

第一章 集合与函数概念

1.1 集合	1
1.1.1 集合的含义与表示	1
1.1.2 集合间的基本关系	6
1.1.3 集合的基本运算	11
1.2 函数及其表示	18
1.2.1 函数的概念	18
1.2.2 函数的表示法	25
1.3 函数的基本性质	35
1.3.1 单调性与最大(小)值	35
1.3.2 奇偶性	46
本章整合	53
《集合与函数概念》测评	59

第二章 基本初等函数(I)

2.1 指数函数	64
2.1.1 指数与指数幂的运算	64
2.1.2 指数函数及其性质	70
2.2 对数函数	78
2.2.1 对数与对数运算	78
2.2.2 对数函数及其性质	85
2.3 幂函数	93
本章整合	99
《基本初等函数(I)》测评	102

第三章 函数的应用

3.1 函数与方程	107
3.1.1 方程的根与函数的零点	107
3.1.2 用二分法求方程的近似解	113
3.2 函数模型及其应用	118
3.2.1 几类不同增长的函数模型	118
3.2.2 函数模型的应用举例	122
本章整合	132
《函数的应用》测评	134
模块综合测评	139



第一章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示



自主整理

ZIZHUZHENGLI

1. 集合

(1) 含义:一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集).

(2) 相等:只要构成两个集合的元素是一样的,即这两个集合中的元素完全相同,就称这两个集合相等.

2. 表示

(1) 字母表示法:用一个大写英文字母表示集合,如 A, B, C 等. 常见数集的表示:自然数集记为 $\mathbf{N}$; 整数集记为 $\mathbf{Z}$; 正整数集记为 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$; 有理数集记为 $\mathbf{Q}$; 实数集记为 $\mathbf{R}$.

(2) 列举法:把集合中的全部元素一一列举出来,并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合,这种表示集合的方法叫做列举法.

(3) 描述法:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及其取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 这种用集合所含元素的共同特征表示集合的方法叫做描述法.

3. 元素与集合

(1) 关系:属于或不属于.

(2) 关系表示:如果 a 是集合 A 中的元素,就说元素 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说元素 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$.



高手笔记

GAOSHOUNIJI

1. 集合的概念是数学中的原始概念,在学习过程中,应结合具体实例搞清它的含义.

2. 集合元素的性质:给定的集合,它的元素必须是明确的,即任何一个元素要么在这个集合中,要么不在这个集合中,这就是集合的确定性;一个给定集合的元素是互不相同的,即集合中的元素是不重复出现的,这就是集合的互异性;集合中的元素是没有顺序的,这就是集合的无序性. 判断一些对象能否构成一个集合,关键要看是否满足集合元素的确定性.

3. $\in$ 和 $\notin$ 只能用于元素与集合之间,并且这两个符号的

左边是元素,右边是集合,具有方向性,左右两边不能互换.

4. 集合的分类:按集合中元素的个数分为有限集和无限集. 有限集是指含有有限个元素的集合;无限集是指含有无限个元素的集合. 如果一个集合是有限集,并且元素的个数较少时,通常选择用列举法表示;如果一个集合是有限集且所含元素较多或是无限集时,通常选择用描述法表示.

5. 用描述法表示集合时,在不致混淆的情况下,可以省去竖线及左边部分. 如: $\{ \text{直角三角形} \}$ 等.



名师解惑

MINGSHIJIIEHUO

1. 为什么“爱好唱歌的人”不能构成一个集合?

剖析:学习了集合的概念后,很多同学对此产生质疑,总是迷惑不解. 其原因是对集合元素的确定性理解不够充分,突破这个疑点的途径是从集合的含义来分析. 教材中指出,把研究对象称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合. 教材只是这样作了简单地描述. 我们可以这样来理解:研究对象就是构成集合的每个对象,即元素. 一个对象是不是我们研究的对象(元素)呢? 其结果只有两种:是或不是. 这才符合数学具有严格性的特点. 这也就是我们所说的集合元素的重要性质——确定性. 因此给定一个集合,任意一个元素要么在这个集合中,要么不在这个集合中,二者必居其一. 如果你是班内的文艺委员,让爱好唱歌的同学到音乐教室开会,那么就会出现:你认为爱好唱歌的同学没有去,而你认为不爱好唱歌的同学反而去了,出现这种情况的原因是没有明确的标准来判断是否爱好唱歌. 因此说“爱好唱歌的人”不能构成一个集合,这不符合集合元素的确定性.

2. 如何区分数集和点集?

剖析:一些用描述法表示的集合,不容易区分是点集还是数集,这是一个易错点. 突破的途径是理解描述法的表示形式. 如果一个集合中所有元素均是实数,那么这个集合称为数集;如果一个集合中所有元素均是点,那么这个集合称为点集. 例如:集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, 集合 A 中元素代表符号是 x , 满足 $1 < x < 2$, 即大于 1 且小于 2 的实数组成集合 A , 故集合 A 是数集. 集合 $B = \{(x, y) | y =$



$2x+1$ }, 集合 B 中元素代表符号是 (x, y) , 其中 x, y 满足 $y=2x+1$, 则 (x, y) 是一次函数 $y=2x+1$ 图象上的点, 故集合 B 是点集. 因此, 形如 $\{x|x$ 的特征, $x \in \mathbb{R}\}$ 的集合是数集, 形如 $\{(x, y)|x, y$ 的特征, $x, y \in \mathbb{R}\}$ 的集合是点集.



讲 练 互 动

JIANGLIANHUYDONG

【例题 1】 2007 浙江宁波高三第一次“十校联考”, 理 1 在数集 $\{2x, x^2-x\}$ 中, 实数 x 的取值范围是_____.

解析: 本题主要考查集合元素的互异性. 实数 x 的取值满足集合元素的互异性, 则 $2x \neq x^2-x$, 解得 $x \neq 0$, 且 $x \neq 3$, $\therefore$ 实数 x 的取值范围是 $\{x|x \neq 0, \text{ 且 } x \neq 3\}$.

答案: $\{x|x \neq 0, \text{ 且 } x \neq 3\}$



绿色通道

在解决参数问题和判断集合元素的个数问题时, 要灵活应用集合元素的互异性, 这也是处理集合有关问题的一个隐含条件.



黑色陷阱

本题的答案易错写成 $\{x|x \neq 0, \text{ 或 } x \neq 3\}$, 其原因是数学中“且”与“或”的含义混淆不清. 在数学中, “且”表示同时成立, 而“或”表示至少一个成立. $x \neq 0$, 且 $x \neq 3$ 表示全体实数中除去 1 和 3 剩下的实数, 而 $x \neq 0$, 或 $x \neq 3$ 表示全体实数. 防止出现此类错误的方法是明确“且”与“或”的含义.



变式训练

1. 已知集合 $A = \{2, 6, x^2-x\}$, 则实数 x 的取值范围是_____.

解析: 利用集合元素的互异性列出不等式, 解得实数 x 的取值范围. 由题意得 $\begin{cases} x^2-x \neq 2, \\ x^2-x \neq 6. \end{cases}$ 解得 $x \neq -2$, 且 $x \neq -1$, 且 $x \neq 2$, 且 $x \neq 3$.

答案: $\{x|x \neq -2, \text{ 且 } x \neq -1, \text{ 且 } x \neq 2, \text{ 且 } x \neq 3\}$

2. 2007 广东韶关高三摸底, 理 1 下列各组中的两个集合 P 和 Q , 表示同一集合的是 _____ ()

A. $P = \{1, \sqrt{3}, \pi\}, Q = \{\pi, 1, |-\sqrt{3}|\}$

B. $P = \{\pi\}, Q = \{3.141\ 59\}$

C. $P = \{2, 3\}, Q = \{(2, 3)\}$

D. $P = \{x|-1 < x \leq 1, x \in \mathbb{N}\}, Q = \{1\}$

解析: 只要两个集合的元素完全相同, 这两个集合就表示同一集合. $\{\pi, 1, |-\sqrt{3}|\} = \{\pi, 1, \sqrt{3}\} = \{1, \sqrt{3}, \pi\}$, 所以选项 A 正确; 由于 $\pi \neq 3.141\ 59$, 所以选项 B 错误; 集合 $\{2, 3\}$ 中的元素是实数, 而集合 $\{(2, 3)\}$ 中的元素是点, 所以选项 C 错误; 集合 $\{x|-1 < x \leq 1, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$, 所以选项 D 错误, 故选 A.

答案: A

【例题 2】 判断下列集合是有限集还是无限集, 并用适当的方法表示:

(1) 被 3 除余 1 的自然数组成的集合;

(2) 由所有小于 20 的既是奇数又是质数的正整数组成的集合;

(3) 二次函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 图象上的所有点组成的集合;

(4) 设 a, b 是非零实数, 求 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 的所有值组成的集合.

思路分析: 本题主要考查集合的表示法和集合的分类. 用列举法与描述法表示集合时, 一要明确集合中的元素; 二要明确元素满足的条件; 三要根据集合中元素的个数来选择适当的方法表示集合.

解: (1) 由于被 3 除余 1 的自然数有无数个, 所以此集合是无限集, 则选择用描述法表示. 又这些自然数常表示为 $3n+1 (n \in \mathbb{N})$, 所以可表示为 $\{x|x = 3n+1, n \in \mathbb{N}\}$.

(2) 由题意, 得满足条件的正整数有 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 则此集合中的元素有 7 个, 所以此集合是有限集, 用列举法表示为 $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

(3) 由于二次函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 图象上的点有无数个, 所以此集合是无限集, 则选择用描述法表示. 通常用有序数对 (x, y) 表示点, 那么满足条件的点组成的集合可表示为 $\{(x, y)|y = x^2 + 2x - 10\}$.

(4) 当 $ab < 0$ 时, $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|} = -1$;

当 $ab > 0$ 时, 则 $a > 0, b > 0$ 或 $a < 0, b < 0$.

若 $a > 0, b > 0$, 则有 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|} = 3$;

若 $a < 0, b < 0$, 则有 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|} = -1$.

$\therefore y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 的所有值组成的集合共有两个元素 -1 和 3, 此集合是有限集, 则用列举法表示为 $\{-1, 3\}$.



绿色通道

一般情况下, 常根据集合中所含元素的个数来选择表示集合的方法, 对所含元素较少的有限集宜采用列举法, 如 (2) (4); 对无限集或元素较多的有限集宜采用描述法, 如 (1) (3).



变式训练

3. 集合 $\{x \in \mathbb{N}_+ | x-3 < 2\}$ 的另一种表示法是 _____ ()

A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

B. $\{1, 2, 3, 4\}$

C. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

解析: $\{x \in \mathbb{N}_+ | x-3 < 2\} = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 故选 B.

