

PREFACE

前言

《高中同步测控全优设计》饱含着我们的人文关怀,承载着我们的爱心与智慧——致力于打通高考通道,帮助你在学习的过程中找到成功的喜悦!

你手中的这本《高中同步测控全优设计》以理念统帅板块,以板块整合栏目,以栏目组织内容。从板块到栏目,从形式到内容,都紧紧扣准新课程的脉搏,做到了继承与创新合一。本书设置了三大板块【温故知新】【互动课堂】与【主动成长】。

【温故知新】在链接并温习已学知识的基础上,加强对新知识的预习与掌握,使前后内容有机交融、一脉相承。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“新知预习”和“知识回顾”。“新知预习”去粗取精,呈现出新知识的精华部分,并引导你自主掌握知识重点;“知识回顾”承前启后,为前后知识的学习搭起一座桥梁,并使知识在课内课外都得到再现与应用。

【互动课堂】倡导师生互动、生本互动,旨在让你实现从被动到主动的根本转变。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“疏导引导”和“活学巧用”。“疏导引导”既有对主干知识和学习方法的疏导与引导,又有针对主干知识的精选例题、精彩解析及精致升华;“活学巧用”凸现的是实践运用的风范与力量、探究创新的思路与乐趣、提高升华的深度与高度。

【主动成长】留给你一片自主锤炼、主动发展的天空,让你在第一时间成为学习的主人、创新的主人。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“夯基达标”“走近高考”。“夯基达标”展示的是知识点覆盖面广泛的基础题,为你搭建一个夯实基础、稳扎稳打、步步为营的平台;“走近高考”展示的是近年来的高考真题和模拟题,让你提前触摸高考、感受高考,做到有备无患。

本书图标形象生动、体例明确清晰、版式活泼大方、内容科学严谨,图文并茂的全优设计既做到了“活”而不乱,又做到了“实”而不死,是一本容易让你产生阅读冲动、爱不释手的教辅读物。

《高中同步测控全优设计》编写组



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS

目录

第一章 集合	1	互动课堂	42
本章概要	1	主动成长	45
1.1 集合与集合的表示方法	1	自主建构	47
温故知新	1	本章测评	47
互动课堂	2	第三章 基本初等函数(I)	49
主动成长	4	本章概要	49
1.2 集合之间的关系与运算	5	3.1 指数与指数函数	49
温故知新	5	温故知新	49
互动课堂	5	互动课堂	50
主动成长	9	主动成长	53
自主建构	10	3.2 对数与对数函数	55
本章测评	10	温故知新	55
第二章 函数	12	互动课堂	56
本章概要	12	主动成长	60
2.1 函数	12	3.3 幂函数	62
温故知新	12	温故知新	62
互动课堂	13	互动课堂	63
主动成长	22	主动成长	65
2.2 一次函数和二次函数	24	3.4 函数的应用(II)	67
温故知新	24	温故知新	67
互动课堂	25	互动课堂	67
主动成长	33	主动成长	70
2.3 函数的应用(I)	35	自主建构	72
温故知新	35	本章测评	72
互动课堂	35	综合测试一	75
主动成长	39	综合测试二	78
2.4 函数与方程	41	解析与答案	81
温故知新	41		



第一章 集合



本章主要讲述集合的初步知识,集合是数学中最基本的概念之一,也是初、高中数学衔接点之一.本章既对初中数学中有关概念(如数集、方程的解集、点的轨迹等)在理论上予以肯定和提高,同时也为集合思想进一步渗透于高中数学(如函数的概念,空间的点、线、面的关系,曲线和方程等)打下基础.集合论及其所反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用.

本章的知识要求:

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念;理解空集、全集的意义;理解属于、包含、相等关系的意义;能用有关术语和符号表示元素与集合、集合与集合之间的关系.其重点是有关集合的基本概念,难点是有关集合的各个概念的涵义以及这些概念相互之间的区别与联系.

本章是高中数学的起始章,学好本章知识,对于顺利学习高中数学意义重大,学习本章知识切忌急于求成.随着后续章节的学习,其应用越来越广泛和深入,相应地,对集合的理解和掌握水平也会越来越高.

1.1 集合与集合的表示方法



集合的定义与表示

(一)集合的概念与分类

1. 集合中元素的特征:_____、_____、_____.
2. 集合的分类:①_____:含有有限个元素的集合;②_____:含有无限个元素的集合;③_____:不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.

(二)集合的表示方法

1. 常用数集的字母表示:
自然数集—_____;
整数集—_____;
有理数集—_____;
实数集—_____.
2. _____法:把集合中的全部元素一一列出来,写在大括号内表示集合的方法.



背景链接

20 世纪初伟大的数学家、集合论的创始人——奥格尔·康托尔把人们从有限带进了无穷,把近代数学推向了现代数学.在 1874~1909 年的 30 多年间,他系统地建立了关于无穷集合的理论,创立了超穷序数、基数新概念,并把最新的超穷基数 $\aleph$ 赋予可数集,给连续统更高的超穷数,还建立了一整套有关的基本定理.1901 年勒贝格以测度论充实了集合论,康托尔的集合论才被公认了.

知识链接

初中接触的数集:自然数集、整数集、有理数集、实数集等;
自然数集的概念:自然数的全体组成



3. _____法:把集合中的元素的公共属性描述出来写在大括号内表示集合的方法.

(三)元素与集合的关系符号

1. 如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 _____.

