

高中同步测控全优设计：数学. 1-1 选修

Contents

目录

第四章 三角函数

4.1 角的概念的推广	2
第一课时	2
第二课时	4
4.2 弧度制	8
第一课时	8
第二课时	11
4.3 任意角的三角函数	14
第一课时	14
第二课时	17
4.4 同角三角函数的基本关系式	20
第一课时	20
第二课时	22
4.5 正弦、余弦的诱导公式	26
第一课时	26
第二课时	28
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	31
第一课时	31
第二课时	33
第三课时	36
第四课时	39
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	42
第一课时	42
第二课时	45
4.8 正弦函数、余弦函数的图象和性质	48
第一课时	48
第二课时	51
第三课时	54
第四课时	58
4.9 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	61
第一课时	61
第二课时	64



第三课时	68
4.10 正切函数的图象和性质	72
第一课时	72
第二课时	74
4.11 已知三角函数值求角	77
第一课时	77
第二课时	80
本章小结	83

第五章 平面向量

5.1 向 量	88
5.2 向量的加法与减法	91
第一课时	91
第二课时	93
5.3 实数与向量的积	96
第一课时	96
第二课时	98
5.4 平面向量的坐标运算	102
第一课时	102
第二课时	104
5.5 线段的定比分点	107
5.6 平面向量的数量积及运算律	110
第一课时	110
第二课时	113
5.7 平面向量数量积的坐标表示	117
5.8 平 移	120
5.9 正弦定理、余弦定理	123
第一课时	123
第二课时	126
第三课时	129
5.10 解斜三角形应用举例(实习作业)	132
研究性学习课题:向量在物理中的应用	135
本章小结	137
期末综合测试	141
参考答案	145

第四章 三角函数



本章综述

BENZHANGZONGSHU

一、教学要求

1.理解任意角的概念、弧度的意义;能正确地进行弧度与角度的换算.

2.掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,并会利用与单位圆有关的三角函数线表示正弦、余弦和正切;掌握同角三角函数的基本关系式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, $\tan\alpha \cot\alpha = 1$;掌握正弦、余弦的诱导公式.

3.掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式;掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式;通过公式的推导,了解它们的内在联系,从而培养逻辑推理能力.

4.能正确运用三角公式,进行简单三角函数式的化简、求值及恒等式证明(包括引出半角、积化和差、和差化积公式,但不要求记忆).

5.会用与单位圆有关的三角函数线画出正弦函数、正切函数的图象,并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象;了解周期函数与最小正周期的意义;了解奇偶函数的意义;并通过它们的图象理解正弦函数、余弦函数、正切函数的性质以及简化这些函数图象的绘制过程;会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的简图,理解 A 、 ω 、 φ 的物理意义.

6.会由已知三角函数值求角,并会用符号 $\arcsin x$ 、 $\arccos x$ 、 $\arctan x$ 表示.

二、教学内容

本章包括任意角的三角函数、两角和与差的三角函数、三角函数的图象和性质三部分内容.

第一部分主要是引进任意角的概念,通过弧度制,使得角和实数建立起一一对应关系,从而可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数.接着又根据三角函数的定义推导出了同角三角函数关系式和诱导公式,它们是三角恒等变换的重要基础,在求值、化简三角函数式和证明三角恒等式等问题中经常用到.第二部分主要研究和角公式、差角公式、倍角公式,这些公式的基础是两角和的余弦公式.它们主要用于三角函数式的计算、化简与证明,在数学和其他许多学科中都有广泛的应用,要熟练、灵活地掌握.第三部分首先以三角函数线为工具,作出了正弦函数和余弦函数的图象.介绍了“五点法”作图象简图的方法,再从图象归纳出正、余弦函数的性质,进而研究函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \sin x$ 图象的关系;最后简要地介绍了正切函数的图象和性质,以及已知三角函数值如何求角、物理和工程技术的许多问题都要用三角函数的图象和性质

予以解决.

三、地位与作用

三角函数是中学数学的重要内容之一,它的基础主要是几何中的相似形和圆,研究方法主要是代数中的式子变形和图象分析,因此三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来.高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科,都要经常用到三角函数及其性质,因此这些内容既是解决生产实际问题的工具,又是学习高等数学等学科的基础.

通过本章的学习,将进一步了解符号与变元、集合与对应、数形结合等基本数学思想在研究三角函数时所起的重要作用;在式子和图形的变化中,将看到分析、探索、化归、类比、平行移动、伸长和缩短等这些常用的基本方法时隐时现.这些数学思想方法为学习数学和应用数学提供了一个新的领域.

