 2)-4 是用八卦图法确定 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在象限. 作出三等分各个象限的从原点出发的射线, 它们与坐标轴把周角等分成 12 个区域. 从 x 轴的非负半轴起, 按逆时针方向把这 12 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4, 则标号是几的区域, 就是 α 为第几象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 终边落在的区域. 而 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限就可根据图形直观地看出来. 一般地, 要确定 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的象限, 就需要 n 等分每个象限.

对于 $\frac{\alpha}{2}$ 还有如下的简便作法: 首先在直角坐标系中画出 α 的终边, 然后将其与 x 轴正半轴所成的两个角分别平分, 平分线所在象限即 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在象限. 如图 1-(1 2)-5 所示, α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一、三象限. 这种方法称为直接平分法.

问题 2 α 、 β 的终边关于坐标轴、原点对称, α 、 β 的大小有何关系?

导思 这类题目的解决策略是由特殊到一般, 先将 α 、 β 的范围限制在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内, 再推广到任意角.

探究 在平面直角坐标系中, 画出终边关于 y 轴对称的 α 、 β , 以终边所代表的最小正角为例, 可得 $\alpha + \beta = 180^\circ$ 或 $\alpha + \beta = 360^\circ + 180^\circ$, 推广到任意角有 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, 即终边关于 y 轴对称的 α 、 β 的大小关系为 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

同理可得:

当 α 、 β 的终边关于 x 轴对称时, 则 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$;

当 α 、 β 的终边关于坐标原点对称时, 则 $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$;

当 α 、 β 的终边互相垂直时, 则 $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

自主广场

我夯基 我达标

- 1 时针走过 2 小时 40 分, 则分针转过的角度是 ()
A. 80° B. -80° C. 960° D. -960°
- 2 给出下列四个命题: ① -15° 是第四象限的角; ② 185° 是第三象限的角; ③ 475° 是第二象限的角; ④ -350° 是第一象限的角. 其中正确命题的个数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 3 与 -457° 角终边相同的角的集合是 ()
A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- 4 集合 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{-36^\circ, 54^\circ\}$
B. $\{-126^\circ, 144^\circ\}$
C. $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$
D. $\{-126^\circ, 54^\circ\}$
- 5 如果 α 与 $x + 45^\circ$ 具有相同的终边, 角 β 与 $x - 45^\circ$ 具有相同的终边, 那么 α 与 β 间的关系是 ()
A. $\alpha + \beta = 0$
B. $\alpha - \beta = 0$
C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
D. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- 6 **2005 全国高考卷 III 理 1** 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()
A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第一或第三象限 D. 第二或第四象限
- 7 已知 $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$, 7α 的终边又与 α 的终边重合, 求满足条件的角 α 的集合.

- 8 今天是星期一, 158 天后那一天是星期几?

我综合我发展

- 9 若 α 是第一象限的角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是第 _____ 象限的角.
- 10 设两个集合 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ - 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 试求 M, N 之间的关系.

- 11 若 θ 角的终边与 168° 角的终边相同, 求在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

§ 3 弧度制

知识梳理

1. 弧度制

(1) 定义: 以 _____ 为单位度量角大小的制度叫弧度制.

(2) 度量方法: 长度等于 _____ 的圆弧所对的圆心角的大小叫做 1 弧度的角.

(3) 记法: 弧度单位用符号“_____”表示, 或用弧度两个字表示. 在用弧度制表示角的大小时, 通常单位省略不写.

2. 弧度制与角度制的换算

(1) 换算公式 $1 \text{ rad} = (\quad)^\circ$, $1^\circ = \quad \text{rad}$.

(2) 特殊角的弧度数

角度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	_____	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	_____	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

角度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	π	_____	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	_____	$\frac{11\pi}{6}$	2π

3. 弧度制下的公式

如图 1-3-1 所示, l, r, α 分别是弧长、半径、弧所对的圆心角的弧度数.

(1) 弧度数公式: $|\alpha| = \quad$;

(2) 弧长公式 $l = \quad$;

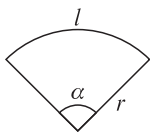


图 1-3-1

(3) 扇形面积公式 $S = \quad = \frac{1}{2} |\alpha| r^2$.

知识导学

学习过程中一定要努力突破单一按角度制思考问题的习惯, 力求能通过弧度来认识任意角. 要实现这一目标, 可以多做角度与弧度的互化练习, 熟记常用特殊角的弧度数.

疑难突破

1. 为什么 $\beta = k \cdot 360^\circ + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 这种写法是错误的?

剖析: 很多同学这样写, 但是并不认为是错误的写法, 并且屡错屡犯, 很难改正. 突破口是正确认识角度制和弧度制.

弧度制和角度制一样, 都是度量角大小的方法, 只是单位不同. 在同一道题目中, 用了弧度制后, 就不能再用角度制; 同样, 用了角度制后, 也不能再用弧度制, 即角度制和弧度制不能混用. 就像长度单位米和千米一样, 不能写出 1 米 + 1 千米这样的式子, 容易引起混乱. 如同人的穿着打扮全身要上下协调一样, 这样写 $\beta = k \cdot 360^\circ + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 就像一个人上身穿着羽绒服, 脚上穿着凉鞋一样, 这种打扮显然是不合适的. 所以角度制与弧度制必须分开使用, 不能在同一问题中混合使用.

弧度制与角度制相比有一定的优点. 其一是在进位上, 角度制在度、分、秒上都是 60 进制制, 不便于计算, 而弧度制是十进制制, 给运算带来方便; 其二是在弧长公式

与扇形面积的表达上,弧度制下的公式远比角度制下的公式简单,运算起来方便.因此在今后表示角的时候,常常用弧度制表示角.