2. 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 _____.



一、集合的概念

1. 集合:一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集).

(1)构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).

(2)如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A (记作 $a \in A$),如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A (记作 $a \notin A$).

2. 空集:一般地,把不含任何元素的集合叫空集,记作 $\emptyset$.

3. 集合的元素.

疑难疏引 集合中元素的特征:①确定性,是指集合中的元素是确定的,即任何一个对象都能明确它是或不是某个集合的元素,两者必具其一,它是判断一组对象是否形成集合的标准;②互异性,是指给定的一个集合的元素中,任何两个元素都是不同的,因而在同一个集合中,不能重复出现同一元素,这一点常被我们所忽略;③无序性,是指在一个集合中,元素之间都是平等的,它们都充当集合中的一员,无先后次序之分.

案例 1 下列各组对象:(1)接近于 0 的数的全体;(2)比较小的正整数全体;(3)平面上到 0 的距离等于 1 的点的全体;(4)正三角形的全体;(5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体,能否构成集合,为什么?

【探究】“接近于 0 的数”“比较小的正整数”标准不明确,所以(1)、(2)不是集合.同样“ $\sqrt{2}$ 的近似值”也不明确精确到什么程度,因此很难判定一个数是不是它的近似值,所以也不是一个集合.(3)、(4)能构成集合.

【溯源】判断命题是否构成集合最重要的标志就是看其所叙述对象是否具有确定性,即对所叙述对象进行描述的特征词语是否具有共性标准.

案例 2 设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$,数 k 应满足什么条件?

【探究】集合的元素,应具有集合的元素的属性,利用互异性可得解.

根据集合中元素的互异性,有 $k^2 - k \neq 2k$,解得 $k \neq 0, k \neq 3$,所以实数 k 的取值范围是 $\{k | k \neq 0 \text{ 且 } k \neq 3\}$.

【溯源】判断一组对象能否构成一个集合,关键是看这组对象是否同时具备集合元素的三个特征.考查该知识点的问题分正向和逆向思维两个角度,其解决问题的基础还是正确理解三个特征要求.

4. 常用的数集及其记法

(1)全体非负整数组成的集合称为非负整数集,记作 $\mathbb{N}$.

(2)所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.

(3)全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbb{Z}$.

自然数集;

自然数集的表示方法:在椭圆圈内填上一些自然数,点上三点,在圈下写上“自然数集”,用此形式表示自然数集.



活学巧用

1 下列对象不能构成集合的是 …()

①方程 $x^2 - 9 = 0$ 的实数根;②我国近代著名的数学家;③联合国常任理事国;④空气中密度大的气体.

A. ①② B. ①④
C. ①②④ D. ②④

【思路解析】研究对象能否构成集合的问题一般主要考查集合元素的确定性.①③中的研究对象显然符合确定性;②中“著名”没有明确的界限;④中“密度大”的程度没有明确的界限.

【答案】D

2 已知 $-3 \in \{a-3, 2a-3, a^2-4\}$,求 a .

【分析】已知集合中的三个元素都含有未知数,且都具有不确定性,故不能确定 -3 就是其中的哪一个,应根据分类讨论的思想进行逐一计算.

【解】若 $-3 = a-3$,即 $a=0$.

当 $a=0$ 时, $2a-3 = -3$,即不符合元素的互异性,

$\therefore a=0$ (舍);

若 $-3 = 2a-3 \Rightarrow a=0$,同理舍掉;

当 $a^2-4 = -3$,即 $a = \pm 1$.

若 $a=1$ 时,集合为 $\{-2, -1, -3\}$;

若 $a=-1$ 时,集合为 $\{-4, -5, -3\}$. $\therefore a = \pm 1$.

3 集合 $P = \{1, m, m^2 - 3m - 1\}$, $Q = \{-1, 3\}$,若 $3 \in P$ 且 $-1 \notin P$,则实数 m 的值为 …………… ()

A. 4 B. 3
C. 4 或 3 D. -1 或 4

【思路解析】 $\because 3 \in P$ 且 $-1 \notin P$,

$\therefore m^2 - 3m - 1 = 3$,

$\therefore m=4$ 或 $m=-1$ (舍)

或 $m=3$ (舍).





(4)全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

(5)全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

准确记忆常用数集的符号表示,特别注意 $\mathbf{Z}^+$ 、 $\mathbf{N}$ 等拓展符号表示的集合特征以及数 0 的归属问题.

二、集合的表示方法

列举法:把集合中的全部元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法;

描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,在大括号内表示集合的方法.

疑难疏引 (1)在使用列举法时应注意以下四点:①元素间用逗号“,”;②元素不重复;③不考虑元素顺序;④对于含元素较多的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律呈现出来后,才能用省略号表示,如 $\{1,2,3,\dots,n\}$ 、 $\{1,3,5,7,9,\dots\}$.

(2)在使用描述法时应注意以下几点:①写清元素代号;②说清集合中元素的特性;③文字表述多层次时,应当准确使用“且”“或”;④所有描述的内容都写在集合括号内;⑤语句力求简明、确切,字句逐一说明.

(3)列举法与描述法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.要注意:一般无限集时,不宜采用列举法,因为不能将无限集中元素一一列举出来,而没有列举出来的元素往往难以确定.但要注意,有时为了方便,在不引起混淆的情况下,也把具有明显特征的无限集用列举法表示,如 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ 等.