四、重点与难点

重点是:任意角三角函数的概念,同角三角函数的基本关系式、诱导公式及其运用,正弦、余弦的和角公式,正弦曲线的画法 and 正弦函数的性质.难点是:弧度制的概念,综合运用本章公式进行简单三角函数式的化简及恒等式的证明,周期函数的概念,函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.关键是:熟练掌握任意角三角函数的定义,讲清余弦的和角公式的特征及其向差角公式、正弦的和角公式的变化,正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

五、课时分配

本章教学时间约需 31 课时,具体分配如下(仅供参考):

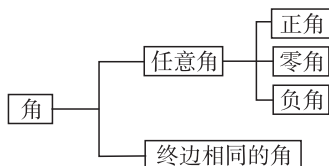
4.1	角的概念的推广	约 2 课时
4.2	弧度制	约 2 课时
4.3	任意角的三角函数	约 2 课时
4.4	同角三角函数的基本关系式	约 2 课时
4.5	正弦、余弦的诱导公式	约 2 课时
4.6	两角和与差的正弦、余弦、正切	约 4 课时
4.7	二倍角的正弦、余弦、正切	约 2 课时
4.8	正弦函数、余弦函数的图象和性质	约 4 课时
4.9	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	约 3 课时
4.10	正切函数的图象和性质	约 2 课时
4.11	已知三角函数值求角	约 2 课时
	小结与复习	约 4 课时

4.1 角的概念的推广

第一课时

新

新知预习



1. 角可以看成由一条射线绕其端点_____而形成的. 规定按逆时针方向旋转形成的角叫_____; 按顺时针方向旋转形成的角叫_____; 如果一条射线没有作任何旋转, 称它形成的角叫_____.

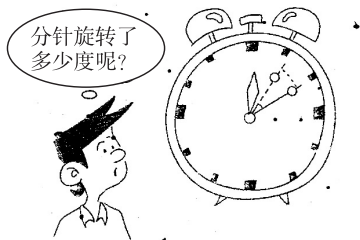
2. 在直角坐标系中讨论角时, 使角的顶点与_____, 角的始边与_____, 这时角的终边(端点除外)在第几象限, 就说这个角是_____; 如果角的终边在坐标轴上, 则认为此角_____.

3. 终边相同的角有_____个, 相等的角的终边一定_____, 但终边相同的角不一定_____.



回顾导引

你的手表慢了 5 分钟, 你是怎样把它校准的? 假如你的手表快了 1.25 小时, 你应当如何把它校准? 当时间校准后, 分针旋转了多少度? 为了回答这些问题, 你可能会想到从前我们学过的 0° 到 360° 的角, 现在看来仅有这些是不够的, 必须把角的概念加以推广.



重

重难突破

本节的重点是任意角的概念和象限角的概念; 难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来.

1. 正确理解角的概念

首先, 要紧紧抓住“旋转”二字, 用运动的观点来看待角的概念. 一是要明确旋转的方向; 二是要明确旋转的大小; 三是要明确射线未作任何旋转时的位置, 从而得到正角、负角、零角的概念. 其次, 不能忽略实际问题的意义, 可通过钟表时(或分)针的逆时、顺时的转动以及体操中的转体等实例来理解角的大小、正负的含义.

2. 象限角

(1) 当角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合时, 如果角的终边(除端点外)在第几象限, 就说这个角是第几象限角.

比如 $60^\circ, 420^\circ, -300^\circ$ 都是第一象限角; $120^\circ, 460^\circ, -240^\circ$ 都是第二象限角; $210^\circ, 570^\circ, -150^\circ$ 都是第三象限角; $300^\circ, 660^\circ, -60^\circ$ 都是第四象限角.

(2) 如果角的顶点不与坐标原点重合, 或者角的始边不与 x 轴非负半轴重合, 那么不能判断角在哪个象限, 也就是它不能称作象限角.

(3) 引入直角坐标系来研究角, 体现了数形结合的思想, 为后面研究任意角的三角函数埋下了伏笔, 同时渗透了基本的数学方法(通法)——坐标法.



活学巧用

【试题 1】给出下列 3 个命题:

- ① 第一象限的角一定是锐角; ② 凡能表示成 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ$ 形式的角一定是直角, 其中 $k \in \mathbf{Z}$; ③ 终边落在直线 $y = -x$ 上的角都可以表示成 $n \cdot 180^\circ - 45^\circ$ 的形式, 其中 $n \in \mathbf{Z}$.

其中正确命题的个数是 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析: ① 不正确. 如 361° 的角是第一象限的角, 但它不是锐角.

② 不正确. 如 $1 \cdot 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$ 的角具有 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ$ 的形式, 此时 $k=1 \in \mathbf{Z}$, 但它不是直角.

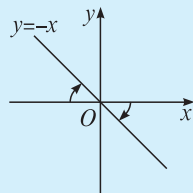
③ 正确. 对于 $n \cdot 180^\circ - 45^\circ, n \in \mathbf{Z}$,

如右图所示, 当角的终边落在射线 $y = -x$ ($x \geq 0$) 上时, 它可以表示成 $k \cdot 360^\circ - 45^\circ$ 的形式;

当角的终边落在射线 $y = -x$ ($x \leq 0$) 上时, 它可以表示成 $(k \cdot 360^\circ + 180^\circ) - 45^\circ$ 的形式.

两种形式也即 $2k \cdot 180^\circ - 45^\circ, (2k+1) \cdot 180^\circ - 45^\circ$ 的形式, 可一并写成 $n \cdot 180^\circ - 45^\circ$ 的形式, $n \in \mathbf{Z}$.

答案: B



3. 终边相同的角

对于终边相同的角,应会分别用文字语言和符号语言加以描述.