2. 弧度制与角度制有什么区别和联系?

剖析 难点是对这两种度量角的方法混淆不清.其突破方法是分析不同单位之间的区别和联系,主要从定义、意义、换算、写法等方面考虑.

(1)从定义上:弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度.因此弧度制和角度制一样,都是度量角的方法.

(2)从意义上:1弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小;任意圆心角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$,其中 l 为以角 α 作为圆心角时的所对圆弧长, r 为圆的半径.

(3)从换算上: $1 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

(4)从写法上:用弧度为单位表示角的大小时,“弧度”两字可以省略不写.这时弧度数在形式上虽是一个不名数,但应当把它理解为名数;如果以度($^\circ$)为单位表示角时,度($^\circ$)就不能省去.

(5)优越性:弧度制比角度制有一定的优点.其一是在进位上,角度制在度、分、秒上是60进位制,不便于计算,而弧度制是十进位制,给运算带来方便;其二是在弧长公式与扇形面积的表达上,弧度制下的公式远比角度制下的公式简单,运算起来方便.因此在今后表示角的时候,常常用弧度制表示角.

典题精讲

例1 已知扇形的周长为20 cm,当扇形的圆心角为多大时,它有最大面积?

思路分析 设扇形的半径是 r ,弧长是 l ,扇形面积可表示为 $S = \frac{1}{2}lr$, l 与 r 之间还要满足周长为20,即 $l + 2r = 20$,所以 $l = 20 - 2r$,这样 S 就能表示成关于 r 的二次函数,再利用二次函数的性质求最值.

解 设扇形的半径是 r ,弧长是 l ,此时扇形的面积为 S .

由已知条件,知 $l + 2r = 20$,即 $l = 20 - 2r$.

由 $0 < l < 2\pi r$,得 $0 < 20 - 2r < 2\pi r$,

$$\frac{10}{\pi + 1} < r < 10.$$

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(20 - 2r)r = -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 +$$

$$25 \left(\frac{10}{\pi + 1} < r < 10 \right),$$

当 $r = 5$ 时, S 取最大值25,此时 $l = 10$, $\alpha = \frac{l}{r} = 2$,

即当扇形的圆心角为2时,扇形有最大面积25.

绿色通道 当扇形周长为定值时,扇形的面积有最大值.其求法是把面积 S 转化为关于 r 的二次函数,但要注意 r 的取值范围.特别注意一个扇形的弧长必须满足 $0 < l < 2\pi r$.

变式训练 已知扇形面积为 25 cm^2 ,当扇形的圆心角为多大时,扇形的周长最小?

思路分析 设扇形的半径是 r ,弧长是 l ,则 $25 = \frac{1}{2}lr$,扇形周长 $y = l + 2r$,消去 l 得 y 关于 r 的二次函数,再利用函数的单调性求最值.

解 设扇形的半径是 r ,弧长是 l ,此时扇形的周长为 y ,则 $y = l + 2r$.

$$\text{由题意,得 } \frac{1}{2}lr = 25, \text{ 则 } l = \frac{50}{r},$$

$$y = \frac{50}{r} + 2r (r > 0).$$

利用函数单调性的定义可以证明:

当 $0 < r \leq 5$ 时,函数 $y = \frac{50}{r} + 2r$ 是减函数;

当 $r > 5$ 时,函数 $y = \frac{50}{r} + 2r$ 是增函数.

当 $r = 5$ 时, y 取最小值20,此时 $l = 10$, $\alpha = \frac{l}{r} = 2$,

即当扇形的圆心角为2时,扇形的周长取最小值20.

例2 如图1-3-2所示,一绳索绕在半径为40厘米的滑轮上,绳索的下端B处悬挂着物体W.如果轮子按逆时针方向每分旋转6圈,那么需要几秒才能把物体W的位置向上提升100厘米?

思路分析 轮子按逆时针方向旋转, A点转过的弧 AA' 的长等于B点上升到 B' 时的距离.这是本题中潜藏的等量关系.

解 当 $BB' = 100$ 厘米时, $AA' = 100$ 厘米,

$$AA' \text{ 所对的圆心角 } \angle AOA' = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}.$$

轮子每分钟匀速旋转6圈.

每秒匀速转过 $\frac{6 \times 2\pi}{60} = \frac{\pi}{5}$, t 秒转过 $\frac{\pi}{5}t$.

$$\frac{\pi}{5}t = \frac{5}{2}, \text{ 解得 } t = \frac{25}{2\pi} \approx 4 \text{ (秒)},$$

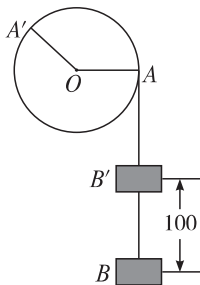


图 1-3-2

即约需 4 秒钟才能把物体 W 的位置向上提升 100 厘米。

绿色通道 在实际生活中,滑轮是一种重要的省力工具,单个滑轮转动时,滑轮上的点转过的弧长与跟它连接的绳索上的点移动的距离是相等的,在分析中,要注意图形的作用,数形结合是解决此类问题的有效办法。

变式训练 如图 1-3-3,已知圆上一点 A(1,0)按逆时针方向作匀速圆周运动,1 秒钟时间转过 θ ($0 < \theta \leq \pi$) 角,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟又转到最初位置,则 θ 角的弧度数是_____。

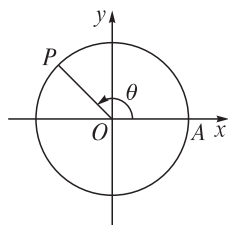


图 1-3-3

思路解析 因为 $0 < \theta \leq \pi$, 可得 $0 < 2\theta \leq 2\pi$.