答案: B

4. 用适当的形式表示下列集合:

(1) 绝对值不大于 3 的整数组成的集合: _____;

(2) 方程 $(3x-5)(x+2)(x^2+3) = 0$ 的实数解组成的

集合:_____;

(3)一次函数 $y=x+6$ 图象上所有点组成的集合:

解析:元素较少的有限集宜采用列举法;对无限集或元素较多的有限集宜采用描述法.(1)绝对值不大于3的整数表示为 $|x| \leq 3$, 是有限集,用列举法表示为 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; (2)方程 $(3x-5)(x+2)(x^2+3)=0$ 的实数解仅有两个, 分别是 $\frac{5}{3}, -2$, 用列举法表示为 $\{\frac{5}{3}, -2\}$; (3)一次函数 $y=x+6$ 图象上有无数个点, 用描述法表示为 $\{(x, y) | y=x+6\}$.

答案: (1) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (2) $\{\frac{5}{3}, -2\}$

(3) $\{(x, y) | y=x+6\}$

【例3】2007 山东滨城月考, 文 17 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 2x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若集合 A 中至多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

思路分析: 本题主要考查元素与集合之间的关系, 以及集合的表示法. 由描述法可知集合 A 是关于 x 的方程 $ax^2 - 2x - 1 = 0$ 的实数解集, 首先应考虑方程是不是一元二次方程.

解: 当 $a=0$ 时, 方程只有一个根 $-\frac{1}{2}$, 则 $a=0$ 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 则关于 x 的方程 $ax^2 - 2x - 1 = 0$ 是一元二次方程. 由于集合 A 中至多有一个元素, 则一元二次方程 $ax^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根或没有实数根. 所以 $\Delta = 4 + 4a \leq 0$, 解得 $a \leq -1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a=0, \text{ 或 } a \leq -1\}$.



绿色通道

将集合语言具体化为自然语言, 使它们描述的语言形象化、直观化, 是解决集合问题的常用技巧. 本题转化为关于 x 的方程 $ax^2 - 2x - 1 = 0$ 的实数根的个数问题, 这样就容易解决了.



变式训练

5. 已知集合 $\{x | ax = 0\}$ 是无限集, 则实数 $a =$ _____.

解析: 集合 $\{x | ax = 0\}$ 是关于 x 的方程 $ax = 0$ 的解集. 当 $a=0$ 时, 方程 $ax = 0$ 有无数解, 则 $a=0$ 符合题意; 当 $a \neq 0$ 时, 则关于 x 的方程 $ax = 0$ 是一元一次方程, 得 $x=0$, 即此时集合 $\{x | ax = 0\}$ 仅有一个元素, 则 $a \neq 0$ 不合题意. 故 $a=0$.

答案: 0

6. 设集合 $A = \{x | x = \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}\}$, 若 $x_1 \in A, x_2 \in A$, 则必有 _____ ()

A. $x_1 + x_2 \in A$

B. $x_1 x_2 \in A$

C. $x_1 - x_2 \in A$

D. $\frac{x_1}{x_2} \in A$

解析: 如果元素具有 $\frac{1}{3^n} (n \in \mathbb{N})$ 的形式, 则这个元素属于集合 A .

$\because x_1 \in A, x_2 \in A$, 可设 $x_1 = \frac{1}{3^m} (m \in \mathbb{N}), x_2 =$

$\frac{1}{3^k} (k \in \mathbb{N})$. 又 $x_1 x_2 = \frac{1}{3^m} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{m+k}}, m+k \in \mathbb{N}$,

$\therefore x_1 x_2 \in A$, 故选项 B 正确; 当 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$ 时,

$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \notin A$, 故选项 A 错误; 按同样方法可以

验证选项 C, D 也是错误的. 故选 B.

答案: B



教材链接

JIAOCAILIANJIE

1. 教材第 2 页思考:

上面的例(3)到例(8)也能组成集合吗? 它们的元素分别是什么?

答: 例(3)到例(8)也能组成集合.

例(3)的元素: 金星汽车厂 2003 年生产的每一辆汽车;

例(4)的元素: 2004 年 1 月 1 日之前与我国建立外交关系的每一个国家;

例(5)的元素: 每个正方形;

例(6)的元素: 到直线 l 的距离等于定长 d 的每一个点;

例(7)的元素: 方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的每个实数根, 即 1 与 2;

例(8)的元素: 新华中学 2004 年 9 月入学的每个高一学生.

2. 教材第 3 页思考:

判断以下元素的全体是否构成集合, 并说明理由:

(1) 大于 3 小于 11 的偶数;

(2) 我国的小河流.

答: (1) 大于 3 小于 11 的偶数组成集合, 这个集合的元素是 4, 6, 8, 10.

(2) 我国的小河流不能组成集合, 因为小河流没有明确的标准, 不符合集合元素的确定性, 所以不能组成集合.

3. 教材第 4 页思考:

(1) 你能用自然语言描述集合 $\{2, 4, 6, 8\}$ 吗?

(2) 你能用列举法表示不等式 $x - 7 < 3$ 的解集吗?

答: (1) 自然语言: 小于 10 的所有正偶数组成的集合, 或大于 1 且小于 9 的所有偶数组成的集合. (答案不惟一)

(2) 不能用列举法表示. 因为不等式 $x - 7 < 3$ 的解是 $x < 10$, 小于 10 的实数有无数个, 并且这些数是连续的, 所以不能用列举法表示. 列举法适用于表示元素个数是有限个且较少的集合.



4. 教材第5页思考:

(1) 结合上述实例,试比较用自然语言、列举法、描述法表示集合时,各自的特点和适用的对象.

(2) 自己举出几个集合的例子,并分别用自然语言、列举法、描述法表示出来.

答:(1) 自然语言的特点是富有表现力,是最基本的语言形式,但是具有多义性,有时难于表达,适用的范围非常广泛;列举法的特点是直观、明白,但有局限性,适用于元素个数较少的有限集;描述法具有抽象概括、普遍性的特点,适用于所含元素较多的有限集或无限集.

(2) 例如,自然语言:联合国常任理事国;列举法:{中国,美国,英国,法国,俄罗斯};描述法:{ $x \mid x$ 是联合国常任理事国}.



同步测控

TONGBUCEKONG



我夯基,我达标

1. 下列各组对象中不能构成集合的是..... ()

- A. 北京尼赏文化传播有限公司的全体员工
- B. 2006 年全国经济百强县
- C. 2007 年全国五一劳动奖章获得者
- D. 美国 NBA 的篮球明星

解析:根据集合元素的确定性来判断是否构成集合. 因为选项 A, B, C 中所给对象都是确定的,从而可以构成集合;而选项 D 中所给对象不确定,原因是没有具体的标准衡量一位美国 NBA 球员是否为篮球明星,所以不能构成集合. 故选 D.

答案:D

2. 下列关系中正确的是..... ()

- A. $0 \in \{0, 1\}$
- B. $1 \in \{0, 1\}$
- C. $0 \in \mathbb{N}$
- D. $0 \in \mathbb{N}_+$

解析:首先明确各个集合中的元素. $\{0, 1\}$ 中的元素是点,不是数, $\therefore$ 选项 A, B 错误;0 是自然数,不是正整数, $\therefore$ 选项 D 错误,选项 C 正确. 故选 C.

答案:C

3. 以下各组中的集合 M 与 N , 是不同集合的是 ()

- A. $M = \{1, 2, 3\}, N = \{3, 2, 1\}$
- B. $M = \{1, 2, 3, 4\}, N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 4\}$
- C. $M = \{1, 2\}, N = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$
- D. $M = \{-1, 1\}, N = \{x \mid x = (-1)^n\}$

解析:根据相同集合的定义来判断. 由集合元素的无序性,知选项 A 中 $M = N$; 选项 C 中 $N = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\} = M$; 选项 D 中 $N = \{x \mid x = (-1)^n\} = \{-1, 1\} = M$; 选项 B 中 $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 4\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \neq M$. 故选 B.

答案:B

4. 有以下四个命题:

- ①“所有相当小的正数”组成一个集合;
- ②由 1, 2, 3, 1, 9 组成的集合用列举法表示为 $\{1, 2, 3, 1, 9\}$;
- ③ $\{1, 3, 5, 7\}$ 与 $\{7, 5, 3, 1\}$ 表示同一个集合;
- ④函数 $y = -x$ 图象上的所有点组成的集合表示为 $\{y = -x\}$.

其中正确的是..... ()

- A. ①③
- B. ①②③
- C. ③
- D. ③④

解析:依据集合元素的性质和描述法及列举法的表示含义来判断. ①中“相当小的正数”的标准不明确,不能构成集合;②中元素 1 重复,不符合元素的互异性,构成的集合应是 $\{1, 2, 3, 9\}$;④的表示方法不对,由于点用有序实数对 (x, y) 来表示,所以正确的集合表示为 $\{(x, y) \mid y = -x\}$;③中依据集合元素的无序性知 $\{1, 3, 5, 7\}$ 与 $\{7, 5, 3, 1\}$ 表示同一个集合. 故选 C.

答案:C

5. 对于集合 $A = \{2, 4, 6\}$, 若 $a \in A$, 则 $6 - a \in A$, 那么实数 a 的值是.....

解析:需对 a 的值分类讨论. 当 $a = 2$ 时, $6 - a = 4 \in A$, 则 $a = 2$ 符合题意;当 $a = 4$ 时, $6 - a = 2 \in A$, 则 $a = 4$ 符合题意;当 $a = 6$ 时, $6 - a = 0 \notin A$, 则 $a = 6$ 不合题意,所以 $a = 2$ 或 4.

答案:2 或 4

6. 集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$ 可用列举法表示为.....

解析:首先依据题意确定 x 的值,则需对 x 分类讨论. 由 $|x| \leq 2, x \in \mathbb{Z}$, 得 $x = -2, -1, 0, 1, 2$, 则有 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 3, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$ 故用列举法表示为 $\{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$.

答案: $\{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

7. 用适当方法表示下列集合,并指出它们是有有限集还是无限集.

- (1) 不超过 10 的非负偶数的集合;
- (2) 大于 10 的所有自然数的集合.

思路分析:根据集合中元素的个数选择用列举法还是用描述法.

解:(1) 不超过 10 的非负偶数有 0, 2, 4, 6, 8, 10, 共 6 个元素,故可用列举法表示为 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, 这个集合是有限集;

(2) 大于 10 的所有自然数有无限个,故可用描述法表示为 $\{x \mid x > 10, x \in \mathbb{N}\}$, 这个集合是无限集.

8. 设集合 $A = \{x, x^2, xy\}$, 集合 $B = \{1, x, y\}$, 且集合 A 与集合 B 相等,求实数 x, y 的值.