与 α 角终边相同的角的集合 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

注意: (1) α 为任意角.

(2) $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”, $k \cdot 360^\circ - \alpha$ 可理解为 $k \cdot 360^\circ + (-\alpha)$.

(3) 相等的角,终边一定相同,但终边相同的角不一定相等.终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

(4) $k \in \mathbf{Z}$ 这一条件不可少.

利用与 α 角终边相同的角的集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 能将不在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内的任意角 β 转化为用 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内的角表示的形式,即可以判定 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$) 为第几象限角,这为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数值打下基础.

4. 准确区分锐角, $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角, 小于 90° 的角, 第一象限角

锐角是 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 的角; $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角是 $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ 的角; 小于 90° 的角是 $\alpha < 90^\circ$ 的角, 显然它包括 0° 角和负角; 第一象限角是形如 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 所表示的角.

注意: (1) 要区分开易混的概念, 如锐角一定是第一象限的角, 但第一象限的角不全是锐角, 如 -330° 、 730° 都是第一象限角, 但它们都不是锐角.

(2) 小于 90° 的角是 $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$, 显然包括锐角、零角、负角.

【试题 2】 在角的集合 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 中,

(1) 有几种终边不相同的角?

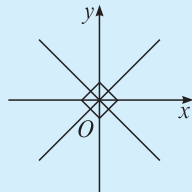
(2) 有几个属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 内的角?

(3) 写出其中是第三象限的角的一般表示法.

分析: 本题主要考查对 $\alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$) 所表示的角的认识. 从代数角度看, 取 $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 可以得 α 为 $\dots, -135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, \dots$.

从图形角度看 $\alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$),

即以角 45° 为基础, 依次加上 90° 的整数倍, 即依次按顺时针或逆时针方向旋转 90° , 所得各角如右图所示.



解: (1) 在给定的角的集合中终边不相同的角共有 4 种.

(2) 由 $-360^\circ < k \cdot 90^\circ + 45^\circ < 360^\circ$,

得 $-\frac{9}{2} < k < \frac{7}{2}$. 又 $k \in \mathbf{Z}$,

故 $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. $\therefore$ 在给定的角集合中属于区间 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 的角共有 8 个.

(3) 其中是第三象限的角可表示成 $k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

课

课时演练

夯基达标

1. 下面命题中正确的是 ()

- A. 第一象限的角一定不是负角
B. 锐角是第一象限的角
C. 终边相同的角相等
D. 第二象限的角大于第一象限的角

2. 给出下列四个命题: ① -75° 是第四象限角; ② 225° 是第三象限角; ③ 475° 是第二象限角; ④ -315° 是第一象限角. 其中正确的命题有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. 在下列各组角中, 终边不相同的一组是 ()

- A. 60° 与 -300°
B. 232° 与 952°
C. $1\ 040^\circ$ 与 -40°
D. $1\ 010^\circ$ 与 70°

4. 与 -460° 终边相同的角可以表示成 ()

- A. $460^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$)
B. $100^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$)

C. $260^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$)

D. $-260^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$)

5. 若角 α 与 β 的终边相同, 则角 $\alpha - \beta$ 的终边 ()

- A. 在 x 轴的非负半轴上 B. 在 x 轴的非正半轴上
C. 在 y 轴的非负半轴上 D. 在 y 轴的非正半轴上

6. 终边在 y 轴的非正半轴上的角介于 $[-360^\circ, 720^\circ]$ 之间的是 ()

- A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
B. $-90^\circ, -270^\circ, 270^\circ$
C. $-90^\circ, 270^\circ, 630^\circ$
D. $-90^\circ, -270^\circ, 540^\circ$

7. 设 $A = \{\text{锐角}\}$, $B = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, $C = \{\text{第一象限角}\}$, $D = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的正角}\}$, 则下列等式中成立的是

..... ()

- A. $A = B$ B. $B = C$
C. $A = C$ D. $A = D$

8. $-1\ 445^\circ$ 是第 _____ 象限角.

9. 在 -720° 到 720° 之间与 $-1\ 050^\circ$ 终边相同的角是

_____.

10. 与角 $1\ 560^\circ$ 终边相同的角的集合中, 最小正角是

_____, 最大负角是_____.

能力提升

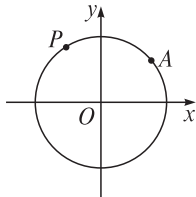
11. 已知与 $-1\ 820^\circ$ 终边相同的角的集合为 A , 集合 B 为 $[-720^\circ, 360^\circ]$, 求 $A \cap B$.

12. (1) 写出终边落在 $y=x (x \geq 0)$ 图象上的角 α 的集合 S ;
(2) 写出终边落在 $y=x (x \leq 0)$ 图象上的角 α 的集合 M .

13. 有一个小于 360° 的正角, 这个角的 6 倍的终边与 x 轴的正半轴重合, 求这个角.

第二课时

14. 如图, 点 A 在半径为 1 且圆心在原点的圆上, 且 $\angle AOx = 45^\circ$. 点 P 从点 A 出发, 依逆时针方向等速地沿单位圆周旋转. 已知点 P 在 1 秒钟内转过的角速度为 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$), 经过 2 秒钟到达第三象限, 经过 14 秒钟后又回到出发点 A , 求 θ 的值.