又因为 2θ 在第三象限, 所以 $\pi < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$,

即 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$. 由 $14\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 得 $\theta = \frac{k\pi}{7}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{7} < \frac{3\pi}{4}$, 即 $\frac{7}{2} < k < \frac{21}{4}$. 所以 $k=4$ 或 5 , $\theta = \frac{4\pi}{7}$ 或 $\theta = \frac{5\pi}{7}$.

答案 $\frac{4\pi}{7}$ 或 $\frac{5\pi}{7}$

问题探究

问题 1 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 试探索 M 和 N 的关系.

导思 利用归纳、猜想、证明的方法探索,即先用列举法表示集合 M 和 N,由此归纳它们之间的关系,猜想出结论后,再证明所得结论.

探究 用列举法表示集合 M 和 N.

$$M = \{\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}, \dots\},$$

$$N = \{0, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \pi, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{4}, \dots\},$$

归纳 集合 M 中元素都在集合 N 中,但是集合 N 中 $\pm \frac{\pi}{2}$ 不在集合 M 中.

猜想 $M \subsetneq N$.

证法一 把集合 M 和 N 中的元素看成“单纯”的实数来讨论.

设 $x \in M$, 则存在 $k \in \mathbb{Z}$, 满足 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{(2k)\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$. $2k \in \mathbb{Z}$, $x \in N$, $M \subseteq N$.

设 $\frac{\pi}{2} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. 则 $k \notin \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} \in N$, $\frac{\pi}{2} \notin M$, $M \subsetneq N$.

综上所述 $M \subsetneq N$.

证法二 把集合 M 和 N 中的元素看成弧度制表示的角来讨论. 如图 1-3-4 所示.

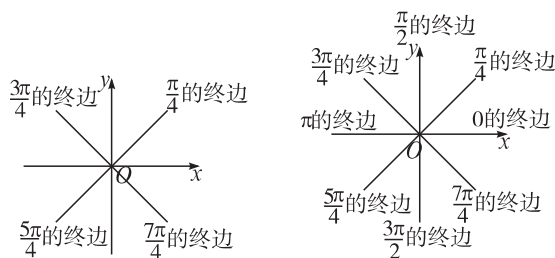


图 1-3-4

集合 M 中元素 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 可以看成将角 $\frac{\pi}{4}$ 的终边旋转 $\frac{k\pi}{2}$ 所得的角;

集合 N 中元素 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 可以看成将角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边旋转 $\frac{k\pi}{4}$ 所得的角.

由图 1-3-4 可见,集合 M 中的元素都在集合 N 中,但是集合 N 中的元素 $\pm \frac{\pi}{2}$ 不在集合 M 中,所以有 $M \subsetneq N$.

自主广场

我夯基 我达标

- 下列命题中,错误的是 ()
A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$, 一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$
C. 根据弧度的定义, 180° 等于 π 弧度
D. 不论用角度制还是用弧度制度量角,它们与圆的半径长短有关
- α 是第三象限的角, 则 $\pi + \alpha$ 是 ()
A. 第一象限的角 B. 第二象限的角
C. 第三象限的角 D. 第四象限的角
- 如果一扇形的圆心角为 72° , 半径等于 20 cm, 则扇形的面积为 ()
A. $40\pi \text{ cm}^2$ B. $80\pi \text{ cm}^2$

C. 40 cm^2 D. 80 cm^2

- 4 若扇形的面积是 1 cm^2 , 它的周长是 4 cm , 则扇形圆心角的弧度数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

- 5 若 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha - 2\beta$ 的取值范围是

- 6 1 弧度的圆心角所对的弦长为 2, 求这个圆心角所对的弧长及扇形的面积.

我综合我发展

- 7 在直径为 10 cm 的轮子上有一长为 6 cm 的弦 P 为弦的中点, 轮子以每秒 5 弧度的角速度旋转, 求经过 5 秒后, 点 P 转过的弧长.

- 8 如图 1-3-5, 动点 P, Q 从点 $(4, 0)$ 出发沿圆周运动, 点 P 按逆时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{3}$ 弧度, 点 Q 按顺时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{6}$ 弧度, 求 P, Q 第一次相遇时所用的时间, 相遇点的坐标及 P, Q 点各自走过的弧长.

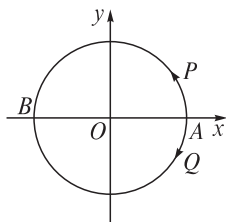


图 1-3-5

- 9 将钟表上的时针作为角的始边, 分针作为终边, 那么当钟表上显示 8 点 5 分时, 时针与分针构成的角度是

- 10 如图 1-3-6, 已知一长为 $\sqrt{3} \text{ dm}$, 宽为 1 dm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第四面时被一小木板挡住, 且木块底面与桌面成角为 $\frac{\pi}{6}$, 求点 A 走过的路程及走过的弧所在扇形的总面积.

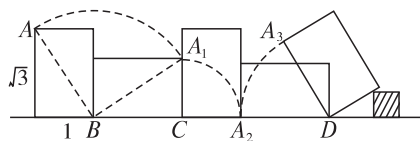


图 1-3-6

- 11 一条铁路在转弯处成圆弧形, 圆弧的半径为 2 km , 一列火车用每小时 30 km 的速度通过, 10 s 间转过几度?