案例 3 下面六种表示法:

(1) $\{x=-1, y=2\}$; (2) $\{(x, y) \mid \begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases}\}$; (3) $\{-1, 2\}$; (4) $(-1, 2)$;
(5) $\{(-1, 2)\}$; (6) $\{(x, y) \mid x=-1 \text{ 或 } y=2\}$.

其中能正确表示方程组 $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集的是哪些?

探究 由于此方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \end{cases}$ 因而写成集合时,应表示成一有序实数对 $(-1, 2)$.

因为 $\{(x, y) \mid \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}\} = \{(x, y) \mid \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}\} = \{(-1, 2)\}$.

溯源 在研究元素与集合的关系时,一要注意集合的表示方法(列举法或描述法),二要准确判断元素所具有的特征性质.

三、元素与集合的关系

判定元素与集合的关系,结合元素的性质解决元素与集合的“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”问题.

疑难疏引 (1)元素和集合的关系是 $\in$ 和 $\notin$,二者有且只有一种成立.集合具有两方面的意义,即:凡是符合条件的对象都是它的元素;只要是它的元素就必须符合条件.(2)辩证地理解集合和元素这两个概念:集合和元素是两个不同的概念,符号 $\in$ 和 $\notin$ 是表示元素和集合之间关系的,不能用来表示集合之间的关系.例如 $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$ 的写法就是错误的,而 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 的写法就是正确的.

案例 4 若集合 $M=\{a \mid a=x^2-y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$.

(1)整数 8、9、10 是否属于 M ?

(2)证明一切奇数都属于 M .

探究 要判断 8、9、10 是否属于 M ,关键是看 8、9、10 能否写成两个整数的平方差.

(1) $\because 8=3^2-1, 9=5^2-4^2, \therefore 8 \in M, 9 \in M$.

假设 $10=x^2-y^2, x, y \in \mathbf{Z}$, 则 $(|x|+|y|)(|x|-|y|)=10$, 且 $|x|+|y| > |x|-|y| > 0$.

$\because 10=1 \times 10=2 \times 5, \therefore \begin{cases} |x|+|y|=0, \\ |x|-|y|=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |x|+|y|=5, \\ |x|-|y|=2, \end{cases}$

$\therefore m=4$. 因此,选 A.

答案 A

4 给出下面几个关系式: $\sqrt{2} \in \mathbf{R}, 0.3 \in \mathbf{Q}, 0 \in \mathbf{N}, 0 \in \{0\}, 0 \in \mathbf{N}_+, \frac{1}{2} \in \mathbf{N}_+, -\pi \notin \mathbf{Z}, -5 \notin \mathbf{Z}$. 其中正确的关系式的个数是 ()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

思路解析 注意常用数集的字母表示.

答案 A

5 已知集合 $P=\{0, 1, 2, 3, 4\}, Q=\{x \mid x=ab, a, b \in P, a \neq b\}$, 用列举法求集合 Q .

思路解析 集合 Q 中的元素是集合 P 中任意两个元素的积, 结合元素互异性要求, 不同的积有 0, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

答案 $Q=\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

6 用另一种形式表示下列集合:

(1){绝对值不大于 3 的整数};
(2){所有被 3 整除的数};
(3) $\{x \mid x=|x|, x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5\}$;
(4) $\{x \mid (3x-5)(x+2)(x^2+3)=0, x \in \mathbf{Z}\}$.

解 (1)绝对值不大于 3 的整数还可以表示为 $\{x \mid |x| \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$, 也可表示为 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(2) $\{x \mid x=3n, n \in \mathbf{Z}\}$. (说明: {被 3 除余 1 的整数}可表示为 $\{x \mid x=3n+1, n \in \mathbf{Z}\}$)

(3) $\because x=|x|, \therefore x \geq 0$.

又 $\because x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5$,

$\therefore \{x \mid x=|x|, x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5\}$ 还可以表示为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(4) $\{-2\}$. (注意 $x \in \mathbf{Z}$)

7 已知集合 $A=\{x \mid x=m+n\sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}\}$, 判断下列元素 x 与集合 A 的关系:

(1) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

(2) $x=x_1+x_2$ (其中 $x_1 \in A, x_2 \in A$).

分析 本题考查元素与集合的关系. 判断某对象是否为某集合的元素, 关键在于判断它们是否具备该集合元素共有的属性, 即将 x 值试着写成 $m+n\sqrt{2}$ 的形式, 若 m, n 是整数, 便可完成判定, 若无法表示成上式或 m, n 不为整数, 则 x 不为集合中元素.

解 (1) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, 即 $m=$

$\sqrt{3}, n=1$, 其中 $\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}, \therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \notin A$.





显然均无整数解, $\therefore 10 \notin M$.

(2) 设奇数为 $2n+1, n \in \mathbf{Z}$, 恒有 $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$, $\therefore 2n+1 \in M$, 即一切奇数都属于 M .

【溯源】关于集合 M , 我们还可以获得以下结论:

- ① M 中的所有元素都属于 $\mathbf{Z}$;
- ② M 是无限集合;
- ③ 偶数 $4n-2 (n \in \mathbf{Z})$ 不属于 M .

(2) $\because x_1, x_2 \in A$, 设 $x_1 = m_1 + n_1\sqrt{2}, x_2 = m_2 + n_2\sqrt{2} (m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbf{Z})$, 则 $x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}$, 由 $m_1 + m_2 \in \mathbf{Z}, n_1 + n_2 \in \mathbf{Z}$, $\therefore x_1 + x_2 \in A$.