思路分析:由集合 A 与集合 B 中的元素完全相同列

出关于 x, y 的方程组, 解方程组得实数 x, y 的值, 要注意依据集合元素的互异性验根.

解: 由题意, 得 $\begin{cases} x^2=1, \\ xy=y, \end{cases}$ ①

或 $\begin{cases} x^2=y, \\ xy=1. \end{cases}$ ②

解①, 得 $\begin{cases} x=1, \\ y \in \mathbf{R}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$ 经检验 $\begin{cases} x=1, \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$ 不合

题意, 舍去, 则 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

解②, 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 经检验 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 不合题意, 舍去.

综上所述可得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$



我综合, 我发展

9. 2006 山东高考, 1 定义集合运算: $A \odot B = \{z \mid z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ()

A. 0

B. 6

C. 12

D. 18

解析: 由于 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, $x \in A, y \in B$, 故需对 x, y 的取值分类讨论. 当 $x=0, y \in B$ 时, $z=0$; 当 $x=1, y=2$ 时, $z=6$; 当 $x=1, y=3$ 时, $z=12$. 故所有元素之和为 $0+6+12=18$. 故选 D.

答案: D

10. 集合 $\left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \frac{27}{4}, \frac{81}{5}, \frac{243}{6}\right\}$ 可用描述法表示为 _____.

解析: 观察集合中元素的规律即元素的共同特征, 再用描述法表示.

$\frac{3}{2} = \frac{3^1}{1+1}, \frac{9}{3} = \frac{3^2}{2+1}, \frac{27}{4} = \frac{3^3}{3+1}, \frac{81}{5} = \frac{3^4}{4+1}, \frac{243}{6} = \frac{3^5}{5+1}$, 则元素的共同特征是 $\frac{3^n}{n+1} (n \in \mathbf{N}_+, n < 6)$, 所以用描述法表示为 $\left\{x \mid x = \frac{3^n}{n+1}, n \in \mathbf{N}_+, n < 6\right\}$.

答案: $\left\{x \mid x = \frac{3^n}{n+1}, n \in \mathbf{N}_+, n < 6\right\}$

11. 由 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合, 元素的个数最多为几个?

思路分析: 讨论这几个数的大小关系, 根据集合元素的互异性来确定.

解: 设由 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合记为 M . $\because \sqrt{x^2} = |x|, -\sqrt[3]{x^3} = -x, \therefore$ 由集合元素的互异性, 知集合 M 是由 $x, -x, |x|$ 组成的.

又 $\because |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 知 $|x|$ 必与 $x, -x$ 中的一个相等, $\therefore$ 集合 M 是由 $x, -x$ 组成的集合. 当 $x \neq$

$-x$, 即 $x \neq 0$ 时, 集合 M 中元素的个数最多有两个, 分别是 $x, -x$. 因此由 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合元素的个数最多为 2.

12. 集合 $\{y \mid y = x^2 + 1\}, \{x \mid y = x^2 + 1\}, \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 三者之间有什么关系?

思路分析: 依据描述法的特点, 明确集合中的元素是点还是实数, 其元素具有什么特征.

解: 集合 $\{y \mid y = x^2 + 1\}$ 中的代表符号是 y , 满足 $y = x^2 + 1$, 即集合 $\{y \mid y = x^2 + 1\}$ 是数集, 是函数 $y = x^2 + 1$ 的所有函数值组成的集合; 集合 $\{x \mid y = x^2 + 1\}$ 中的代表符号是 x , 满足 $y = x^2 + 1$, 即集合 $\{x \mid y = x^2 + 1\}$ 是数集, 是函数 $y = x^2 + 1$ 的自变量的所有取值组成的集合; 集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 中的代表符号是 (x, y) , 为有序数对, 满足 $y = x^2 + 1$, 即集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 是点集, 是函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上所有点组成的集合.

所以集合 $\{y \mid y = x^2 + 1\}$ 和 $\{x \mid y = x^2 + 1\}$ 均是数集, 而集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 是点集. 集合 $\{y \mid y = x^2 + 1\}$ 是函数 $y = x^2 + 1$ 的所有函数值组成的集合, 而集合 $\{x \mid y = x^2 + 1\}$ 是函数 $y = x^2 + 1$ 的自变量的所有取值组成的集合, 集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$ 是函数 $y = x^2 + 1$ 的图象上所有点组成的集合.



我创新, 我超越

13. 定义 $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$, 若 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{2, 3, 6\}$, 试用列举法表示集合 $N - M$.

思路分析: 由已知 $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$, 知 $A - B$ 即集合 A 中不属于集合 B 的元素组成的集合, 也就是集合 A 中除去集合 A 和集合 B 的公共元素组成的集合.

解: 由题意, 得 $N - M$ 是集合 N 中除去集合 M 和集合 N 的公共元素组成的集合. 观察集合 M, N , 它们的公共元素是 2, 3. 集合 N 中除去元素 2, 3 还剩下元素 6, 则 $N - M = \{6\}$.



教研中心

JIAOYANZHONGXIN

教学指导

一、课标要求

1. 通过实例了解集合的含义, 体会元素与集合的从属关系, 能选择不同的语言形式表示具体的集合, 提高语言转换和抽象概括的能力, 树立用集合语言表示数学内容的意识.

2. 知道常用数集及其专用符号, 了解集合元素的确定性、互异性、无序性, 并能够用其解决有关问题, 提高学生分析、解决问题的能力, 培养应用意识.

二、教学建议

集合论是现代数学的一个重要的基础. 在高中数学

中,集合的初步知识与其他内容有着密切的联系,是学习、掌握和使用数学语言的基础。教材从学生熟悉的集合(自然数的集合、有理数的集合、不等式的解集等)出发,结合实例给出元素、集合的含义,教材注重体现逻辑思考的方法,如抽象、概括等。

本节的重点是集合的含义与表示,其突破方法是结合学生的已有知识经验,通过大量的实例来学习;本节的难点是表示具体的集合时,如何从列举法和描述法中作出恰当的选择,其突破方法是对同一个集合用不同的方法来表示,具体体会它们的各自特点,归纳、总结各自的适用范围。

值得注意的问题:由于本小节的新概念、新符号较多,建议教学时先引导学生阅读教材,然后进行交流,让学生在阅读与交流中理解概念并熟悉新符号的使用。在信息技术条件较好的学校,可以利用网络平台让学生交流学习后的认识;也可以由教师给出问题,让学生阅读教材后回答问题,再由教师给出评价。这样做的目的,在于培养学生主动学习的习惯,提高阅读与理解、合作与交流的能力。在处理集合问题时,根据需要,及时提示学生运用集合语言进行表述。在安排训练时,建议把握好分寸,不宜搞偏题、怪题。

本节教学时间约需 1 课时。

资源参考

走近大师

为科学而疯的人——康托尔

康托尔(Cantor, Georg)(1845~1918),德国数学家,集合论的创立人。康托尔自幼对数学有浓厚兴趣,23岁获博士学位,以后一直从事数学教学与研究。他所创立的集合论已被公认为全部数学的基础。

1874年,康托尔的有关无穷的概念震撼了数学界。康

托尔凭借古代与中世纪哲学著作中关于无限的思想而导出了关于数的本质的新思想模式,建立了处理数学中无限的基本技巧,从而极大地推动了分析与逻辑的发展。他发现了惊人的结果:有理数是可列的,而全体实数是不可列的。

由于在研究无穷时往往推出一些合乎逻辑的但又很荒谬的结果(称为“悖论”),许多大数学家唯恐陷进去而采取退避三舍的态度。在1874~1876年期间,30岁的康托尔向神秘的无穷宣战。他靠着辛勤的汗水,成功地证明了一条直线上的点能够和一个平面上的点一一对应,也能和空间中的点一一对应。这样看起来,1厘米长线段内的点与太平洋面上的点,以及整个地球内部的点都“一样多”。后几年,康托尔对这类“无穷集合”问题发表了一系列文章,通过严格证明得出了许多惊人的结论。

康托尔的创造性工作与传统的数学观念发生了尖锐冲突,遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂。有人说,康托尔的集合论是一种“疾病”,康托尔的概念是“雾中之雾”,甚至说康托尔是“疯子”。

来自数学权威们的巨大精神压力终于摧垮了康托尔,使他心力交瘁,患了精神分裂症,被送进精神病医院。他在集合论方面许多非常出色的成果,都是在精神病发作的间歇时期获得的。

真金不怕火炼,康托尔的思想终于大放光彩。1897年举行的第一次国际数学家会议上,他的成就得到承认,伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作。”可是这时康托尔仍然神志恍惚,不能从人们的崇敬中得到安慰和喜悦。1918年1月6日,康托尔病逝。

1.1.2 集合间的基本关系



自主整理

ZIZHUZHENGLI

1. Venn图

(1)定义:在数学中,经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为Venn图,这种表示集合的方法叫做图示法。

(2)适用范围:有限集且元素个数不太多,有时也用来分析几个无限集之间的包含与被包含关系。

(3)使用方法:把元素写在封闭曲线的内部。

2. 子集

(1)定义:一般地,对于两个集合A与B,如果集合A的任意一个元素都是集合B的元素,我们就说这两个集合之间有包含关系,称集合A为集合B的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),读作“A含于B”(或“B包含A”)。

(2)图示:当 $A \subseteq B$ 时,用Venn图表示,如图

1-1-2-1(1)(2)所示。

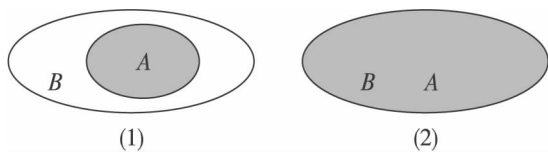


图 1-1-2-1

3. 集合相等

(1)定义1:只要构成两个集合的元素是一样的,即这两个集合中的元素完全相同,就称这两个集合相等。

(2)定义2:如果集合A是集合B的子集,且集合B是集合A的子集,那么集合A与集合B相等,记作 $A=B$ 。

(3)图示:当 $A=B$ 时,用Venn图表示,如图1-1-2-2所示。

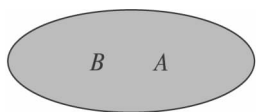


图 1-1-2-2

4. 真子集

(1) 定义: 如果集合 $A \subseteq B$, 且存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 我们就称集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

(2) 图示: 当 $A \subsetneq B$ 时, 用 Venn 图表示, 如图 1-1-2-3 所示.

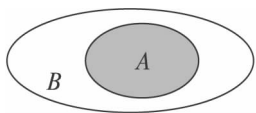


图 1-1-2-3

5. 空集

(1) 定义: 我们把不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$.