§4 正弦函数

知识梳理

1. 任意角的正弦函数

(1) 单位圆: 圆心在原点 O , 半径等于 _____ 的圆称为单位圆.

(2) 定义

如图 1-4-1 所示, 单位圆与角 α 的终边交于 P 点. 设 $P(a, b)$, 则 P 点纵坐标 b 是角 α 的函数, 称为正弦函数, 记为 $b = \sin \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$. 通常用 x, y 表示自变量和因变量, 将正弦函数表示为 _____ ($x \in \mathbb{R}$).

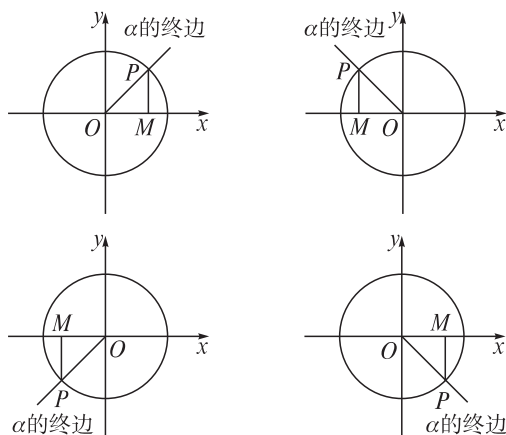


图 1-4-1

(3) 正弦线

如图 1-4-1 所示,过点 P 作 x 轴的垂线 PM ,垂足为 M .单位圆中的有向线段 MP 叫做角 α 的正弦线.当角 α 的终边在 x 轴上时, M 与 P 重合,此时正弦线变成 MP .

(4) 正弦线所表示的正弦值可如下确定:

正弦线的方向是表示正弦值的符号,同 y 轴一致,向上为 $+$,向下为 $-$;正弦线的长度是正弦值的绝对值.

(5) 正弦函数定义的推广

如图 1-4-2 所示,设 $P(x, y)$ 是 α 的终边上任意一点,

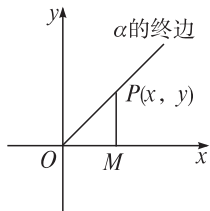


图 1-4-2

P 到原点的距离 $|OP| = r$, 有 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

则 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

对于每一个确定的角 α , 总有唯一确定的正弦值与之对应, 所以这个对应法则是以角 α 为自变量的函数, 叫做正弦函数. 正弦函数值与点 P 在角 α 终边上的位置无关, 只依赖于 α .

2. 周期函数

一般地, 对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个不为零的常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, $f(x+T)$ 都成立, 那么就把函数 $y = f(x)$ 叫做周期函数, 不为零的常数 T 叫做这个函数的周期. 对于周期函数来说, 如果所有的周期中存在一个最小的正数, 就称它为最小正周期, 今后提到的三角函数的周期, 如没特别指明, 一般都是指它的最小正周期.

3. 任意角的正弦值的符号

(1) 图形表示: 各象限正弦函数符号, 如图 1-4-3 所示.

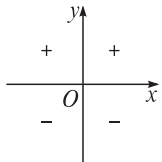


图 1-4-3

(2) 表格表示.

α 的终边	$\sin \alpha$
x 非负半轴	0
第一象限	+
y 非负半轴	+
第二象限	+
x 非正半轴	0
第三象限	-
y 非正半轴	-
第四象限	-

4. 正弦函数的图像和性质

(1) 图像: 如图 1-4-4 所示.

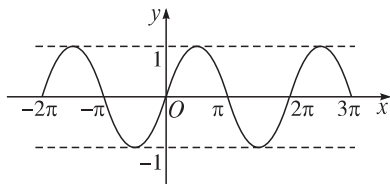


图 1-4-4

(2) 性质.

函数性质	$y = \sin x$
定义域	$[-\infty, +\infty]$
值域	$[-1, 1]$ 当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, y 取最大值 1; 当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, y 取最小值 -1
周期	2π
奇偶性	奇函数
单调性	增区间: $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ 减区间: $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$

5. 诱导公式

x	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$

知识导学

1. 复习初中学过的锐角的正弦函数,本节是锐角的正弦函数的补充和延伸.
2. 任意角的正弦值的符号记忆口诀:“上正下负”.其含义是终边在 x 轴上方的任意角正弦值为正,在 x 轴下方的任意角正弦值为负.
3. 诱导公式的记忆口诀:“函数名不变,符号看象限”.其含义是: $-\alpha, \pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 的正弦函数值等于 α 的正弦函数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原正弦函数值的符号.

疑难突破

1. 周期函数一定都有最小正周期吗?

剖析 并不是所有周期函数都存在最小正周期.很多同学对此产生质疑,其突破的方法是:通过经验的积累,考虑特殊的周期函数.

例如:常数函数 $f(x) = C (C \text{ 为常数})$, $x \in \mathbb{R}$. 当 x 取定义域内的任意值时,函数值都是 C ,即对于函数 $f(x)$ 的定义域内的每一个值 x 都有 $f(x+T) = C$,因此 $f(x)$ 是周期函数.由于 T 可以是任意不为零的常数,而正数集中没有最小者,所以 $f(x)$ 没有最小正周期.

2. 正弦函数线有何作用?

剖析 有的同学学习了正弦线后,感到正弦线没有什么用处.其突破的路径是准确理解正弦线的定义和平时经验的积累.