新知预习

角的表示

坐标轴上的角: 终边相同的角: 所有与 α 终边相同的角, 连同 α 本身组成一个集合 S .

$$S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}.$$

终边相同的角: 终边相同的角有无数个; 相等的角的终边一定相同, 但终边相同的角不一定相等.

1.

终边在 y 轴非正半轴上的角的集合是 _____

2. 象限角

在直角坐标系中讨论角时, 使角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴非负半轴重合, 这时角的终边(端点除外)在第几象限, 就说这个角是第几象限角; 如果角的终边在坐标轴上, 则认为此角不在任何象限.

终边在 y 轴上的角的集合是 _____

走近高考

- 与 -1778° 的终边相同且绝对值最小的角是 _____.
- 若角 α 与 β 的终边在一条直线上, 则 α 与 β 的关系是 _____.
- 若 α 是第一象限角, 则下列各角中属于第四象限角的是 ()
 A. $90^\circ - \alpha$
 B. $90^\circ + \alpha$
 C. $360^\circ - \alpha$
 D. $180^\circ + \alpha$

2. 象限角的集合

第二象限角的集合为 _____;

第三象限角的集合为 _____.

重难突破

1. 象限角与轴线角的集合

(1) 象限角的集合

第一象限角的集合为 $\{x \mid k \cdot 360^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

第二象限角的集合为 $\{x \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

第三象限角的集合为 $\{x \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.



活学巧用

【试题 1】终边在坐标轴上的角的集合是 ()

- $\{\varphi \mid \varphi = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{\varphi \mid \varphi = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{\varphi \mid \varphi = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{\varphi \mid \varphi = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第四象限角的集合为 $\{x | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 轴线角的集合

终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边落在坐标轴上的角的集合为 $\{x | x = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

注意: 象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一, 也有其他的表示形式.

2. 判断角的终边所在位置

方法是: 在直角坐标系中画出所给角; 也可将所给角化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z}, 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$ 的形式加以判断. 它初步体现了数形结合的思想.

3. 角的形式转化

角 $\alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}, \alpha + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$ 都可化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ 的形式, 进而可确定角终边所在的位置.

对于 $\alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 转化的方法是分别设 $k = 2m, k = 2m + 1, m \in \mathbf{Z}$, 代入原式中即可.

对于 $\alpha + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 转化的方法是分别设 $k = 4m, k = 4m + 1, k = 4m + 2, k = 4m + 3, m \in \mathbf{Z}$, 代入计算即可.

同理, 对于 $\alpha + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 分别设 $k = 3m, 3m + 1, 3m + 2, m \in \mathbf{Z}$, 代入即可.

4. 已知角 α 所在象限, 求 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 所在象限问题

利用已知条件写出 α 的范围, 由此确定 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 的范围, 再根据范围确定象限. 如试题 4.

解析: 对于 $k, m \in \mathbf{Z}$, 有 $k = 4m, k = 4m + 1, k = 4m + 2, k = 4m + 3$. (分类讨论)

以下代入答案 C 进行检验:

(1) 若 $k = 4m$, 则 $\varphi = 4m \cdot 90^\circ = m \cdot 360^\circ$;

(2) 若 $k = 4m + 1$, 则 $\varphi = (4m + 1) \cdot 90^\circ = m \cdot 360^\circ + 90^\circ$;

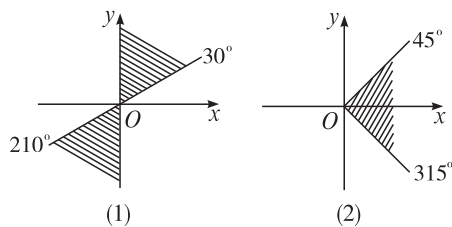
(3) 若 $k = 4m + 2$, 则 $\varphi = (4m + 2) \cdot 90^\circ = m \cdot 360^\circ + 180^\circ$;

(4) 若 $k = 4m + 3$, 则 $\varphi = (4m + 3) \cdot 90^\circ = m \cdot 360^\circ + 270^\circ$.

综上, 终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\varphi | \varphi = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

答案: C

【试题 2】 写出下图中阴影部分的区域所表示的角的集合.



解析: (1) $\because k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 90^\circ$ 或 $k \cdot 360^\circ + 210^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

即 $2k \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq 2k \cdot 180^\circ + 90^\circ$ 或 $(2k + 1)180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq (2k + 1)180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore n \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbf{Z}$.

$\therefore$ 图(1)中阴影部分区域所表示的角 α 的集合为 $\{\alpha | k \cdot 180^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) $\because 315^\circ$ 角与 -45° 角的终边相同,

$\therefore k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

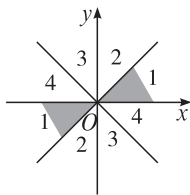
$\therefore$ 图(2)中阴影部分区域所表示的角 β 的集合为 $\{\beta | k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

点评: 区间角集合的表示一般有两种情况: (1) 分别用与正角或负角(零角)终边相同的角的集合表示区域的边界; (2) 都用正角(或零角)的终边相同的角的集合表示区域的边界. 如本题(2)中就要注意

对于 $\frac{\alpha}{2}$ 、 $\frac{\alpha}{3}$ 的判定还有另外一种方法——八卦图法.