(2) 规定: 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$; 空集是任何非空集合的真子集, 即 $\emptyset \subsetneq A (A \neq \emptyset)$.



高手笔记

GAOSHOU BILU

1. 当集合 A 不含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A) 时, 记作 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\supseteq A$).

2. 判断集合相等的方法: (1) 当集合 A 与集合 B 中元素完全相同时, 有 $A=B$;

(2) $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$.

3. 子集的性质: $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$; $A \subsetneq B$, 且 $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$; 当 $A \subseteq B$ 时, 则 $A=B$ 或 $A \subsetneq B$, 所以当集合 A 是集合 B 的子集时, A 不一定是 B 的真子集; 但当集合 A 是集合 B 的真子集时, A 一定是 B 的子集.

4. 判断集合间的关系的关键是弄清集合由哪些元素组成, 也就是把较为抽象的集合具体化、形象化, 这就要求熟练地用自然语言、符号语言 (列举法和描述法)、图形语言 (Venn 图) 来表示集合.

5. 在具体问题中, 特别是含有字母的问题中一定要注意空集 ($\emptyset$) 的存在与否, 以及元素互异性的讨论.

6. 要注意分类讨论、数形结合等数学思想方法的应用.



名师解惑

MINGSHI JIEHUO

1. 空集中没有元素, 怎么还是集合?

剖析: 产生这种想法的原因是没有了解建立空集这个概念的背景, 其突破方法是通过实例来体会. 例如, 方程的

解能够组成集合, 这个集合叫做方程的解集. 对于 $\frac{1}{x}=0$, $x^2+4=0$ 等方程来说, 它们的解集中没有元素. 也就是说确实存在没有任何元素的集合, 那么如何用数学符号来刻画没有元素的集合呢? 为此引进了空集的概念. 把不含任何元素的集合叫做空集. 这就是建立空集这个概念的背景. 由此看出, 空集的概念是一个规定. 又例如, 不等式 $|x|<0$ 的解集也是不含任何元素, 就称不等式 $|x|<0$ 的解集是空集.

2. 符号 $\in$ 和 $\subseteq$ 有什么区别?

剖析: 在以往的学习中, 很多同学经常把这两个符号混淆, 其突破方法是准确把握这两个符号的含义及其应用范围, 并加以对比. 符号 $\in$ 只能适用于元素与集合之间, 其左边只能写元素, 其右边只能写集合, 说明左边的元素属于右边的集合, 表示元素与集合之间的关系, 如 $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; 符号 $\subseteq$ 只能适用于集合与集合之间, 其左右两边都必须写集合, 说明左边的集合是右边集合的子集, 左边集合的元素均属于右边的集合, 如 $\{1\} \subseteq \{1, 0\}$, $\{x|x<2\} \subseteq \{x|x<3\}$ 等等.



讲练互动

JIANGLIANHUODONG

【例题 1】2006 上海高考, 理 1 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.

解析: 本题主要考查集合和子集的概念, 以及集合元素的互异性. $\because B \subseteq A, \therefore$ 集合 B 中的元素都在集合 A 中. 由集合元素的互异性, 得 $m^2 = -1$ (舍去), 或 $m^2 = 2m-1$, 解得 $m=1$.

答案: 1



绿色通道

已知两集合之间关系解决其他问题时, 要明确集合中的元素, 通常依据相关的定义, 观察这两个集合元素的关系, 转化为解方程或解不等式.



黑色陷阱

本题容易出现 $m^2=3$, 其原因是忽视了集合元素的互异性. 避免此类错误的方法是解得 m 的值后, 再代入验证.



变式训练

1. 已知集合 $M = \{x|2-x<0\}$, 集合 $N = \{x|ax=1\}$, 若 $N \not\subseteq M$, 求实数 a 的取值范围.

思路分析: 集合 N 是关于 x 的方程 $ax=1$ 的解集, 集合 $M = \{x|x>2\} \neq \emptyset$, 由于 $N \not\subseteq M$, 则 $N = \emptyset$, 或 $N \neq \emptyset$, 要对集合 N 是否为空集分类讨论.

解: 由题意, 得 $M = \{x|x>2\} \neq \emptyset$, 则 $N = \emptyset$, 或 $N \neq \emptyset$.

当 $N = \emptyset$ 时, 关于 x 的方程 $ax=1$ 无解, 则有 $a=0$;



当 $N \neq \emptyset$ 时, 关于 x 的方程 $ax=1$ 有解, 则 $a \neq 0$, 此时 $x = \frac{1}{a}$.

又 $\because N \subsetneq M, \therefore \frac{1}{a} \in M, \therefore \frac{1}{a} > 2, \therefore 0 < a < \frac{1}{2}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $a=0$, 或 $0 < a < \frac{1}{2}$.

【例题2】(1) 分别写出下列各集合的子集及其个数: $\emptyset$,

$\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$.

(2) 由(1)你发现当集合 M 中含有 n 个元素, 则集合 M 有多少个子集?

思路分析: 本题主要考查子集的概念以及分类讨论和归纳推理的能力. (1) 按子集所含元素的个数分类写出子集; (2) 由(1)总结当 $n=0, n=1, n=2, n=3$ 时子集的个数规律, 归纳猜想出结论.

解: (1) $\emptyset$ 的子集: $\emptyset$, 即 $\emptyset$ 有 1 个子集;

$\{a\}$ 的子集: $\emptyset, \{a\}$, 即 $\{a\}$ 有 2 个子集;

$\{a, b\}$ 的子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$, 即 $\{a, b\}$ 有 4 个子集;

$\{a, b, c\}$ 的子集有: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$, 即 $\{a, b, c\}$ 有 8 个子集.

(2) 由(1)可得, 当 $n=0$ 时, 有 $1=2^0$ 个子集;

当 $n=1$ 时, 有 $2=2^1$ 个子集;

当 $n=2$ 时, 有 $4=2^2$ 个子集;

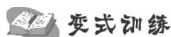
当 $n=3$ 时, 有 $8=2^3$ 个子集;

因此含有 n 个元素的集合 M 有 2^n 个子集.



绿色通道

写一个集合的子集时, 按子集中元素的个数多少, 以一定顺序来写不易发生重复和遗漏现象. 集合 M 中含有 n 个元素, 则集合 M 有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 记住这个结论, 可以提高解题速度.



变式训练

2. 2007 山东济宁一模, 理 1 已知集合 $P = \{1, 2\}$, 那么满足 $Q \subseteq P$ 的集合 Q 的个数是 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

解析: 集合 Q 的个数等于集合 P 子集的个数. 集合 $P = \{1, 2\}$ 含有 2 个元素, 其子集有 $2^2 = 4$ 个, 所以集合 Q 有 4 个. 故选 A.

答案: A

【例题3】已知集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x |$

$x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 M, N 的关系是 ... ()

A. $M \subseteq N$ B. $M \subsetneq N$

C. $N \subseteq M$ D. $N \subsetneq M$

解析: 本题主要考查集合间的关系. 明确集合 M, N 中的元素, 依据有关概念来判断. 思路 1: 用列举法分别表示集

合 M, N . 集合 $M = \{\dots, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \dots\}$, 集合

$N = \{\dots, -\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3},$

$\frac{13}{6}, \dots\}$, 则有 $M \subsetneq N$; 思路 2: 设 $n = 2m$, 或 $2m + 1, m \in$

$\mathbb{Z}$, 则有 $N = \{x | x = \frac{2m}{2} - \frac{1}{3}, \text{或 } x = \frac{2m+1}{2} - \frac{1}{3}, m \in$

$\mathbb{Z}\} = \{x | x = m - \frac{1}{3}, \text{或 } x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$, $\therefore M \subsetneq N$.

故选 B.

答案: B



绿色通道

判断两个集合间的关系时, 主要是根据这两个集合中元素的特征, 结合有关定义来判断. 对于用列举法表示的集合, 只需要观察其元素即可得它们间的关系; 对于用描述法表示的集合, 要从所含元素的特征来分析, 分析之前可以用列举法多取几个元素来估计它们之间可能有什么关系, 然后再加以证明. 当 $M \subseteq N$ 和 $M \subsetneq N$ 均成立时, $M \subsetneq N$ 最准确反映集合 M, N 的关系.



变式训练

3. 已知集合 $M = \{x | y = x + 1, y > 1\}$, 集合 $N = \{y | y = x + 1, x > -1\}$, 则集合 M, N 的关系是 ()

A. $M \subseteq N$

B. $N \subseteq M$

C. $M = N$

D. $N \subsetneq M$

解析: 集合 $M = \{x | x > 0\}$, 集合 $N = \{y | y > 0\}$, 则有 $M \subseteq N$, 且 $N \subseteq M$, 所以 $M = N$. 故选 C.

答案: C

4. 2007 广东中山月考, 理 1 已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{y | x^2 + y^2 = 1, x \in A\}$, 则 ()

A. $A = B$

B. $A \subsetneq B$

C. $B \subsetneq A$

D. $B \subseteq A$

解析: $\because x \in A, \therefore x = 0$, 或 $x = 1$. 又 $\because x^2 + y^2 = 1$,

$\therefore x = 0, y = \pm 1$, 或 $x = 1, y = 0. \therefore B = \{-1, 0, 1\}$.

$\therefore A \subsetneq B$. 故选 B.

答案: B



教材链接

JIAOCAILIANJIE

1. 教材第 6 页思考:

实数有相等关系、大小关系, 如 $5 = 5, 5 < 7, 5 > 3$, 等等. 类比实数之间的关系, 你会想到集合之间的什么关系?

答: 可以想到: 集合之间有相等关系、包含关系; 一个集合中的元素个数少于另一个集合中的元素个数, 并且这个集合中的任何一个元素都在另一个集合中; 一个集合中的元素个数多于另一个集合中的元素个数, 并且这个集合中的元素包含另一个集合中的所有元素.

2. 教材第 6 页问题:

① 请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例.

答: 例如集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{-1, 0, 1, 2, 3,$

4,5},则集合 A 包含于集合 B ,集合 B 包含集合 A ;又例如 $A=\{\text{三角形}\}$, $B=\{\text{直角三角形}\}$,则集合 A 包含集合 B ,集合 B 包含于集合 A ,等等.

②与实数中的结论“若 $a \geq b$,且 $b \geq a$,则 $a=b$ ”相类比,你有什么体会?

答:在集合中有结论:若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则 $A=B$.由此可得,要证集合 $A=B$,可转化为证明 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$.

③你能举出几个空集的例子吗?

答:例如集合 $\{x|3 < x < 1\} = \emptyset$,集合 $\{x|\frac{1}{x^2+1}=0\} = \emptyset$,既是有理数又是无理数的实数组成的集合为空集,等等.