正弦线是当点 P 为终边与单位圆交点时,正弦函数值的直观表现形式.正弦线的方向和长度直观反映了正弦值的符号和绝对值.由正弦线的方向判断正弦值的正负,由正弦线的长度确定正弦值的绝对值大小.由此可见,用正弦线表示正弦函数值,反映了变换与转化、数形的结合与分离的思想方法.正弦函数在各象限的符号除从各象限点的坐标的符号结合正弦函数的定义来记忆之外,也可以根据画出的正弦线的方向记忆.正弦线的主要作用是解三角不等式、证明三角不等式、求函数定义域及比较三角函数式的大小,同时它也是以后学习正弦函数的图像与性质的基础.

例如:求函数 $y = \log_2(\sin x)$ 的定义域.

思路分析 转化为解三角不等式 $\sin x > 0$.

解 要使函数有意义, x 的取值需满足 $\sin x > 0$.

如图 1-4-5 所示, $\overrightarrow{MP}$ 是角 x 的正弦线,

则有 $\sin x = \overrightarrow{MP} > 0$,

$\overrightarrow{MP}$ 的方向向上.

角 x 的终边在 x 轴的上方.

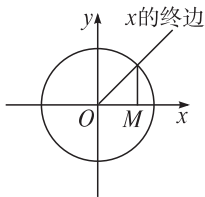


图 1-4-5

, $2k\pi < x < 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$.

函数 $y = \log_2(\sin x)$ 的定义域是 $(2k\pi, 2k\pi + \pi) k \in \mathbb{Z}$.

由以上可看出,利用三角函数线,数形结合,能使问题得以简化.三角函数线是利用数形结合思想解决有关三角函数问题的重要工具,通过平时经验的积累,掌握三角函数线的应用.

3. 在推广了的三角函数定义中,为什么三角函数值与点 P 在角 α 终边上的位置无关,只依赖于角 α 的大小?

剖析 联系相似三角形的知识来分析.

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是角 α 终边上的另一点, $|OP_0| = r_0$, 由相似三角形的知识可知,只要点 P_0 在 α 终边上,总有 $\frac{y_0}{r_0} = \frac{y}{r}$. 因此所得的比值都对应相等.所以角 α 的正弦函数值只依赖于终边的位置即 α 的大小,与点 P 在角 α 终边上的位置无关.

典题精讲

例 1 (经典回放) $\sin 600^\circ$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

思路解析 $\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案 D

绿色通道 诱导公式选择的一般步骤:先将 $-\alpha$ 化为正角,再用 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 化为 $[0, 2\pi)$ 内的角,再用 $\pi + \alpha, \pi - \alpha, 2\pi - \alpha$ 化为锐角的三角函数.由此看利用诱导公式能将任意角的三角函数化为锐角的三角函数,也就是说:诱导公式真是好,负化正后大化小.

变式训练 $\sin(-2010^\circ)$ 的值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

思路解析 $\sin(-2010^\circ) = \sin[(-6 \times 360^\circ) + 150^\circ] = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

答案 C

例 2 (2005 福建高考卷,理 12) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数,且 $f(2) = 0$,则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

思路解析 $f(x)$ 是奇函数, $f(0) = -f(-0)$, $f(-2) = -f(2) = 0$.

, $f(0) = 0, f(2) = 0$.
 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数,
 $f(-2) = f(3-2) = f(1) = 0, f(3) = f(0) = 0, f(4) = f(1+3) = f(1) = 0$.
 $f(5) = f(3+2) = f(2) = 0$.
 在区间 $(0, 6)$ 内 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 0$.

答案 D

绿色通道 高考试题中,通常不会单独考查周期函数,往往是周期函数和三角函数,和函数的奇偶性、单调性等综合考查.一般是利用周期函数的性质 $f(x+T) = f(x)$ 解决求函数值、解析式及解方程等问题.

变式训练 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x) = f(3-x)$. 若当 $x \in (0, 3)$ 时 $f(x) = 2^x$, 则当 $x \in (-6, -3)$ 时 $f(x)$ 的解析式为 ()

A. 2^{x+6} B. -2^{x+6} C. 2^{x-6} D. -2^{x-6}

思路解析: $f(x)$ 是偶函数, $f(-x) = f(x)$.

又 $f(3+x) = f(3-x)$,

$f(x)$ 的图像关于直线 $x=3$ 对称.

$f(x+6) = f(x+3+3) = f[3-(x+3)] = f(-x) = f(x)$.

$f(x)$ 是周期函数, 6 是一个周期. 当 $x \in (-6, -3)$ 时, 有 $0 < x+6 < 3$,

$f(x) = f(x+6) = 2^{x+6}$.

答案 A

例 3 已知角 α 的终边经过点 $P(3, 4)$, 求 $\sin \alpha$.

思路分析: 分别写出 x, y, r 的值, 应用定义求解.

解: 由 $x=3, y=4$, 得 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$.

绿色通道 如果已知角的终边经过的一个点求三角函数值, 通常应用三角函数的定义求解.

变式训练 已知角 α 的终边经过点 $P(3t, 4t), t \neq 0$, 求 $\sin \alpha$.

思路分析: 应用三角函数的定义直接求解, 注意 t 的取值符号.

解: 由 $x=3t, y=4t$, 得 $r = \sqrt{(3t)^2 + (4t)^2} = 5|t|$.

当 $t > 0$ 时, $r=5t, \sin \alpha = \frac{4}{5}$;

当 $t < 0$ 时, $r=-5t, \sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

例 4 **2006 安徽高考卷, 文 8** 设 $a > 0$, 对于函数

$f(x) = \frac{\sin x + a}{\sin x} (0 < x < \pi)$, 下列结论正确的是 ... ()

- A. 有最大值而无最小值
- B. 有最小值而无最大值
- C. 有最大值且有最小值
- D. 既无最大值又无最小值

思路解析: 令 $t = \sin x, 0 < x < \pi$, 则 $t \in (0, 1]$, 那么函数 $f(x) = \frac{\sin x + a}{\sin x} (0 < x < \pi)$ 的值域为函数 $y = 1 + \frac{a}{t}, t \in (0, 1]$ 的值域, 又 $a > 0$, 可以证明 $y = 1 + \frac{a}{t}, t \in (0, 1]$ 是一个减函数, 所以函数 $f(x)$ 有最小值而无最大值.