例如, $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的判断方法:

第一步:画出直角坐标系.如右图,将每一象限二等分.



第二步:标号.从靠近 x 轴正半轴的第一象限内区域开始,按逆时针方向,在图中依次标上 1、2、3、4、1、2、3、4.

第三步:选号.因为 α 为第一象限角,在图中将数字 1 的范围画出.可用阴影表示.

第四步:定象限.如果阴影部分在哪一象限,那么 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边就落在哪一象限.

由以上步骤可知,若 α 为第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、三象限角.

注意:由角 α 确定角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在象限还有一种简便方法,即作角 α 的角平分线,角平分线所在象限即 $\frac{\alpha}{2}$ 角的终边所在象限,因而易知由 α 角所在象限即可确定 $\frac{\alpha}{2}$ 可能落在两个象限内.

5. 终边对称的角的表达式

(1)若 α 角与 β 角的终边关于原点对称,

那么 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ + \beta, k \in \mathbf{Z}$.

(2)若 α 角与 β 角的终边关于直线 $y=x$ 对称,那么 $\alpha = k_1 \cdot 360^\circ + 45^\circ + \theta, k_1 \in \mathbf{Z}, \beta = k_2 \cdot 360^\circ + 45^\circ - \theta, k_2 \in \mathbf{Z}$.

则 $\alpha + \beta = (k_1 + k_2) \cdot 360^\circ + 90^\circ = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

(3)若角 α, β 的终边关于 y 轴对称,

那么 $\alpha = k_1 \cdot 360^\circ + 90^\circ + \theta, k_1 \in \mathbf{Z}$,

$\beta = k_2 \cdot 360^\circ + 90^\circ - \theta, k_2 \in \mathbf{Z}$.

则有 $\alpha + \beta = (k_1 + k_2) \cdot 360^\circ + 180^\circ = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

(4)若角 α, β 的终边关于 x 轴对称,那么

$\alpha = k_1 \cdot 360^\circ + \theta, k_1 \in \mathbf{Z}, \beta = k_2 \cdot 360^\circ - \theta, k_2 \in \mathbf{Z}$.

则有 $\alpha + \beta = (k_1 + k_2) \cdot 360^\circ = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

315°角的终边的角的选取,若选 315°且 45°角不变,则写出的不等式不成立,写出的集合 $\{\beta | k \cdot 360^\circ + 315^\circ \leq \beta \leq k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 为空集,故应将 315°角的终边的角写为 -45°(若第一象限的终边写 45°,则第四象限只能写 -45°).若第四象限的终边写为 315°,那么第一象限只能写为 405°.

【试题 3】若 α 是第二象限的角,试判断 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 角各是

第几象限的角.

解析: $\because \alpha$ 是第二象限的角,

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z}).$$

(1) $\because 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ$, 故 2α 是第三或第四象限的角,或角的终边在 y 轴的非正半轴上.

$$(2) \because k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{当 } k = 2n (n \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ, n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{当 } k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, n \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} \text{ 是第一或第三象限的角.}$$

$$(3) \because k \cdot 120^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = 3n (n \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 60^\circ, n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{当 } k = 3n + 1 (n \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 150^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ, n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{当 } k = 3n + 2 (n \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 300^\circ, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore \frac{\alpha}{3} \text{ 是第一或第二或第四象限的角.}$$



课时演练

夯基达标

1. 角 α 的终边经过点 $M(0, -3)$, 则角 α ()

- A. 是第三象限角
- B. 是第四象限角
- C. 既是第三象限角又是第四象限角

D. 不是任何象限的角

2. 若 α 为锐角, $k \cdot 180^\circ + \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第一、三象限 D. 第一、四象限

3. 若 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 则下列关系中正确的是

..... ()

- A. $A=B=C$ B. $A=B \subsetneq C$
C. $A \subseteq B=C$ D. $A \subsetneq B \subsetneq C$

4. 若 $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$, 则 $180^\circ - \alpha$ 与 α 的终边

... ()

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 以上都不对

5. 已知角 2α 的终边在 x 轴上方, 那么 α 是 ()

- A. 第一象限角 B. 第一、二象限角
C. 第一、三象限角 D. 第一、四象限角

6. 若 α 是第一象限角, 则 $-\frac{\alpha}{2}$ 是 ()

- A. 第一象限角 B. 第一、四象限角
C. 第二象限角 D. 第二、四象限角

7. 角 α 是第二象限角, 则 $180^\circ + \alpha$ 是第 _____ 象限角;
 $-\alpha$ 是第 _____ 象限角; $180^\circ - \alpha$ 是第 _____ 象限角.

8. 已知角 α 和角 β 的终边互为反向延长线, 问 α 和 β 之间满足怎样的关系? 其结果是 _____.

9. 若 $90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$, 则 $\alpha - \beta$ 的取值范围是 _____,
 $\alpha + \beta$ 的取值范围是 _____.