3.教材第7页思考:

包含关系 $\{a\} \subseteq A$ 与属于关系 $a \in A$ 有什么区别?试结合实例作出解释.

答:区别是包含关系 $\{a\} \subseteq A$ 是集合之间的关系,而属于关系 $a \in A$ 是元素与集合之间的关系.例如:包含关系 $\{2\} \subseteq \{0,1,2,3\}$ 与属于关系 $2 \in \{0,1,2,3\}$, $\{2\} \subseteq \{0,1,2,3\}$ 表示集合 $\{2\}$ 包含于集合 $\{0,1,2,3\}$,而 $2 \in \{0,1,2,3\}$ 表示元素 2 属于集合 $\{0,1,2,3\}$.

同步测控

我夯基,我达标

1. 2007 山东济南一模,文 1 集合 $A=\{x|0 \leq x < 3, \text{且 } x \in \mathbb{N}\}$ 的真子集的个数是 ()

A. 16 B. 8 C. 7 D. 4

解析:根据集合 A 中所含元素的个数来判断. $A=\{x|0 \leq x < 3, \text{且 } x \in \mathbb{N}\} = \{0,1,2\}$,则 A 的真子集有 $2^3 - 1 = 7$ 个.故选 C.

答案:C

2. 已知集合 $M=\{1\}$, $N=\{1,2,3\}$,能够准确表示集合 M 与 N 间的关系的是 ()

A. $M < N$ B. $M \in N$
C. $M \subseteq N$ D. $M \subsetneq N$

解析:集合 M 中元素都在集合 N 中,但是 N 中元素 $2 \notin M$, $\therefore M \subsetneq N$. 故选 D.

答案:D

3. 设集合 $M=\{x|x < \sqrt{10}\}$, $a=\sqrt{2}-\sqrt{3}$,则 ()

A. $\{a\} \subsetneq M$ B. $\{a\} = M$
C. $a \notin M$ D. $a \subseteq M$

解析: $\because a=\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0 < \sqrt{10}$, $\therefore a \in M$, $\{a\} \subsetneq M$. 故选 A.

答案:A

4. 0 _____ $\{0\}$ _____ $\emptyset$. (填上最适当的符号)

解析: 0 和 $\{0\}$ 之间是元素与集合的关系,则 $0 \in \{0\}$; $\{0\}$ 和 $\emptyset$ 之间是集合间的关系,则 $\{0\} \supsetneq \emptyset$.

答案: $\in$ $\supsetneq$

5. 已知集合 $A=\{-1,3,m\}$, $B=\{3,4\}$,若 $B \subseteq A$,则实数 $m=$ _____.

解析: $\because B \subseteq A, 4 \in B, \therefore 4 \in A. \therefore m=4$.

答案:4

6. 图 1-1-2-4 所示的 Venn 图中反映的是四边形、梯形、平行四边形、菱形、正方形这五种几何图形之间的关系,问集合 A, B, C, D, E 分别是哪种图形的集合?

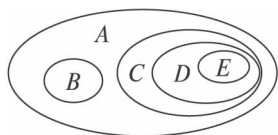


图 1-1-2-4

思路分析:结合 Venn 图,利用平面几何中梯形、平行四边形、菱形、正方形的定义来确定.

解:梯形、平行四边形、菱形、正方形都是四边形,故 $A=\{\text{四边形}\}$;梯形不是平行四边形,而菱形、正方形是平行四边形,故 $B=\{\text{梯形}\}$, $C=\{\text{平行四边形}\}$;正方形是菱形,故 $D=\{\text{菱形}\}$, $E=\{\text{正方形}\}$.

7. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x+a=0, a \in \mathbb{R}\}$,若 A 中元素至多只有一个,求实数 a 的取值范围.

思路分析:集合 A 是关于 x 的方程 $x^2-2x+a=0$ 的解集,故按集合 $A=\emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$ 分类讨论.

解:当 $A=\emptyset$ 时,关于 x 的方程 $x^2-2x+a=0$ 无解,则 $\Delta=(-2)^2-4a < 0$,解得 $a > 1$;

当 $A \neq \emptyset$ 时,关于 x 的方程 $x^2-2x+a=0$ 有两个相等的实数解,则 $\Delta=(-2)^2-4a=0$,解得 $a=1$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $a \geq 1$.

我综合,我发展

8. 已知集合 $A \subsetneq \{2,3,7\}$,且 A 中至多有一个奇数,则这样的集合 A 有 _____ ()

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

解析:对集合 A 是否含奇数分类讨论.当集合 A 中不含奇数时, $A=\emptyset$ 或 $\{2\}$;当集合 A 仅含有一个奇数时, $A=\{3\}$ 或 $\{7\}$ 或 $\{2,3\}$ 或 $\{2,7\}$. 所以这样的集合 A 共有 $2+4=6$ (个). 故选 D.

答案:D

9. 已知集合 $A=\{x|0 < x < 3\}$,集合 $B=\{x|m < x < 4-m\}$,且 $B \subseteq A$,则实数 m 满足的条件是 _____.

解析:集合 B 是关于 x 的不等式 $m < x < 4-m$ 的解集,要对集合 B 是否为空集分类讨论. $\because B \subseteq A$,

$\therefore B=\emptyset$,或 $B \neq \emptyset$. 当 $B=\emptyset$ 时, $m \geq 4-m$,则此

时 $m \geq 2$;当 $B \neq \emptyset$ 时,则有 $\begin{cases} m < 4-m, \\ m > 0, \\ 4-m < 3. \end{cases}$ 解得 $1 < m < 2$.

2. 综上可得,实数 m 满足的条件是 $1 < m < 2$,或 $m \geq 2$,即 $m > 1$.



答案: $m > 1$

10. 集合 $A = \{x | x = 3m - 2, m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x | x = 6m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 A, B, C 的关系是_____.

解析:根据这三个集合中元素的特征来讨论它们之间的关系. $A = \{x | x = 3m - 2, m \in \mathbb{Z}\}$, 设 $m - 1 = k$, 则 $k \in \mathbb{Z}$, $\therefore A = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$. $\therefore A = B$. 又集合 $C = \{x | x = 6m + 1, m \in \mathbb{Z}\} = \{x | x = 3 \times 2m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, 设 $2m = n$, 则 n 为偶数, 则 $C = \{x | x = 3n + 1, n \text{ 是偶数}\}$, $\therefore C \subsetneq B$, 即集合 A, B, C 的关系是 $C \subsetneq A = B$.

答案: $C \subsetneq A = B$

11. 试写出满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的集合 A .

思路分析:按集合 A 中所含元素的个数分类讨论.

解: $\because \{a, b\} \subseteq A$, $\therefore$ 集合 A 中至少含有 a, b 两个元素. 又 $A \subseteq \{a, b, c, d\}$, $\therefore$ 集合 A 中最多含有三个元素. $\therefore A = \{a, b\}$ 或 $\{a, b, c\}$ 或 $\{a, b, d\}$.

12. 已知 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 4n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 求证: $B \subseteq A$.

思路分析:转化为证明 $B \subseteq A$, 且在集合 A 中存在一个元素不属于集合 B .

解:设对任意 $x \in B$, 则存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使 $x = 4k + 2$,

即 $x = 4k + 2 = 2(2k + 1)$.

$\therefore k \in \mathbb{Z}$, $\therefore 2k + 1 \in \mathbb{Z}$. $\therefore x \in A$. $\therefore B \subseteq A$.

很明显 $4 \in A$, 令 $4n + 2 = 4$, 则有 $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$,

$\therefore 4 \notin B$,

即集合 A 中存在一个元素 4 不在集合 B 中.

$\therefore B \subsetneq A$.

13. 2007 山东滨州月考,理 17 已知 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 8 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + a^2 - 12 = 0\}$, $B \subseteq A$, 且 $B \neq \emptyset$, 试求实数 a 的取值集合.

思路分析:集合 A 是方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 的解集, 集合 B 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + a^2 - 12 = 0$ 的解集, 由 $B \subseteq A$, 且 $B \neq \emptyset$ 按集合 B 中含有元素的个数分类讨论, 分别列出关于 a 的方程, 解方程即可得实数 a 的值.

解:由题意,得 $A = \{-2, 4\}$, 集合 B 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + a^2 - 12 = 0$ 的解集.

$\because B \subseteq A$, 且 $B \neq \emptyset$, $\therefore B = \{-2\}$ 或 $\{4\}$ 或 $\{-2, 4\}$.

当集合 B 中含有一个元素时, 则有 $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 12) = 0$, 解得 $a = \pm 4$.

若 $a = 4$, 则 $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x + 4 = 0\} = \{-2\}$, 则 $a = 4$ 符合题意;

若 $a = -4$, 则 $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$, 则 $a = -4$ 不合题意.

当集合 B 中含有两个元素, 即 $B = \{-2, 4\}$ 时, 则 $-2, 4$ 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + a^2 - 12 = 0$ 的解.

$\therefore \begin{cases} -2 + 4 = -a, \\ -2 \times 4 = a^2 - 12. \end{cases}$

解得 $a = -2$.

综上可得 $a = 4$, 或 $a = -2$, 即实数 a 的取值集合是 $\{-2, 4\}$.



我创新, 我超越

14. 设集合 $A = \{x | |x|^2 - 3|x| + 2 = 0\}$, $B = \{x | (a - 2)x = 2\}$, 则满足 $B \subseteq A$ 的 a 的值共有 _____ ()
A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

解析:对集合 B 所含元素的个数分类讨论. 由已知得 $A = \{x | |x| = 1, \text{ 或 } |x| = 2\} = \{-2, -1, 1, 2\}$, 集合 B 是关于 x 的方程 $(a - 2)x = 2$ 的解集.

$\because B \subseteq A$, $\therefore B = \emptyset$, 或 $B \neq \emptyset$. 当 $B = \emptyset$ 时, 关于 x 的方程 $(a - 2)x = 2$ 无解, $\therefore a - 2 = 0$. $\therefore a = 2$; 当 $B \neq \emptyset$

时, 关于 x 的方程 $(a - 2)x = 2$ 的解 $x = \frac{2}{a - 2} \in A$,

$\therefore \frac{2}{a - 2} = -2$, 或 $\frac{2}{a - 2} = -1$, 或 $\frac{2}{a - 2} = 1$, 或 $\frac{2}{a - 2} = 2$, 解得 $a = 1$ 或 0 或 4 或 3 . 综上所述, a 的值共有 5 个.

故选 D.

答案:D



教研中心

JIAOYANZHONGXIN

教学指导

一、课标要求

1. 理解集合之间包含与相等的含义, 能识别给定集合的子集, 能判断给定集合间的关系, 提高利用类比发现新结论的能力.