答案 B

绿色通道: (1) 求三角函数最值的常用方法: 换元法. 设 $\sin x = t$, 将三角函数转化为二次函数等其他常见的初等函数, 再求最值;

(2) 形如 $y = \frac{a \sin x + b}{c \sin x + d}$ 的函数的最值问题, 常用换元法, 也可用分离变量法.

变式训练 1 求函数 $y = \frac{3 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ 的值域.

思路分析: 此类题型可转化为分式函数的值域的求法, 即分离常数法, 或通过反解 $\sin x$ 法, 利用 $\sin x$ 的值域确定函数的值域.

解法一: 设 $t = \sin x, x \in \mathbb{R}$, 则 $t \in [-1, 1]$,

函数 $f(x) = \frac{3 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ 的值域为函数 $y = \frac{3t + 1}{t + 2}, t \in [-1, 1]$ 的值域,

可以证明 $y = \frac{3t + 1}{t + 2}, t \in [-1, 1]$ 是增函数.

$\frac{-3+1}{-1+2} \leq y \leq \frac{3+1}{1+2}$,

$-2 \leq y \leq \frac{4}{3}$.

函数的值域为 $[-2, \frac{4}{3}]$.

解法二: 由 $y = \frac{3 \sin x + 1}{\sin x + 2}$, 得 $\sin x = \frac{2y - 1}{3 - y}$.

$|\sin x| \leq 1$,

$|\frac{2y-1}{3-y}| \leq 1$, 解得 $-2 \leq y \leq \frac{4}{3}$.

函数的值域为 $[-2, \frac{4}{3}]$.

变式训练 2 求函数 $y = (5 - \sin x)(2 + \sin x)$ 的最大值及此时 x 的集合.

思路分析: 利用换元法转化为求二次函数的最大值.

解: 设 $\sin x = t$, 则 $-1 \leq t \leq 1$,

$y = (5 - \sin x)(2 + \sin x) = (5 - t)(2 + t) = -t^2 + 3t +$

$10 = -(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{49}{4}$, 则当 $t = 1$ 时, y 取最大值 12, 此时

$\sin x = 1, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以函数 $y = (5 - \sin x)$

$(2 + \sin x)$ 最大值为 1, 此时 x 的集合是 $\{x | x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

例 5 作出函数 $y = -\sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的图像.

思路分析 利用“五点法”作图, 关键是找出五个关键点, 所以, 最好利用列表整理数据, 使问题既清晰又准确.

解 列表:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

描点作图(图 1-4-6):

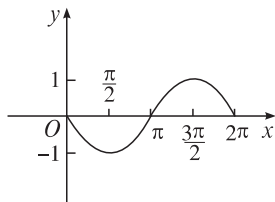


图 1-4-6

绿色通道 由于正弦曲线直观地表现了正弦函数的各种性态, 因此要熟悉图像, 掌握五点法作图并能应用图像解决有关问题. “五点”即 $y = \sin x$ 的图像在一个最小正周期内的最高点、最低点及与 x 轴的交点, 一般地, 观察 $y = \sin x$ 的一个周期, 常常作区间 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上的图像.

变式训练 1 求函数 $y = \sqrt{-\sin x}$ 的定义域.

思路分析 转化为解不等式 $-\sin x \geq 0$. 利用图像法解不等式.

解 在平面直角坐标系中画出函数 $y = -\sin x$ 的图像, 如图 1-4-6 所示.

在 $[0, 2\pi]$ 内, 当 $-\sin x \geq 0$, 记函数的图像位于 x 轴上方时, $\pi \leq x \leq 2\pi$.

所以函数 $y = \sqrt{-\sin x}$ 的定义域是 $[2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi] (k \in \mathbb{Z})$.

变式训练 2 函数 $y = |\sin x|$ 的周期是_____.

思路解析 画函数 $y = |\sin x|$ 的图像, 观察图像得函数周期为 π .

答案 π

问题探究

问题 1 (1) 正弦曲线关于原点、 $(\pi, 0)$ 、 $(-\pi, 0)$ 成中心对称图形. 结合正弦函数的图像, 你发现正弦曲线还有其他对称中心吗?

(2) 正弦曲线关于直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 、 $x = -\frac{\pi}{2}$ 、 $x = \frac{3\pi}{2}$ 成轴对称图形. 结合正弦函数的图像, 你发现正弦曲线还有其他对称轴吗?

导思 探究思路是由特殊到一般, 利用归纳推理: 先归纳, 再猜想出结论, 最后利用对称的定义作出证明.

探究 (1) 由于正弦函数是奇函数, 则其图像关于原点对称.

设点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点, 则 $y_0 = \sin x_0$.

那么点 $P(x_0, y_0)$ 关于点 $(\pi, 0)$ 的对称点为 $M(2\pi - x_0, -y_0)$,

$$\sin(2\pi - x_0) = -\sin x_0,$$

$$\sin(2\pi - x_0) = -y_0,$$

即点 $M(2\pi - x_0, -y_0)$ 也在正弦函数 $y = \sin x$ 的图像上.

又点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点,

正弦曲线关于 $(\pi, 0)$ 成中心对称图形.