- 1 在“①高一数学课本中的难题; ②所有的正三角形; ③方程 $x^2+2=0$ 的实数解”中, 能够表示成集合的是 ()
A. ② B. ③
C. ②③ D. ①②③
- 2 已知集合 $A = \{x | x \in \mathbf{R}, |x-1| < \sqrt{3}\}$, 则有 ()
A. $3 \in A$ 且 $-3 \notin A$ B. $3 \in A$ 且 $-3 \in A$
C. $3 \notin A$ 且 $-3 \in A$ D. $3 \notin A$ 且 $-3 \notin A$
- 3 下列命题中正确的是 ()
A. $\{0\}$ 是空集
B. $\{x \in \mathbf{Q} | \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$ 是有限集
C. $\{x \in \mathbf{Q} | x^2+x+2=0\}$ 是空集
D. $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 1\}$ 是不同的集合
- 4 设 $U = \mathbf{R}, M = \{a | a = x + \sqrt{2}y, x, y \in \mathbf{Q}\}$, 则下列说法中正确的是 ()
A. $M = \mathbf{Q}$ B. $M \subseteq \mathbb{Q}Q$
C. $M \subsetneq \mathbf{Q}$ D. $M \supsetneq \mathbf{Q}$
- 5 集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x | x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}, C = \{x | x = 4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$. 又 $a \in A, b \in B$, 则一定有 ... ()
A. $a+b \in A$ B. $a+b \in B$
C. $a+b \in C$ D. $a+b \notin A, B, C$ 中任一个
- 6 集合 $M = \{a | \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N}, \text{且 } a \in \mathbf{Z}\}$, 用列举法表示集合 $M =$ _____.
- 7 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, \sqrt[3]{x^3}$ 所构成的集合最多有 _____ 个元素.



- 8 2005 湖北高考, 理 1 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ()
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6
- 9 (经典回放) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{N}^*\}, N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{N}^*\}$, 试用列举法表示集合 M, N .
- 10 2005 湖北黄冈模拟 下列四个集合中不同于另外三个的是 ()
A. $\{y | y = 2\}$ B. $\{x | x^2 - 4x + 4 = 0\}$
C. $\{x = 2\}$ D. $\{2\}$
- 11 2006 河北唐山模拟, 14 设 x, y, z 都是非零实数, 则用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xy}{|xy|} + \frac{xz}{|xz|} + \frac{yz}{|yz|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 所有可能的值组成的集合表示出来为 _____.



1.2 集合之间的关系与运算



一、集合之间的基本关系

1. 子集: 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A 包含于集合 B , 或者说集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$; 当集合 A 不包含于集合 B , 或集合 B 不包含集合 A 时, 记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 我们就说集合 A 等于集合 B , 记作 $A=B$, 即若 $A \subseteq B$, 又 $B \subseteq A$, 则 $A=B$.

2. 子集和真子集

(1) 若 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 则 A 是 B 的 子集. 空集是任何集合的 子集, 即 $\emptyset \subseteq A$. 任何一个集合是它本身的 子集, 即 $A \subseteq A$.

(2) 对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 则 A 是 B 的 真子集, 记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$). 空集是任何非空集合的 真子集.

(3) 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

3. 全集: 如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个 全集, 由 U 来表示. 全集具有相对性.

4. 补集: 所谓 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 但 } x \notin A, A \subseteq U\}$ 就是说从全集 U 中取出集合 A 的 元素 之后, 所有剩余的元素组成的集合就是 $\complement_U A$.

二、集合的运算

1. 交集: 由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的 交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

2. 并集: 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的 并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.



一、集合之间的关系

1. 子集、真子集与集合相等

定义: 对于两个集合 A 和 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,



背景链接

在集合论产生与发展的整个过程中, 许多数学家与哲学家从事了集合论的研究工作, 并取得了令人振奋的成就, 策墨罗和弗郎克尔通过对康托尔朴素集合论的研究, 提出了 ZF 公理系统, 把集合论建立在一系列公理系统上, 使朴素集合论完善为公理化集合论. 它克服了康托尔朴素集合论引起的一些矛盾, 推动了集合论的发展.

应用链接

高一(2)班共 40 人, 从学校去公园, 全程步行的有 3 人, 坐公共汽车的有 18 人, 不坐公共汽车也不步行的有 6 人, 那么既坐公共汽车也步行一段路的人数为多少? 这个问题如何解决?



① 满足 $\{a, b\} \subseteq A \subset \{a, b, c, d\}$ 的集合 A 是什么?

【思路解析】本题主要考查了集合之间



我们就说集合 A 是集合 B 的子集.

若集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同则称集合 A 等于集合 B , 记作 $A=B$.

若集合 A 是集合 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$. 即

- ① 如果 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.
- ② 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么 $A=B$.
- ③ 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

疑难疏引 (1)“ A 是 B 的子集”, A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 即由任意 $x \in A$ 能得到 $x \in B$. (2) 任何一个集合是它本身的子集, 记作 $A \subseteq A$. (3) 空集是任何集合的子集. (4) 在子集的定义中, 不能理解为子集 A 是 B 中的“部分元素”所组成的集合.

案例 1 设集合 $A=\{1,2\}$, 集合 $B=\{x|x \subseteq A\}$, 用列举法写出 B , 并指出集合 A 与集合 B 的关系.