2. 在具体情境中, 了解空集的含义, 掌握并能使用 Venn 图表达集合的关系, 加强学生从具体到抽象的思维能力, 树立数形结合的思想.

二、教学建议

教材从学生熟悉的实数间相等和大小的关系出发, 通过类比引入集合间的关系, 同时, 结合相关内容介绍子集、Venn 图、真子集、空集等概念. 在安排这部分内容时, 教材注重体现逻辑思考的方法, 如类比等.

本节的重点是理解集合间包含与相等的含义, 其突破方法是让学生多结合实例, 类比实数间的大小关系来学习集合间的包含关系; 本节的难点是理解空集的含义, 其突破方法是教学时多举些方程无解、不等式无解这样的例子.

值得注意的问题: 在讲解集合间的关系时, 建议重视使用 Venn 图, 这有助于学生体会直观图示对理解抽象概念的作用. 随着学习的深入, 集合符号越来越多, 建议教学时引导学生区分一些容易混淆的关系和符号, 例如 $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别.

本节教学时间约需 1 课时.



资源参考

数学史探源

第三次数学危机

1902年,英国数学家罗素发现了一个集合悖论.罗素把集合分成两种:第一种集合,集合本身不是它的元素,即 $A \notin A$;第二种集合,集合本身是它的一个元素 $A \in A$,例如一切集合所组成的集合.那么对于任何一个集合 B ,不是第一种集合就是第二种集合.

假设第一种集合的全体构成一个集合 M ,那么 M 属于第一种集合还是属于第二种集合.如果 M 属于第一种集合,那么 M 应该是 M 的一个元素,即 $M \in M$,但是满足 $M \in M$ 关系的集合应属于第二种集合,出现矛盾.如果 M 属于第二种集合,那么 M 应该是满足 $M \in M$ 的关系,这样 M 又是属于第一种集合,矛盾.这就是著名的罗素悖论.例如, $\{1\}$ 和 $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$,到底是 $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ 还是 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ 呢?

为了便于理解,罗素把集合论悖论通俗形象地比喻为一个理发师的悖论:在村里有一位手艺高超的理发师,他只给村里一切不给自己刮脸的人刮脸.那么,他给不给自己刮脸呢?如果他不给自己刮脸,他是个不给自己刮脸的人,他应当给自己刮脸;如果他给自己刮脸,由于他只给不给自己刮脸的人刮脸,他就不应当给自己刮脸了.他应该如何呢?

这个悖论用数学语言应该这样叙述:具有某种相同属性的事物的全体称为集合,组成该集合的每个事物称为元素.但集合一般可分为两大类,一类称为本身分子集,另一

类称为非本身分子集.例如由许多图书馆所构成的集合 M 仍然是图书馆,所以 M 是属于它的元素的集合,即本身分子集,我们权且称之为甲类.而由全体自然数所构成的集合 N 就不再是自然数,所以 N 是自己不属于它的元素的集合,即非本身分子集,我们称之为乙类.那么罗素问:乙类集合的全体也是一个集合,它属于哪一类?对这个问题的回答就如同理发师对悖论的回答一样左右为难,自相矛盾.

罗素悖论像一颗重磅炸弹,震撼了数学界,使整个数学大厦动摇了.号称天衣无缝、绝对严密的精确数学居然在基础问题上就明显地自相矛盾.这使许多数学家感到惶恐不安,为此还引起了激烈的争论,形成了许多派别.这就是数学史上的第三次数学危机.这场危机激励许多数学家奋力探索如何进一步建立严格的数学基础.于是有的数学家提出应为集合论建立一种公理系统,并规定,凡是超出公理所允许的限度而构造出来的集合,例如由一切集合而组成的集合等等,在公理系统中一概不予承认.所以现在的集合论中禁止一个集合是此集合本身的元素,例如不讨论 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$,集合 $\{a\}$ 与集合 $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ 的关系,等等.这样就把罗素悖论等一些已经发现的逻辑和数学悖论全部排除干净了.

这场危机引发的争论和探讨至今没有结束,但数学作为一门科学没有因危机而止步,反而因危机引发的争论和思考获得了进一步的发展,数学变得更加成熟了.然而,矛盾和人们意想不到的事仍然不断出现,而且今后仍然会这样.

1.1.3 集合的基本运算



自主整理

ZIZHUZHENGLI

1. 并集

(1)定义:一般地,由属于集合 A 或集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$,因此 $A \cup B$ 是由两集合 A 与 B 的“所有”元素组成的集合.

(2)图示:用 Venn 图表示,如图 1-1-3-1(1)(2)所示.

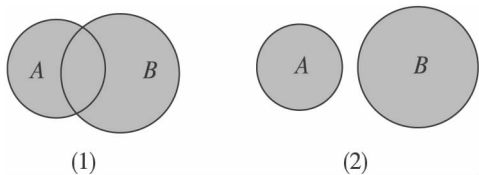


图 1-1-3-1

2. 交集

(1)定义:一般地,由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.因此 $A \cap B$ 是由两集合 A 与 B 的“公共”元素所组成的集合.

(2)图示:用 Venn 图表示,如图 1-1-3-2 所示.

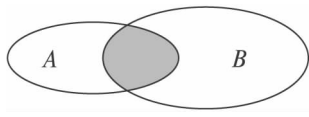


图 1-1-3-2

3. 补集

(1)全集:一般地,如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集,常用 U 来表示,全集具有相对性.

(2)补集:对于一个集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$,也就是说从全集 U 中取出集合 A 的全部元素之后,所有剩余的元素组成的集合就是 $\complement_U A$.

(3)图示:用 Venn 图表示全集和补集,如图 1-1-3-3 所示.

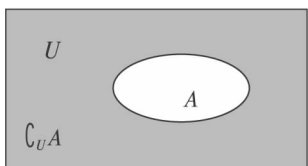


图 1-1-3-3



高手笔记

GAOSHOUNIJI

1. 集合的运算性质:

(1) $A \cup B = B \cup A, A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B), A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B, A \cup (C_U A) = U.$

(2) $A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \cap (C_U A) = \emptyset.$

(3) $C_U (C_U A) = A, C_U U = \emptyset, C_U \emptyset = U, (C_U A) \cup (C_U B) = C_U (A \cap B), (C_U A) \cap (C_U B) = C_U (A \cup B).$

2. 通过较多的具体实例来体会和直观感受集合的运算,避免交集、并集、补集混淆不清;在讨论参数 a 的范围时,对各种情况得出的参数 a 的范围,要分清“或”与“且”,是“或”只能求并集,是“且”只能求交集.

3. 有关集合的知识记忆口诀:

集合平时很常用,数学概念有不同.
理解集合并不难,三条性质是关键.
元素确定和互异,还有无序要牢记.
集合不论空不空,总有子集在其中.
集合用图很方便,子交并补很明显.

4. 图 1-1-3-4 是常用到的含有两个集合运算结果的 Venn 图:

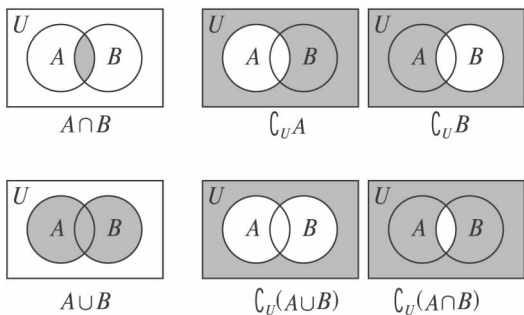


图 1-1-3-4



名师解惑

MINGSHIJIIEHUO

怎样对给定的具体数集进行运算?

剖析:难点是求数集的交集、并集、补集时,总是出错,不是多了就是少了,其突破方法是借助 Venn 图和数轴来帮助分析与运算,还要靠经验的积累.数轴和 Venn 图可把一些不明确的数量关系直观地表示出来,从而达到化繁为简、化抽象为直观的目的.探求用列举法给出的多个集合的运算时,可根据集合运算的定义,直接观察、分析元素

及其性质入手,也可以借助于 Venn 图进行运算;探求用描述法给出的多个数集的运算时,通常借助于数轴.



讲练互动

JIANGLIANHUODONG

【例题 1】2007 北京东城高三期末教学目标抽测一,文 1

设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 2, 4\}, B = \{2\}$, 则 $A \cap (C_U B)$ 等于

- A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ B. $\{1, 4\}$
C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{3, 5\}$

解析:本题主要考查集合的运算.所给的集合是用列举法表示的,通过观察即可得出结论.观察 U, A, B 或用 Venn 图,可得 $C_U B = \{1, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap (C_U B) = \{1, 4\}$. 故选 B.

答案:B



绿色通道

用列举法表示的集合,依据交集、并集、补集的含义,直接观察或用 Venn 图写出集合运算的结果;用描述法表示的集合,如果直接观察不出运算结果,那么就要借助于数轴写出结果,此时要注意:①交集是公共部分,并集是所有部分,补集是剩余的部分;②当端点不在集合中时,用“空心圈”表示.



变式训练

1. 2007 吉林高三期末统考,文 1 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{2, 4, 5, 7\}, B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(C_U A) \cap (C_U B)$ 等于

- A. $\{1, 6\}$ B. $\{4, 5\}$
C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$

解析:思路 1:观察或用 Venn 图,得 $(C_U A) \cap (C_U B) = \{1, 3, 6\} \cap \{1, 2, 6, 7\} = \{1, 6\}$;思路 2:观察或用 Venn 图,得 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, 则 $(C_U A) \cap (C_U B) = C_U (A \cup B) = \{1, 6\}$. 故选 A.

答案:A

2. 2007 广东惠州高三第一次调研考试,文 1 设集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}, B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于

- A. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$
C. $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$ D. $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$

解析:在同一条数轴上表示出集合 A, B , 如图所示. 由图得 $A \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 故选 A.



答案:A

【例题 2】设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}, B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap B = B$, 求 a 的值.

思路分析:本题主要考查集合的运算、分类讨论的思

想,以及集合间关系的应用.集合 A 是方程 $x^2+4x=0$ 的解组成的集合,并且可以发现 $B\subseteq A$,通过分类讨论集合 B 是否为空集来求 a 的值.

解:由题意,得 $A=\{-4,0\}$. $\therefore A\cap B=B, \therefore B\subseteq A$.

$\therefore B=\emptyset$ 或 $B\neq\emptyset$.

当 $B=\emptyset$ 时,即关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实数解,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,解得 $a<-1$.

当 $B\neq\emptyset$ 时,若集合 B 仅含有一个元素,

则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$,解得 $a=-1$.

此时, $B=\{x|x^2=0\}=\{0\}\subseteq A$,

即 $a=-1$ 符合题意.