同理可证正弦曲线关于 $(-\pi, 0)$ 成中心对称图形.

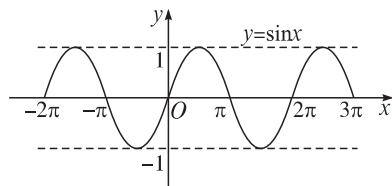


图 1-4-7

如图 1-4-7 所示, 观察正弦函数的图像, 可归纳得: 原点、 $(\pm\pi, 0)$ 都是正弦曲线与 x 轴的交点, 可猜想正弦曲线与 x 轴的交点 $(k\pi, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 都是正弦曲线的对称中心.

证明 设点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点, 则 $y_0 = \sin x_0$.

则点 $P(x_0, y_0)$ 关于点 $(k\pi, 0)$ 的对称点 $M(2k\pi - x_0, -y_0)$,

$$\sin(2k\pi - x_0) = -\sin x_0,$$

$$\sin(2k\pi - x_0) = -y_0,$$

即点 $M(2k\pi - x_0, -y_0)$ 也在正弦函数 $y = \sin x$ 图像上.

点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点, 正弦曲线关于 $(k\pi, 0)$ 成中心对称图形.

综上可得,正弦曲线的对称中心是正弦曲线与 x 轴的交点,即此时的正弦值为 0;并且任意相邻的两个对称中心正好相差半个周期.

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点,则 $y_0 = \sin x_0$.

则点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 的对称点为 $M(\pi - x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x_0) &= \sin x_0, \\ \sin(\pi - x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

即点 $M(\pi - x_0, y_0)$ 也在正弦函数 $y = \sin x$ 图像上.

点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点,正弦曲线关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 成轴对称图形.

同理可证:正弦曲线关于直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 、 $x = \frac{3\pi}{2}$ 成轴对称图形.

观察正弦函数的图像,可归纳得:直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 、 $x = -\frac{\pi}{2}$ 、 $x = \frac{3\pi}{2}$ 都过正弦曲线最高或最低点,可猜想过正弦曲线最高或最低点的直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 都是正弦曲线的对称轴.

证明:设点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点,则 $y_0 = \sin x_0$,

则点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的对称点 $M(2k\pi + \pi - x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + \pi - x_0) &= \sin(\pi - x_0) = \sin x_0, \\ \sin(2k\pi + \pi - x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

即点 $M(2k\pi + \pi - x_0, y_0)$ 也在正弦函数 $y = \sin x$ 图像上.

点 $P(x_0, y_0)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 图像上任意一点,正弦曲线关于直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 成轴对称图形.

综上可得,正弦曲线的对称轴过正弦曲线的最高或最低点且垂直于 x 轴的直线,即此时的正弦值为最大值或最小值;并且任意相邻的两条对称轴正好相差半个周期.

数,且 $f(1) = -1$,则 $f(11)$ 的值是 ()

- A. -1 B. 1
C. 2 D. -2

3 若 $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{1}{3}$,则 $\sin(-5\pi + \alpha)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\pm \frac{1}{3}$ D. 0

4 已知 $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$,且 α 是第三象限的角, $P(m, n)$

是角 α 终边上一点,且 $|OP| = \sqrt{10}$,则 $m - n$ 等于 ... ()

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

5 设 $\sin x = t - 3, x \in \mathbb{R}$,则 t 的取值范围是 ()

- A. $\mathbb{R}$ B. $(2, 4)$ C. $(-2, 2)$ D. $[2, 4]$

6 若 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$,则 x 的取值满足 ()

- A. $k \cdot 360^\circ + 60^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 120^\circ (k \in \mathbb{Z})$
B. $60^\circ < x < 120^\circ$
C. $k \cdot 360^\circ + 15^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 75^\circ (k \in \mathbb{Z})$
D. $k \cdot 180^\circ + 30^\circ < x < k \cdot 180^\circ + 150^\circ (k \in \mathbb{Z})$

7 2006 安徽高考卷,理 15 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x

满足条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$,若 $f(1) = -5$,则 $f[f(5)] =$ _____.

8 已知角 α 的终边经过点 $P(3, 4t)$, $t \neq 0$,且 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$,求实数 t 的值.

自主广场

我夯基 我达标

- 1 2006 江苏高考卷,1 已知 $a \in \mathbb{R}$,函数 $f(x) = \sin x - |a|$, $x \in \mathbb{R}$ 为奇函数,则 a 等于 ()
A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1
- 2 设 $f(x) (k \in \mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 3 为周期的奇函

我综合 我发展

- 9 2005 上海高考卷,理 10 函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图像与直线 $y = k$ 有且仅有两个不同的交点,则 k 的取值范围是 _____.
- 10 设 $x \in (0, \pi)$,则 $\frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值是 _____.

11 判断方程 $\sin x = \frac{x}{10}$ 的根的个数.

12 若角 β 的终边在经过点 $P(\sqrt{3}, -1)$ 的直线上, 写出角 β 的集合; 当 $\beta \in (-360^\circ, 360^\circ)$ 时, 求角 β .

§5 余弦函数

知识梳理

1. 任意角的余弦函数

(1) 定义

如图 1-5-1 所示, 单位圆与角 α 的终边交于 P 点. 设 $P(a, b)$, 则 P 点横坐标 a 是角 α 的函数, 称为余弦函数, 记为 $a = \cos \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$. 通常用 x, y 表示自变量和因变量, 将余弦函数表示为 $y = \cos x (x \in \mathbb{R})$.