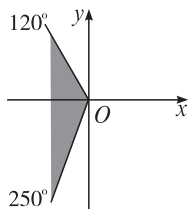
10. 若将时钟拨慢 5 分钟, 则分针转了 _____, 时针转了 _____.

能力提升

11. “ α 是第一象限角”是“ 2α 是第二象限角”的
..... ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 如右图所示, 写出终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合, 并指出 $-950^\circ 12'$ 是否是该集合中的角.



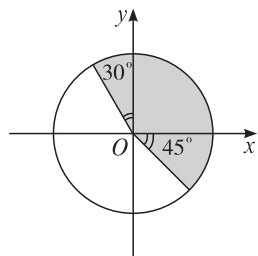
13. (1) 已知角 α 终边与 -50° 角终边关于 y 轴对称, 求角 α 的集合 M ;

(2) 已知角 α 终边与 -50° 角终边互相垂直, 求角 α 的集合 N .

14. 已知 $f(x) = 5^\circ \cdot x + 20^\circ$, $g(x) = 6^\circ \cdot x + 30^\circ$, T 为何值时, 对任何 x 值, $f(x+T)$ 与 $f(x)$, $g(x+T)$ 与 $g(x)$ 终边所在的位置分别相同?

走近高考

1. 角 α 是第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ()
- A. 第二象限
B. 第四象限
C. 第一、二象限
D. 第二、四象限
2. 2007 山东泰安高一诊断, 8 集合 $M = \{x \mid x = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $P = \{x \mid x = k \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 ()
- A. $M \subsetneq P$
B. $M \not\subset P$
C. $M = P$
D. $M \cap P = \emptyset$
3. 如图所示, 终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合是 ()



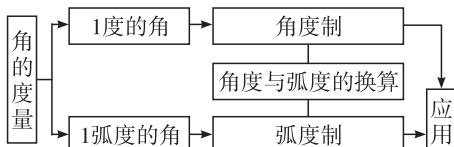
- A. $\{\alpha \mid -45^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ\}$
B. $\{\alpha \mid 120^\circ \leq \alpha \leq 315^\circ\}$
C. $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ - 45^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
D. $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 120^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
4. “ x 是钝角”是“ x 是第二象限角”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

4.2 弧度制

第一课时

新

新知预习



1. 角度制是用____的大小来度量角的大小的;我们规定周角的____为1度的角. 弧度制是用____的长度来度量角的大小的;把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做____的角.

2. 正角的弧度数为____;负角的弧度数为____;零角的弧度数为____; $|\alpha| = \text{_____}$ (其中 α 为圆心角的弧度数).

3. $1 \text{ rad} = (\text{_____})^\circ \approx \text{_____}$; $1^\circ = \text{_____} \text{ rad}$.



回顾导引

在物理学和日常生活中,一个量常常需要用不同的方法进行度量,不同的度量方法可以满足我们不同的需要.如图是日晷,它是我国古代利用日影角度的变化来度量时间的一种仪器.现在,我们普遍使用的钟表,实际上也是用时针、分针和秒针角度的变化来确定时间的.无论采用哪种方法,度量一个确定的量所得到的量数必须是唯一确定的.在初中,我们学过利用角度来度量角的大小,这一节我们将学习角的另一种度量方法——弧度制.



重

重难突破

本节的重点是理解弧度的意义,能正确地进行弧度与角度的换算.难点是弧度的概念及其与角度的关系.其中,准确理解1弧度的角的含义是建立弧度概念的关键.

1. 弧度制的定义

长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角;用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制;在弧度制下,1弧度记作1 rad, rad读作弧度.

2. 定义的基础

根据圆心角定理,对于任何一个圆心角 α ,所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数.因此,弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径变化而变化,而是一个大小确定的角,可以取为度量角的标准.

当角 α 的大小一定时,不论这个角所对的圆弧的半径是多少,弧长与半径的比值总是一个定值,它仅与圆心角的大小有关,所以我们可以用弧长与半径的比值来度量角的大小.

3. 弧度数

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是零.

角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ (其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长, r 是圆的半径).



活学巧用

【试题1】将下列各角化成 $2k\pi + \alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$)的形式,并指出角的终边所在象限.

(1) $\frac{27\pi}{4}$; (2) $\frac{39\pi}{6}$.

解析: (1) $\because \frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}, \therefore \frac{27\pi}{4}$ 与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同.

又 $\because \frac{3\pi}{4}$ 是第二象限角, $\therefore \frac{27\pi}{4}$ 是第二象限角.

(2) $\frac{39\pi}{6} = 6\pi + \frac{3\pi}{2} = 6\pi + \frac{\pi}{2},$

$\therefore \frac{39\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 的终边相同. 又 $\because \frac{\pi}{2}$ 是坐标轴上的

角, $\therefore \frac{39\pi}{6}$ 也是坐标轴上的角,它不属于任何象限.

【试题2】已知角 α 的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,求角 $\frac{\alpha}{3}$ 在 $[0, 2\pi)$ 内的值.