【探究】 本题要注意集合 B 中元素的属性——它是集合 A 的子集, 问题归结为集合 A 的所有子集. A 的子集为 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{1,2\}$ 、 $\emptyset$, 所以 $B=\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$, 集合 A 是 B 的一个元素, 所以 A 与 B 的关系是 $A \in B$.

【溯源】 (1) 集合的元素是任意的. (2) 在解有关集合问题时, 对元素的识别是一个十分重要的环节, 必须做到准确无误.

2. 子集与真子集的性质

- (1) 传递性: 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
- (2) 空集是任意集合的子集, 是任意非空集合的真子集.

疑难疏引 (1) 一个集合的子集的个数仅与这个集合的元素的个数有关. 含 n 个元素的集合的子集数为 2^n 个, 非空子集数为 $2^n - 1$ 个, 真子集数为 $2^n - 1$ 个, 非空真子集数为 $2^n - 2$ 个.

(2) 两集合相等的意义是两集合中的元素都相同, 在求集合中元素字母的值时, 可能产生与互异性相矛盾的增解, 这需要解题后进行检验, 去伪存真. 同时还要注意分类讨论思想的应用, 做到不重不漏.

案例 2 若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$, $B=\{x|mx+1=0\}$, $B \subsetneq A$, 求 m 的值.

【探究】 要解决此问题, 要先搞清楚集合 A 的元素是什么, 然后根据 $B \subsetneq A$, 求得 m 值. $A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$. B 是 A 的真子集, 则 B 可能是 $\emptyset$ 、 $\{-3\}$ 、 $\{2\}$, 即可求得 $m=0$ 或 $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

3. 集合相等的应用

符号说明: $A \subseteq B$, $B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$.

案例 3 设 $A=\{x,y\}$, $B=\{1,xy\}$, 若 $A=B$, 求 x,y .

【探究】 本题主要考查了集合相等的概念, 注意分类讨论的数学思想的使用, 此处还要注意到集合中元素的性质. 当 $x=1$ 时, $y=xy$, 可解出 $y \in \mathbf{R}$ 且 $y \neq 1$.

同理, 可知当 $y=1$ 时, 可解出 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 1$.

【溯源】 两个集合相同, 要求两个集合中的元素都要相同, 元素相同就要求元素的种类、属性和数量都要相同. 要注意: 集合中元素个数较少时采用数形结合的思想进行解析和理解, 更容易抓住概念的本质. 同时对数集和点集用列举法表示要格外重视区别, 还要注意到用描述法表示数集和点集对元素特征的描述也是完全不同的.

二、集合的运算

1. 交集

定义: 一般地, 由所有属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 、 B 的交集, 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即 $A \cap B = \{x|x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

基本性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

的子集与真子集的关系, 可以使用列举法写出有关满足要求的集合.

【答案】 $\{a,b\}, \{a,b,c\}$.

- 2 分别写出 $\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}$ 这三个集合的子集的个数并自己总结规律.

【思路解析】 本题主要考查了一个集合的子集的组成, 此外不能忽略空集以及集合本身.

【答案】 $\{a\}$ 的子集为 $\emptyset, \{a\}$; $\{a,b\}$ 的子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$; $\{a,b,c\}$ 的子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$. 所以个数分别为 2, 4, 8. 规律猜想为: 如果集合中的元素个数为 n , 则这个集合的子集个数为 2^n .

- 3 已知集合 $A=\{x|-2 < x \leq 5\}$, $B=\{x|-m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ 且 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值范围.

【分析】 分析可知集合 A 是集合 B 的子集, 从本质上要注意到这两个集合所表示的范围的大小. 方法可采用数轴法.

【解】 $\because A \subseteq B$,

$$\therefore \begin{cases} -2 \geq -m+1, \\ 5 \leq 2m-1. \end{cases}$$

$$\therefore m \geq 3.$$

- 4 下列说法正确的是 ()

① 任意集合必有子集; ② 空集是任意集合的真子集; ③ 若集合 A 是集合 B 的子集, 集合 B 是集合 C 的子集, 则集合 A 是集合 C 的子集; ④ 若不属于集合 A 的元素也一定不属于集合 B , 则 B 是 A 的子集.

- A. ①②③ B. ①③④
C. ①③ D. ①②③④

【思路解析】 此题考查子集的性质, 并需要注意空集的特殊性.

(1) 任意集合都是自身的子集, 因此①正确. (2) 空集是任意非空集合的真子集, 因此②不正确. (3) 集合子集的性质具有传递性, 因此③正确. (4) 可利用韦恩图进行分析, ④正确.

【答案】 B

- 5 已知 $M=\{x|x \leq 1\}$, $N=\{x|x > a\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 ()

- A. $a < 1$ B. $a > 1$
C. $a \leq 1$ D. $a \geq 1$

【分析】 本题主要考查了集合交集的定义, 对集合中元素的性质的准确把握是解决此题的关键. 方法可以使用数轴法.





案例 4 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为

- A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$
C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

【探究】 由已知得 $M \cap N = \{(x, y) | x + y = 2, \text{ 且 } x - y = 4\} = \{(3, -1)\}$.

也可采用筛选法. 首先, 易知 A、B 不正确, 因为它们都不是集合符号. 又集合 M 、 N 的元素都是数组 (x, y) , 所以 C 也不正确.