若集合 B 含有两个元素,则这两个元素是 $-4,0$,

即关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的解是 $-4,0$.

则有 $\begin{cases} -4+0=-2(a+1), \\ -4\times 0=a^2-1. \end{cases}$ 解得 $a=1$,则 $a=1$ 符合题意.

综上所述 $a=1$ 或 $a\leq -1$.

绿色通道

通过深刻理解集合表示法的转换及集合之间的关系,可以把相关问题化归为其他常见的方程、不等式等数学问题.这称为数学的化归思想,是数学中的常用方法,要学会应用化归和分类讨论的数学思想方法解决有关问题.

黑色陷阱

解该题时,特别容易出现的错误是遗漏了 $B=\emptyset$ 的情形,从而造成错误.其原因是对 $B\subseteq A$ 的理解不够充分,当 $A\neq\emptyset$ 时,则有 $B=\emptyset$,或 $B\neq\emptyset$.避免出错的方法是培养分类讨论的数学思想方法和注意经验的积累.

变式训练

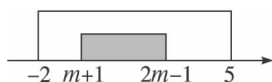
3. 已知集合 $A=\{x|-2\leq x\leq 5\}$,集合 $B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$,且 $A\cup B=A$,试求实数 m 的取值范围.

思路分析:由 $A\cup B=A$,得 $B\subseteq A$,则有 $B=\emptyset$,或 $B\neq\emptyset$,因此需对集合 B 分类讨论.

解: $\because A\cup B=A, \therefore B\subseteq A$. 又 $\because A=\{x|-2\leq x\leq 5\}\neq\emptyset, \therefore B=\emptyset$,或 $B\neq\emptyset$.

当 $B=\emptyset$ 时,有 $m+1>2m-1, \therefore m<2$.

当 $B\neq\emptyset$ 时,如图.



由数轴可得 $\begin{cases} m+1\leq 2m-1, \\ -2\leq m+1, \\ 2m-1\leq 5. \end{cases}$ 解得 $2\leq m\leq 3$.

综上所述,实数 m 的取值范围是 $m<2$,或 $2\leq m\leq 3$,即 $m\leq 3$.

【例题 3】设全集 $U=\{x|x\leq 20, x\in\mathbf{N}, x \text{ 是质数}\}$, $A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$, $(\complement_U A)\cap B=\{7,19\}$, $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$,求集合 A, B .

思路分析:本题主要考查集合的运算、Venn 图以及推理能力.利用列举法表示全集 U ,根据题中所给的条件,把集合中的元素填入 Venn 图中相应位置即可.

解: $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$,由题意画出 Venn 图,如图 1-1-3-5 所示,

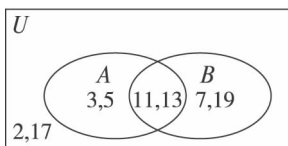


图 1-1-3-5

$\therefore A=\{3,5,11,13\}, B=\{7,11,13,19\}$.

绿色通道

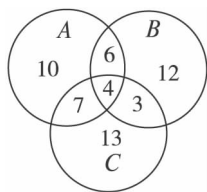
借助于 Venn 图分析集合的运算问题,使问题简捷地获得解决.将本来抽象的集合问题直观形象地表现出来,这正体现了数形结合思想的优越性.

变式训练

4. 某班举行数理化竞赛,每人至少参加一科.已知参加数学竞赛的有 27 人,参加物理竞赛的有 25 人,参加化学竞赛的有 27 人,其中参加数学、物理两科的有 10 人,参加物理、化学两科的有 7 人,参加数学、化学两科的有 11 人,而参加数、理、化三科的有 4 人,求出全班人数.

思路分析:本题的关键是把文字语言转化成集合语言,借助于 Venn 图的直观性把它表示出来,再根据集合中元素的互异性求出问题的解.

解:设参加数学、物理、化学三科竞赛的同学组成的集合分别为 A, B, C ,由题意可知 A, B, C 三集合中元素个数分别为 27, 25, 27, $A\cap B, B\cap C, A\cap C, A\cap B\cap C$ 的元素个数分别为 10, 7, 11, 4. 画出 Venn 图,如图所示,



可知全班人数为 $10+13+12+6+4+7+3=55$ (人).

5. 2007 山东临沂高三期末统考,文 1 设 I 为全集, M, N, P 都是它的子集,则图 1-1-3-6 中阴影部分表示的集合是..... ()

- A. $M\cap[(\complement_I N)\cap P]$
B. $M\cap(N\cup P)$
C. $[(\complement_I M)\cap(\complement_I N)]\cap P$
D. $M\cap N\cup(N\cap P)$

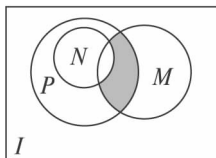


图 1-1-3-6



解析:思路1:阴影部分在集合 M 内部,排除选项 C;阴影部分不在集合 N 内,排除选项 B、D,故选 A;思路2:阴影部分在集合 M 内部,即是 M 的子集,又阴影部分在 P 内不在集合 N 内,

即在 $(\complement_U N) \cap P$ 内,所以阴影部分表示的集合是 $M \cap [(\complement_U N) \cap P]$,故选 A.

答案:A



教材链接

JIAOCAILIANJIE

1. 教材第8页思考:

我们知道,实数有加法运算.类比实数的加法运算,集合是否也可以“相加”呢?考察下列各个集合,你能说出集合 C 与集合 A, B 之间的关系吗?

(1) $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(2) $A = \{x | x \text{ 是有理数}\}, B = \{x | x \text{ 是无理数}\}, C = \{x | x \text{ 是实数}\}$.

答:集合也可以“相加”.这两个问题中,集合 C 与集合 A, B 之间都具有这样的关系:集合 C 是由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的.

2. 教材第9页思考:

下列关系式成立吗?

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$.

答:这两个关系式都成立.可以画 Venn 图验证或根据并集的含义说明.

3. 教材第10页思考:

下列关系式成立吗?

(1) $A \cap A = A$; (2) $A \cap \emptyset = A$.

答:关系式 $A \cap A = A$ 成立,而关系式 $A \cap \emptyset = A$ 不成立,应为 $A \cap \emptyset = \emptyset$.可以画 Venn 图验证或根据交集的含义说明.



同步测控

TONGBUCEKONG



我夯基,我达标

1. 2006 北京高考,文 1 设集合 $A = \{x | 2x + 1 < 3\}, B = \{x | -3 < x < 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于..... ()

- A. $\{x | -3 < x < 1\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$
C. $\{x | x > -3\}$ D. $\{x | x < 1\}$

解析:集合 $A = \{x | 2x + 1 < 3\} = \{x | x < 1\}$, 观察或由数轴得 $A \cap B = \{x | -3 < x < 1\}$. 故选 A.

答案:A

2. 满足 $A \cup B = \{0, 2\}$ 的集合 A 与 B 的组数为..... ()

- A. 2 B. 5 C. 7 D. 9

解析: $\because A \cup B = \{0, 2\}, \therefore A \subseteq \{0, 2\}$. 则 $A = \emptyset$, 或 $A = \{0\}$, 或 $A = \{2\}$, 或 $A = \{0, 2\}$. 当 $A = \emptyset$ 时, 则 $B = \{0, 2\}$; 当 $A = \{0\}$ 时, 则集合 $B = \{2\}$ 或 $\{0, 2\}$;

当 $A = \{2\}$ 时, 则集合 $B = \{0\}$ 或 $\{0, 2\}$; 当 $A = \{0, 2\}$ 时, 则集合 $B = \emptyset$ 或 $\{0\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{0, 2\}$. 则满足条件的集合 A 与 B 的组数为 $1 + 2 + 2 + 4 = 9$. 故选 D.

答案:D

3. 设 $A = \{x | x = \sqrt{5k+1}, k \in \mathbb{N}\}, B = \{x | 0 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{Q}\}$, 则 $A \cap B$ 等于..... ()

- A. $\{1, 4\}$ B. $\{1, 6\}$
C. $\{4, 6\}$ D. $\{1, 4, 6\}$

解析:解不等式组 $\begin{cases} 0 \leq \sqrt{5k+1} \leq 6, \\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$ 得 $k = 0, 1, 2, 3,$

$4, 5, 6, 7$, 则有 $x = \sqrt{5k+1} = 1, \sqrt{6}, \sqrt{11}, 4, \sqrt{21}, \sqrt{26}, \sqrt{31}, 6$, 则 $A \cap B = \{1, 4, 6\}$. 故选 D.

答案:D

4. 设 M, P 是任两个不等的非空集合, 则必有..... ()

- A. $\emptyset \in (M \cap P)$ B. $\emptyset = M \cap P$
C. $\emptyset \subseteq (M \cap P)$ D. $\emptyset \subsetneq (M \cap P)$

解析:思路1:由四个选项可看出,是判断空集($\emptyset$)与集合 $M \cap P$ 间的关系.我们知道空集是任何集合的子集,则有 $\emptyset \subseteq (M \cap P)$. 故选 C; 思路2:令 $M = \{1, 2, 4, 5\}, P = \{1, 2, 3\}$, 则 $M \cap P = \{1, 2\} \neq \emptyset$, 排除 A、B, 令 $M = \{1, 2, 3\}, P = \{4, 5\}$, 则 $M \cap P = \emptyset$, 排除 D. 故选 C.

答案:C

5. 集合 $P = \{1, 2, 3, m\}, M = \{m^2, 3\}, P \cup M = \{1, 2, 3, m\}$, 则 $m =$

解析:由题意,得 $m^2 = 1$ 或 2 或 m , 解得 $m = -1, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$. 经检验 $m = 1$ 不合题意,故 $m = -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$.

答案: $-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$

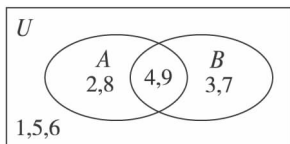
6. 已知全集 $U = \{\text{三角形}\}, A = \{\text{锐角三角形}\}, B = \{\text{钝角三角形}\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$

解析:思路1: $\complement_U A = \{\text{直角三角形或钝角三角形}\}, \complement_U B = \{\text{直角三角形或锐角三角形}\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \{\text{直角三角形或锐角三角形或钝角三角形}\} = U$; 思路2: $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B) = \complement_U \emptyset = U$.

答案:U

7. 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, (\complement_U A) \cap B = \{3, 7\}, (\complement_U B) \cap A = \{2, 8\}, (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 5, 6\}$, 则集合 $A =$, $B =$

解析:借助 Venn 图把相关运算的结果表示出来,自然地就得出集合 A, B 了.