解析: $\because \alpha$ 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,

$\therefore \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}), \therefore \frac{\alpha}{3} = \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{9} (k \in \mathbb{Z}).$

又 $\because 0 \leq \frac{\alpha}{3} < 2\pi, \therefore 0 \leq \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{9} < 2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

4. 角度与弧度之间的互化

(1) 将角度化为弧度: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$; $180^\circ = \pi \text{ rad}$; $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$.

(2) 将弧度化为角度

$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$; $\pi \text{ rad} = 180^\circ$; $1 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$.

5. 角度制与弧度制的比较

(1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度, 角度制是以“度”为单位度量角的制度; (2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或弧)的大小, 而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或弧)的大小; (3) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

注意: (1) 角度制与弧度制中的单位不能混用: 如 $\frac{\pi}{6} + k \cdot 360^\circ$ 或 $60^\circ + 2k\pi$ 的写法是不允许的, 尤其是当角用字母表示时更要注意, 如角 α 是在弧度制下, 就不能写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ 等.

(2) 用“度”作为单位度量角时, “度”(即“°”)不能省略. 用“弧度”作为单位度量角时, “弧度”两字可以省略, 如 $\sin 3$ 是指 $\sin(3 \text{ rad})$, 这时的弧度数 3 在形式上是一个不名数, 应理解为名数. 常常把弧度数写成多少 π 的形式, 如无特别要求, 不必把 π 写成小数的形式.

(3) 用角度制表示角时, 总是十进制、六十进制混用: 度与度之间、分与分之间、秒与秒之间是十进制的, 例如 10 个 6 度是 60 度等, 而度、分、秒之间的关系是六十进制的, 计算起来不方便, 因此学习弧度制具有一定的优越性.

当 $k=0$ 时, $\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9}$, 在 $[0, 2\pi)$ 内;

当 $k=1$ 时, $\frac{\alpha}{3} = \frac{7\pi}{9}$, 在 $[0, 2\pi)$ 内;

当 $k=2$ 时, $\frac{\alpha}{3} = \frac{13\pi}{9}$, 在 $[0, 2\pi)$ 内.

$\therefore$ 在 $[0, 2\pi)$ 内, 角 $\frac{\alpha}{3}$ 的值有三个, 即 $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$.

【试题 3】 集合 $A = \{x | k\pi + \frac{\alpha}{4} \leq x < k\pi + \frac{\alpha}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{x | 6 + x - x^2 \geq 0\}$, 求 $A \cap B$.

解析: 因为 $6 + x - x^2 \geq 0$, 即 $x^2 - x - 6 \leq 0$,

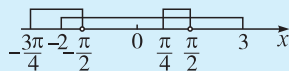
可得 $-2 \leq x \leq 3$. 对 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

取 $k=0$, 有 $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$,

取 $k=-1$, 有 $-\frac{3\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2}$,

当 k 取其他值时, $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 与 $[-2, 3]$

没有公共元素.



故由上图可得 $A \cap B = \{x | -2 \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\}$.

点评: 引入弧度制后, 就使得“弧度角”与“实数”之间建立了一一对应关系, 这使得弧度角具有了实数的属性.

课时演练

夯基达标

1. 下列命题中是假命题的是 ()

- A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
- B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$, 一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$
- C. 根据弧度的定义, 180° 一定等于 π 弧度
- D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角的大小, 都与圆的半径长短有关

2. 在半径不相等的圆中, 1 rad 的圆心角所对的 ... ()

- A. 弦长相等
- B. 弧长相等
- C. 弦长等于所在圆半径
- D. 弧长等于所在圆半径

3. 将 -1485° 化成 $\alpha + 2k\pi (0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z})$ 的形式是 ...

..... ()

- A. $-\frac{\pi}{4} - 8\pi$
- B. $-\frac{7\pi}{4} - 8\pi$
- C. $-\frac{\pi}{4} - 10\pi$
- D. $\frac{7\pi}{4} - 10\pi$

4. 与 $-\frac{13\pi}{3}$ 终边相同的角的集合是 ()

- A. $\{-\frac{\pi}{3}\}$
- B. $\{\frac{5\pi}{3}\}$
- C. $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$
- D. $\{\alpha | \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

5. 下列各对角中终边相同的角是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $-\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{22\pi}{3}$

C. $-\frac{7\pi}{9}$ 和 $\frac{11\pi}{9}$

D. $\frac{20\pi}{3}$ 和 $\frac{122\pi}{9}$

6. 若 φ 是第二象限角, 那么 $\frac{\varphi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2} - \varphi$ 都不是 ... ()

- A. 第一象限角
- B. 第二象限角
- C. 第三象限角
- D. 第四象限角

7. 已知 $\alpha = 2, \beta = 90^\circ, \gamma = -270^\circ$, 则这三个角的大小关系是 ()

- A. $\alpha < \beta = \gamma$
- B. $\alpha > \beta = \gamma$
- C. $\alpha > \beta > \gamma$
- D. 以上答案都不对

8. 在下列表格中填上相应的角度或弧度数:

度	0°		45°	60°		90°	135°	150°	180°		
弧度		$\frac{\pi}{8}$			$\frac{5\pi}{12}$					$\frac{3\pi}{2}$	2π

9. 和 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的角的集合中, 最大的负角是 _____.

10. 已知 $\alpha = 1\ 690^\circ$.