【溯源】 求两集合的交集即求同时满足两集合中元素性质的元素组成的集合. 本题中就是求方程组 $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4 \end{cases}$ 的解组成的集合. 另外要弄清集合中元素的一般形式.

2. 并集

定义: 一般地, 对于给定的两个集合 A 、 B , 把它们所有的元素并在一起所组成的集合, 叫做 A 、 B 的并集, 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

基本性质: $A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

案例 5 已知关于 x 的方程 $3x^2 + px - 7 = 0$ 的解集为 A , 方程 $3x^2 - 7x + q = 0$ 的解集为 B , 若 $A \cap B = \{-\frac{1}{3}\}$, 求 $A \cup B$.

【探究】 本题主要考查了交集与并集的定义, 以及它们在解题中的灵活应用, 过程如下: $\because A \cap B = \{-\frac{1}{3}\}$, $\therefore -\frac{1}{3} \in A$ 且 $-\frac{1}{3} \in B$.

$$\therefore 3(-\frac{1}{3})^2 + p(-\frac{1}{3}) - 7 = 0, \text{ 且 } 3(-\frac{1}{3})^2 - 7(-\frac{1}{3}) + q = 0.$$

$$\therefore p = -20, q = -\frac{8}{3}. \text{ 由 } 3x^2 - 20x - 7 = 0, \text{ 得 } A = \{-\frac{1}{3}, 7\}.$$

$$\text{由 } 3x^2 - 7x - \frac{8}{3} = 0, \text{ 得 } B = \{-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\}. \therefore A \cup B = \{-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, 7\}.$$

【溯源】 $A \cap B$ 中的元素都是 A 、 B 中的元素是解决本题的突破口, $A \cup B$ 中只能出现一次 A 与 B 的公共元素, 这是在求集合并集时需注意的.

3. 全集、补集

定义: 在给定的问题中, 若研究的所有集合都是某一给定集合的子集, 那么称这个给定的集合为全集. 若 A 是全集 U 的子集, 由 U 中不属于 A 的元素构成的集合, 叫做 A 在 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$.

基本性质: $A \cap \complement_U A = \emptyset$, $A \cup \complement_U A = U$, $\complement_U(\complement_U A) = A$.

$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

案例 6 已知全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, 若 $A = \{b, 2\}$, $\complement_I A = \{5\}$, 求实数 a 、 b .

【探究】 本题主要考查了全集及补集的定义和集合元素的性质, 以及它们在解题中的灵活应用.

$$\because A \cup \complement_I A = I, \therefore b = 3, a^2 + 2a - 3 = 5. \therefore \text{可解得 } a = -4 \text{ 或 } 2.$$

$$\therefore b = 3, a = -4 \text{ 或 } 2.$$

4. 集合的综合运用

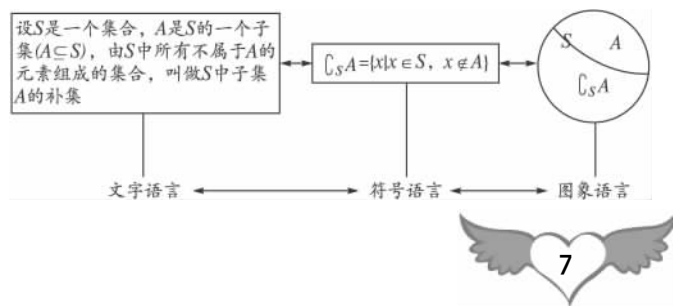
(1) 基本知识: ① 集合与元素 (定义, 表示方法);

② 集合的关系 (子集, 真子集, 集合相等);

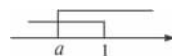
③ 集合运算 (交集, 并集, 补集).

(2) 基本方法: 枚举法, 分析法, 综合法, 数形结合.

● 疑难疏引 1. 用数学的三种语言互译表示全集与补集



【解】



借助上图可知 $a < 1$, 选择 A.

【答案】 A

6 集合 $P = \{1, 2, m^2 - 3m - 1\}$, $Q = \{-1, 3\}$, 若 $P \cap Q = \{3\}$, 则实数 m 的值为

- A. 4 B. -1
C. -4 或 1 D. -1 或 4

【分析】 根据 $P \cap Q = \{3\}$ 和交集的定义可知元素 3 既在集合 P 中也在集合 Q 中, 而集合 Q 中已经有元素 3 了, 所以集合 P 中的未知元素 $m^2 - 3m - 1$ 一定等于 3, 即 $m^2 - 3m - 1 = 3$. 解关于 m 的方程, 可得 m 的值.

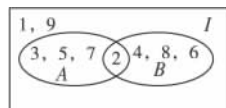
【解】 $\because P \cap Q = \{3\}$,
 $\therefore m^2 - 3m - 1 = 3$.
 $\therefore m = -1$ 或 $m = 4$.
因此, 选 D.

【答案】 D

7 已知全集 $I = \{\text{小于 } 10 \text{ 的正整数}\}$, 其子集 A 、 B 满足 $\complement_I A \cap \complement_I B = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\complement_I A \cap B = \{4, 6, 8\}$, 求集合 A 、 B .

【思路解析】 本题主要考查的是全集、补集, 以及交集之间的运算, 方法可采用韦恩图法.

【答案】



所以 $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

8 已知集合 $I = \{\text{不超过 } 5 \text{ 的正整数}\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$, 且 $(\complement_I A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, 求 p 、 q 的值, 并求 $(\complement_I A) \cap (\complement_I B)$.