用 Venn 图表示集合 U, A, B 的关系,如图所示的有关区域分别表示集合 $A \cap B, (\complement_U A) \cap B, A \cap$

$(\complement_U B), (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, 并填上相应的元素, 可得
 $A = \{2, 4, 8, 9\}, B = \{3, 4, 7, 9\}$.

答案: $\{2, 4, 8, 9\} \quad \{3, 4, 7, 9\}$

9. 如图 1-1-3-7 所示, U 是全集, M, P, S 是 U 的三个子集, 则阴影部分表示的集合是_____.

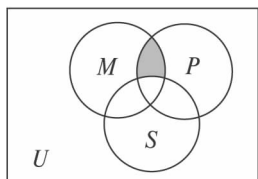


图 1-1-3-7

解析: 观察图形可以看出, 阴影部分满足两个条件: 一是不在集合 S 内; 二是在集合 M, P 的公共部分内, 因此阴影部分表示的集合是集合 S 的补集与集合 M, P 的交集的交集, 即为 $(\complement_U S) \cap (M \cap P)$.

答案: $(\complement_U S) \cap (M \cap P)$

9. 2007 上海中学高三数学测试, 5 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, B = \{x | x > a\}$, 且满足 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析: 借助于数轴分析求得 $a \geq 1$.

答案: $a \geq 1$

10. 设集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}, B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 a 的值.

思路分析: 由 $A \cap B = \{-3\}$, 得 $-3 \in A$, 且 $-3 \in B$, 则用分类讨论的方法求实数 a 的值, 但应检验是否满足集合元素的互异性.

解: 由 $A \cap B = \{-3\}$, 得 $-3 \in B$,

$\therefore a-3 = -3$, 或 $2a-1 = -3$, 或 $a^2+1 = -3$ (舍去), 解得 $a=0$ 或 -1 .

当 $a=0$ 时, $A = \{0, 1, -3\}, B = \{-3, -1, 1\}$, 则 $A \cap B = \{-3, 1\}$, 与 $A \cap B = \{-3\}$ 矛盾, 所以 $a=0$ 不合题意.

当 $a=-1$ 时, $A = \{1, 0, -3\}, B = \{-4, -3, 2\}$, 则 $A \cap B = \{-3\}$, 所以 $a=-1$ 满足题意.

综上所述可得 $a=-1$.

11. 已知 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}, B = \{x | x > a\}$.

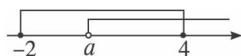
(1) 若 $A \cap B \neq A$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 且 $A \cap B \neq A$, 求实数 a 的取值范围.

思路分析: 此问题从表面上看是集合的运算, 但其本质是一个定集合和一个动集合的问题. 思路是使动集合沿数轴向定集合滑动, 数形结合解决问题. 借助于数轴是处理这类问题简便而有效的方法.

解: (1) 如图可得, 在数轴上实数 a 在 -2 的右边, 可得 $a \geq -2$;

(2) 由于 $A \cap B \neq \emptyset$, 且 $A \cap B \neq A$, 所以在数轴上, 实数 a 在 -2 的右边且在 4 的左边, 可得 $-2 < a < 4$.



我综合, 我发展

12. 2006 辽宁高考, 理 2 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是 _____ ()

A. 1 B. 3 C. 4 D. 8

解析: 转化为求集合 A 子集的个数. 很明显 $3 \notin A$,

又 $\because A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $\therefore$ 必有 $3 \in B$, 即集合 B 中至少有一个元素 3 . 其他元素来自集合 A 中.

$\therefore$ 集合 B 的个数等于 $A = \{1, 2\}$ 的子集个数.

又 $\because$ 集合 A 中含有 2 个元素,

$\therefore$ 集合 A 有 $2^2 = 4$ 个子集.

$\therefore$ 满足条件的集合 B 共有 4 个. 故选 C.

答案: C

13. 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 _____

_____ ()

A. $A \subseteq C$

B. $C \subseteq A$

C. $A \neq C$

D. $A = \emptyset$

解析: 思路 1: $\because (B \cap C) \subseteq B, (B \cap C) \subseteq C, A \cup B = B \cap C, \therefore (A \cup B) \subseteq B, (A \cup B) \subseteq C$.

$\therefore A \subseteq B \subseteq C$.

$\therefore A \subseteq C$. 故选 A;

思路 2: 取满足条件的 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$, 排除选项 B, D, 令 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2\}$, 则此时也满足条件 $A \cup B = B \cap C$, 而此时 $A = C$, 排除选项 C, 故选 A.

答案: A

14. 设 $S = \{(x, y) | xy > 0\}, T = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则

_____ ()

A. $S \cup T = S$

B. $S \cup T = T$

C. $S \cap T = S$

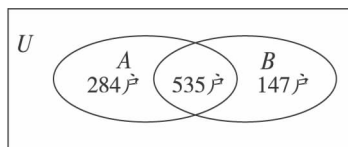
D. $S \cap T = \emptyset$

解析: $S = \{(x, y) | xy > 0\} = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0, \text{ 或 } x < 0 \text{ 且 } y < 0\}$, 则 $T \subseteq S$, 所以 $S \cup T = S, S \cap T = T$. 故选 A.

答案: A

15. 某城镇有 1 000 户居民, 其中有 819 户有彩电, 有 682 户有空调, 有 535 户彩电和空调都有, 则彩电和空调至少有一种的有 _____ 户.

解析: 设这 1 000 户居民组成集合 U , 其中有彩电的组成集合 A , 有空调的组成集合 B , 如图所示. 有彩电无空调的有 $819 - 535 = 284$ 户; 有空调无彩电的有 $682 - 535 = 147$ 户, 因此二者至少有一种的有 $284 + 147 + 535 = 966$ 户.



答案: 966



16. 已知 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的值.

思路分析: 集合 A 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集, 集合 B 是关于 x 的方程 $ax - 2 = 0$ 的解集, 故对集合 B 分类讨论.

解: 由题意, 得 $A = \{-1, 1\}$. $\because A \cup B = A$,

$\therefore B \subseteq A$. $\therefore B = \emptyset$, 或 $B \neq \emptyset$.

当 $B = \emptyset$ 时, 关于 x 的方程 $ax - 2 = 0$ 无解, 则 $a = 0$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 关于 x 的方程 $ax - 2 = 0$ 有解, 则 $a \neq 0$, 得 $x = \frac{2}{a} \in A$.

若 $\frac{2}{a} = -1$, 则有 $a = -2$; 若 $\frac{2}{a} = 1$, 则有 $a = 2$.

综上 $a = 0$ 或 -2 或 2 .



我创新, 我超越

17. 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合 A 的一个分析, 并规定: 当且仅当 $A_1 = A_2$ 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种分析, 则集合 $A = \{a, b, c\}$ 的不同分析的种数是 ()
- A. 27 B. 26 C. 9 D. 8

解析: 本题定义了集合 A 的一种分析, 虽然这是一个新概念, 实际上还是集合的并集的应用, 按集合 A_1 中所含元素的个数分类讨论, 把每一种分析的可能考虑到, 找出规律即可求得集合 A 的不同分析的种数.

当 A_1 为空集时, $A_2 = A$, 此时共有 1 种分析;

当 A_1 含有 1 个元素时, 集合 A_2 含有两个或三个元素, 即 $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c\}$ 或 $A_1 = \{b\}$, $A_2 = \{a, c\}$ 或 $A_1 = \{c\}$, $A_2 = \{a, b\}$ 或 $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$ 或 $A_1 = \{b\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$ 或 $A_1 = \{c\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, 此时共有 6 种分析;

当 A_1 含有 2 个元素时, 集合 A_2 含有 1 个或 2 个或 3 个元素, 即 $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c\}$ 或 $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, c\}$ 或 $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{b, c\}$ 或 $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$ 或 $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a\}$ 或 $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a, b\}$ 或 $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a, c\}$ 或 $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$ 或 $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{b\}$ 或 $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{a, b\}$ 或 $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{b, c\}$ 或 $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, 此时共有 12 种分析;

当 A_1 含有 3 个元素时, 集合 A_2 含有 0 个或 1 个或 2 个或 3 个元素, 即 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \emptyset$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{b\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{c\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, b\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{b, c\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, c\}$ 或 $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, 此时共有 8 种分析.

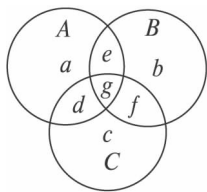
综上, 总共有 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ 种分析. 故选 A.

答案: A

18. 在全国高中数学联赛第二试中只有三道题, 已知:

- (1) 某校 25 个学生参加竞赛, 每个学生至少解出一道题; (2) 在所有没有解出第一题的学生中, 解出第二题的人数是解出第三题的人数的 2 倍; (3) 只解出第一题的学生比余下的学生中解出第一题的人数多 1; (4) 只解出一道题的学生中, 有一半没有解出第一题, 问共有多少学生只解出第二题?

思路分析: 本题的条件较多, 利用 Venn 图, 设解出第一、二、三道题的学生的集合为 A, B, C , 并用三个圆分别表示, 如图所示, 则重叠部分表示同时解出两道题或三道题的集合, 这样得到七个部分, 其人数分别用 a, b, c, d, e, f, g 表示, 然后, 根据已知条件列出方程组求出 b .



解: 根据已知条件 (1) (2) (3) (4), 可得

$$a + b + c + d + e + f + g = 25, \quad ①$$

$$b + f = 2(c + f), \quad ②$$

$$a = d + e + g + 1, \quad ③$$

$$a = b + c. \quad ④$$

$$\text{②代入①, 得 } a + 2b - c + d + e + g = 25. \quad ⑤$$

$$\text{③代入⑤, 得 } 2b - c + 2d + 2e + 2g = 24. \quad ⑥$$

$$\text{④代入⑤, 得 } 3b + d + e + g = 25. \quad ⑦$$

$$\text{⑦} \times 2 - \text{⑥, 得 } 4b + c = 26. \quad ⑧$$

由于 $c \geq 0$, 所以 $b \leq 6 \frac{1}{2}$. 利用②⑧消去 c , 得 $f = b - 2(26 - 4b) = 9b - 52$.

因为 $f \geq 0$, 所以 $b \geq 5 \frac{7}{9}$. 则有 $b = 6$, 即只解出第二题的学生有 6 人.



教研中心

JIAOYANZHONGXIN

教学指导

一、课标要求

1. 理解并集、交集、全集、补集的含义, 掌握求两个简单集合的交集与并集的方法, 会求给定子集的补集, 感受集合作为一种语言, 在表示数学内容时的简洁和准确, 进一步提高类比的能力.

2. 通过观察和类比, 借助 Venn 图理解集合的基本运算, 体会直观图示对理解抽象概念的作用, 培养数形结合的思想.

二、教学建议

教材从学生熟悉的集合出发, 结合实例, 通过类比实