- (1) 把 α 写成 $2k\pi + \beta$ [其中 $k \in \mathbf{Z}, \beta \in [0, 2\pi)$] 的形式为 _____;
- (2) 求 θ , 使 θ 与 α 的终边相同, 且 $\theta \in (-4\pi, -2\pi)$, 则 $\theta =$ _____.

能力提升

11. 已知集合 $M = \{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}, P = \{x \mid x =$

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()

- A. $M = P$
- B. $M \supsetneq P$
- C. $M \subsetneq P$
- D. $M \cap P = \emptyset$

12. 已知四边形的四个内角之比是 $1:3:5:6$, 分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

13. 已知 $A = \{\alpha \mid (2k+1)\pi < \alpha < (2k+2)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\beta \mid -4 < \beta < 4\}$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

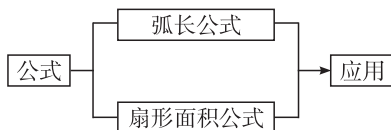
14. 钟表的两针在 3 点到 5 点 40 分这段时间里各转过多少度? 多少弧度?

走近高考

1. 2007 山东济宁高一统考, 4 若 $\alpha = -3$, 则角 α 的终边在 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限
 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 2007 南京高一统考, 6 已知集合 $A = \{\alpha \mid 2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于
 ()
 A. $\emptyset$
 B. $\{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
 C. $\{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq 4\}$
 D. $\{\alpha \mid -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
3. 设集合 $A = \{\alpha \mid \alpha = \frac{5}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 且 } |k| \leq 10\}$, $B = \{\beta \mid \beta = \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. 求与 $A \cap B$ 中角的终边相同的角的集合.

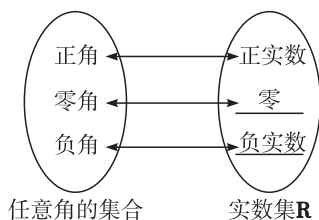
第二课时

新知预习



1. 弧度制下的弧长公式为 $l = \underline{\hspace{2cm}}$, 扇形面积公式为 $S = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 角度制下的弧长公式为 $l = \underline{\hspace{2cm}}$, 扇形面积公式为 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 角的概念推广后, 无论用角度制还是弧度制都能在角的集合与实数集之间建立一一对应关系:



回顾导引

1. 上节课我们学习了弧度制. 把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 这样规定出来的 1 弧度的角的大小是完全确定的, 与所用圆的大小无关. 并且我们知道了弧度与角度的换算:

$$180^\circ = \pi$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

2. 在小学我们学习过角度制下的弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$, 扇形面积公式 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$. 在学习了弧度制后, 根据 1 弧度角的定义及弧度与角度的换算很容易推得弧度制下的弧长公式和扇形的面积公式, 这就是本节课要学习的内容.

重难突破

在弧度制下, 弧长公式和扇形的面积公式分别为

$$l = |\alpha| \cdot r; S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2.$$

在角度制下, 弧长公式和扇形的面积公式分别为

$$l = \frac{n\pi r}{180}; S = \frac{n\pi r^2}{360}.$$

相比较, 弧度制下的弧长公式和扇形面积公式具有更为简单的形式, 记忆和应用更易操作, 但使用公式时应注意:

(1) 用公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 求圆心角时, 应注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 具体应用时既要注意大小还要注意正负.

(2) 使用弧度制下的弧长、扇形面积公式有诸多优越性, 但是如果已知的角是以“度”为单位, 则必须先化成弧度数后再计算, 从而避免计算过程及结果出错.

特别提示

(1) 在公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 中, 已知两个量求第三个量是常考题型, 方法是解方程即可.

活学巧用

【试题 1】已知扇形的周长为 30, 当它的半径 R 和圆心角 α 各取何值时, 扇形的面积最大? 并求出扇形面积的最大值.

解析: 设扇形的弧长为 l , 半径为 R , 则 $l + 2R = 30$.

$\therefore l = 30 - 2R$. 由 $0 < l < 2\pi R$, 得 $0 < 30 - 2R < 2\pi R$,

$$\therefore \frac{15}{\pi+1} < R < 15. \therefore S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} (30 - 2R)R = -R^2 + 15R = -\left(R - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \left(\frac{15}{\pi+1} < R < 15\right).$$

$$\therefore \text{当 } R = \frac{15}{2} \in \left(\frac{15}{\pi+1}, 15\right) \text{ 时, } S_{\text{最大}} = \frac{225}{4}.$$

$$\text{此时 } l = 30 - 2R = 15, \alpha = \frac{l}{R} = \frac{15}{\frac{15}{2}} = 2. \text{ 故当 } R =$$

$$\frac{15}{2}, \alpha = 2 \text{ rad 时, 扇形面积最大, 最大值为 } \frac{225}{4}.$$

【试题 2】如右图, “十字形”公路的交叉处周围呈扇形形状, 某市规划处拟在这块扇形土地上修建一个圆形广场. 怎样设计才能使广场的占地面积最大, 其值是多少? (图中 $\angle AOB = 60^\circ$, $\widehat{AB} = 100\pi \text{ m}$)