【思路解析】 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 设方程 $x^2 - 5x + q = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 5, x_1 \cdot x_2 = q$.
设方程 $x^2 + px + 12 = 0$ 的根为 x_3, x_4 , 则 $x_3 + x_4 = -p, x_3 \cdot x_4 = 12$.

$$\because A \subseteq I, B \subseteq I, \text{ 且 } x_3 x_4 = 12,$$

$$\therefore B = \{3, 4\},$$

$$\text{从而 } p = -(x_3 + x_4) = -(3 + 4) = -7.$$

$$\text{又 } (\complement_I A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\},$$

$\therefore 1 \notin A, 5 \notin A$. 而 A 仅有两个元素, 且 $x_1 + x_2 = 5$,



2. 集合运算注意事项

(1) 处理集合运算问题时，要注意化简集合的表达式. 如果集合中含有字母，要注意对字母分类讨论.

(2) 在解决有关集合运算题目时，一要把握概念中的关键词，如“所有”“且”“或”；二要把握它们各自的实质；三要借助数轴，应用数形结合的思想.

(3) 韦恩图在集合中起到数形结合的作用，由图可以把一些不明确的数量关系直观地表现出来，起到化繁为简、化抽象为直观的作用.

(4) 集合作为数学语言，已深刻地融入函数、方程、不等式、平面曲线、平面区域等有关知识之中，处理集合问题时，应充分综合运用有关的数学知识进行求解.

(5) 在学习子、交、并、补集的概念时，应注意对“任何一个”“都”“所有”“或”“且”等词的理解，“交集”是指两个集合中所有公共元素所组成的集合，忽略了“交集”概念中的“所有”两个字就会错误地认为“若 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ ，则 $A \cap B = \{2\}$ ”。“并集”概念中的“或”与生活用语中的“或”含义不同，生活用语中的“或”一般是或此或彼，必具其一，不兼有，“并集”概念中的“或”是可兼有的，但不一定必须兼有.

记忆口诀：

集合平时很常用，数学概念有不同，理解集合并不难，三个要素是关键.

元素确定和互异，还有无序要牢记，集合不论空不空，总有子集在其中.

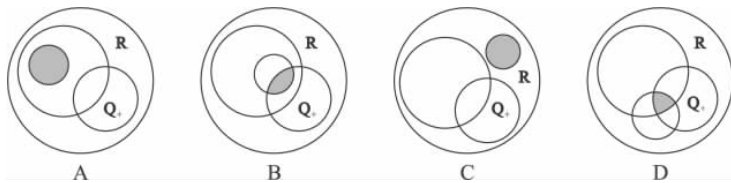
集合用图很方便，子交并补很明显.

案例 7 满足条件 $\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的所有集合 B 的个数有多少个，为什么？

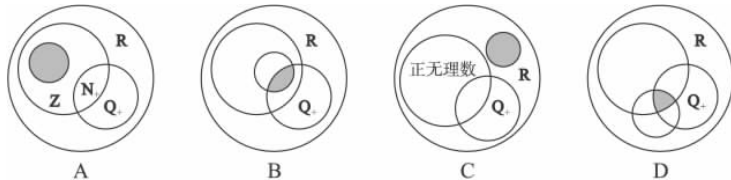
【探究】 此题是关于集合运算的逆运算，已知两个集合并的结果和其中的一个集合，求另一个集合，解决时要以元素为突破口，逐一试验可能的值，要做到不遗漏. 根据题意可得集合 B 中元素的个数可能是 2 个或 3 个或 4 个或 5 个. 当集合 B 中的元素个数为 2 个时， B 只能有一种可能的情况，即 $B = \{4, 5\}$ ；当集合 B 中的元素个数为 3 个时，集合 B 有三种可能的情况，即 $B = \{1, 4, 5\}$ 或 $B = \{2, 4, 5\}$ 或 $B = \{3, 4, 5\}$ ；当集合 B 中的元素个数为 4 个时，集合 B 也有三种可能的情况，即 $B = \{1, 2, 4, 5\}$ 或 $B = \{1, 3, 4, 5\}$ 或 $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ；当集合 B 中的元素个数为 5 个时，集合 B 只能有一种可能的情况，即 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 综上所述，所有集合 B 的个数有 8 个.

【溯源】 集合中考查集合个数问题的类型还包括有限集合的子集个数问题，其结论为含 n 个元素的集合的子集个数为 2^n ，真子集个数为 $2^n - 1$.

案例 8 下图表示的是数集韦恩图，则图中阴影部分表示 $\{0\}$ 的是哪个选项，为什么？



【探究】 从图中可以看出，这是一道关于用韦恩图对实数进行分类的题目，考查分类标准是否一致， $\therefore$ 用排除法逐一判断，再检验. 如图所示. A 正确；判断 B， $\because \{0\} \not\subset Q$ ， $\therefore$ B 不正确；判断 C， $\because$ 如果实数分为三类的话，应分成正实数、零、负实数，那么在正实数中又可分为正有理数和正无理数，但是正有理数和正无理数是没有交集的， $\therefore$ C 也不正确；判断 D， $\because \{0\} \not\subset Q$ ， $\therefore$ D 不正确. 因此，选 A.