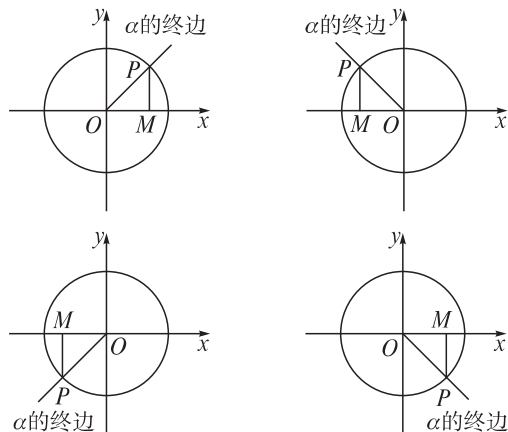


图 1-5-1

(2) 余弦线

如图 1-5-1 所示, 过点 P 作 x 轴的垂线 PM , 垂足为 M . 单位圆中的有向线段 $\overline{OM}$ 叫做角 α 的余弦线 (是三角函数线之一). 当角 α 的终边在 y 轴上时, M 与 O 重合, 此时余弦线变成 $\overline{OO}$.

(3) 余弦线所表示的余弦值可如下确定:

余弦线的方向是表示余弦值的符号, 同 x 轴一致, 向上为 $+$, 向下为 $-$. 正弦线的长度是正弦值的绝对值.

(4) 任意角的余弦函数定义的推广

如图 1-5-2 所示, 设 $P(x, y)$ 是 α 的终边上任意一点, 它到原点的距离 $|OP| = r$, 有 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

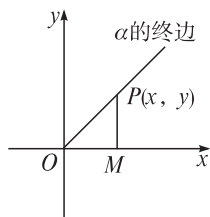


图 1-5-2

对于每一个确定的角 α , 总有唯一确定的余弦值与之对应, 所以这个对应法则是以角 α 为自变量的函数, 叫做余弦函数. 余弦函数值与点 P 在角 α 终边上的位置无关, 只依赖于 α .

2. 余弦函数值的符号

(1) 图形表示: 余弦值在各象限的符号如图 1-5-3 所示.

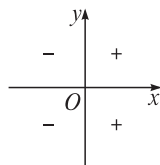


图 1-5-3

(2) 用表格表示

α 的终边	$\cos \alpha$
x 非负半轴	$+$
第一象限	$+$
y 非负半轴	0
第二象限	$-$
x 非正半轴	$-$
第三象限	$-$
y 非正半轴	0

第四象限

+

3. 余弦函数的图像和性质

(1)图像 如图 1-5-4 所示.

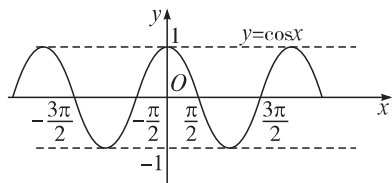


图 1-5-4

(2)性质

函数性质	$y = \cos x$	
定义域	_____	
值域	[- 1 , 1]	当 _____ 时 y 取最大值 1
		当 _____ 时 y 取最小值 - 1
周期	_____	
奇偶性	_____	
单调性	增区间	_____
	减区间	_____
对称性	对称中心	_____
	对称轴	_____

4. 正、余弦函数的诱导公式

x	$\sin x$	$\cos x$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	_____
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	_____
$2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	_____	$\sin \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$

知识导学

1. 复习初中学过的锐角的余弦函数,本节是锐角的余弦函数的补充和延伸.

2. 任意角的余弦值的符号记忆口诀“左负右正”.其

含义是终边在 y 轴左侧的任意角余弦值为负,在 y 轴右侧的任意角余弦值为正.

疑难突破

1. 为什么说 在同一坐标系中正、余弦函数的图像的 形状相同,只是位置不同?

剖析 很多同学观察它们的图像后,知道这一点,但是离开图像就产生怀疑.究其原因是通过观察、归纳得到的结论没有加以证明.其突破方法是数形结合,要从数和形两方面来分析.

我们知道函数的图像经过左右平移后,其形状未发生变化,但在坐标系中的位置变化了.类似于一个人从北京到纽约,这个人还是他本人,只是他的地理位置改变了.由平移变换,知函数 $f(x) = \sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得函数 $f(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. 根据诱导公式 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ 知平移后的函数就是余弦函数 $f(x) = \cos x$ 的图像,由此可见在同一坐标系中正、余弦函数的图像的形状相同,只是位置不同.

由于 $\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2} + x) = \cos x (k \in \mathbb{N})$, $\sin(-2k\pi - \frac{3\pi}{2} + x) = \cos x (k \in \mathbb{N})$, 则将正弦函数的图像向左平移 $2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{N})$ 个单位或向右平移 $2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{N})$ 个单位均得到余弦函数的图像.

通过数和形两方面来分析,就真正明确了其中的正、余弦函数图像的关系,有利于帮助我们解决问题.

2. 正、余弦函数的诱导公式如何记忆?

剖析 诱导公式太多,记不住.其突破路径是从以下几个方面找出规律:函数名称怎样变化,这些角和角 α 有何共同特点;诱导公式右边的符号有什么变化规律.

(1) $-\alpha, \pi \pm \alpha, 2\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号,为了便于记忆,可以说成“函数名不变,符号看象限”.

(2) $\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha$ 的三角函数值,等于 α 的余名三角函数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号,记忆口诀为“函数名改变,符号看象限”.

(3) 这两套公式可以归纳为 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 的三角函数值,当 k 为偶数时,得 α 的同名函数值;当 k 为奇数时,得 α 的余名三角函数值,然后在前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号,概括为“奇变偶不变,符号看