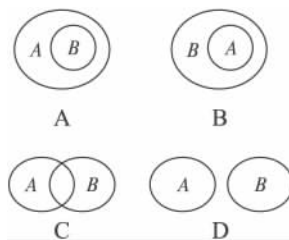
【溯源】 使用韦恩图表示集合关系和集合运算是数形结合的特例，其重点之一是韦恩图表示的是集合与集合之间的关系，不是元素与集合间的关系；二是要清楚题中表述的集合对象类别，以确定其间的包含关系或运算关系等.

$$\therefore A = \{2, 3\}, q = x_1 x_2 = 6.$$

$$\text{从而 } p = -7, q = 6, A = \{2, 3\}, B = \{3, 4\}, (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 5\}.$$

【答案】 $p = -7, q = 6, (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 5\}.$

9 设集合 $A = \{x | x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ ，则下列图形中能表示 A 与 B 的关系的是 ()



【思路解析】 综合考查集合的表示方法.

由描述法表示的集合中 $n \in \mathbb{Z}$ 得枚举法表示为 $A = \{\dots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}, B = \{\dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$,

知 $A \subset B$ ，所以韦恩图表示为 B.

【答案】 B

10 已知全集 $S = \{x | |x| < 8, x \in \mathbb{N}\}$ ， A, B 是 S 的子集，若 ① $(\complement_S A) \cup (\complement_S B) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ；

$$\text{② } (\complement_S A) \cap B = \{2, 6\};$$

$$\text{③ } (\complement_S B) \cap A = \{1, 7\}.$$

求满足上述条件的集合 A, B .

【思路解析】 由 ① 知 $\complement_S (A \cap B) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,

$$\therefore A \cap B = \{3\}, \text{即 } 3 \in A, \text{且 } 3 \in B;$$

由 ② 知 $2 \in B, 6 \in B$ ，但 $2 \notin A, 6 \notin A$ ；

由 ③ 知 $1 \in A, 7 \in A$ ，但 $1 \notin B, 7 \notin B$.

$$\therefore A = \{1, 3, 7\}, B = \{2, 3, 6\}.$$

【说明】 另可借助韦恩图直观推理分析.

【答案】 $A = \{1, 3, 7\}, B = \{2, 3, 6\}.$



- 1 如果 $S = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{x | x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 那么 ()
A. $S \subset T$ B. $T \subset S$ C. $S = T$ D. $S \neq T$
- 2 集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的子集的个数为 ()
A. 4 B. 6 C. 7 D. 8
- 3 设集合 $M = \{m | m \in \mathbf{N} \text{ 且 } 8 - m \in \mathbf{N}\}$, 则 m 的个数是 ()
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
- 4 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 等于 ()
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$
C. $\{0, 1, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 5 设集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{x \in \mathbf{R} | 2 \leq x \leq 6\}$, 那么下列结论正确的是 ()
A. $P \cap Q = P$ B. $P \cap Q \neq Q$
C. $P \cup Q = Q$ D. $P \cap Q \subsetneq P$
- 6 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x < 1\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} M \cap N$ 等于 ()
A. $\{x | x < -2\}$ B. $\{x | -2 < x < 1\}$
C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$
- 7 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 8 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是 ()
A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$
- 9 下列四个关系式中正确的是 ()
A. $\emptyset \in \{a\}$ B. $a \notin \{a\}$
C. $\{a\} \in \{a, b\}$ D. $a \in \{a, b\}$
- 10 若集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x(x-1) = 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$
- 11 满足条件 $\{0, 1\} \cup A = \{0, 1\}$ 的所有集合 A 的个数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 12 下列四个命题中, 设 U 为全集, 则不正确的命题是 ()
A. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = U$
B. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A = B = \emptyset$
C. 若 $A \cup B = U$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \emptyset$
D. 若 $A \cup B = \emptyset$, 则 $A = B = \emptyset$



- 13 (经典回放) 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 等于 ()
A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$
- 14 (2005 湖南高考, 4) 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 那么 A 的真子集的个数是
- 15 (2005 全国高考, 2) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()
A. $\complement_I S_1 \cap (S_1 \cup S_3) = \emptyset$
B. $S_1 \supset (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$
D. $S_1 \subset (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$
- 16 (经典回放) 设 $A = \{x | x = \sqrt{5k+1}, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x | x \leq 6, x \in \mathbf{Q}\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{1, 4\}$ B. $\{1, 6\}$
C. $\{4, 6\}$ D. $\{1, 4, 6\}$
- 17 (2005 湖北高考) 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:
① $A \not\subset B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$; ② $A \not\subset B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
③ $A \not\subset B \Leftrightarrow B \not\subset A$; ④ $A \not\subset B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.
其中真命题的序号是 (把符合要求的命题序号都填上)
- 18 (2006 北京海淀模拟, 3) 设集合 $A = \{\text{圆}\}$, 集合 $B = \{\text{直线}\}$, 则 $A \cap B =$
- 19 (2006 唐山第三次模拟, 1) 设集合 $M = \{x | x = n, n \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x | x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()
A. $N \subseteq M$ B. $N = M \cup P$
C. $N \subseteq P$ D. $N = M \cap P$
- 20 (2004 黄冈模拟, 14) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m+1 < x < 2m-1\}$, 若 $A \cup B = A$, 则函数 m 的取值范围是 ()
A. $-3 \leq m \leq 4$ B. $-3 < m < 4$
C. $2 < m < 4$ D. $m \leq 4$
- 21 (2006 大连模拟, 3) 设集合 $I = \{x | |x| < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 2\}$, 则 $A \cup \complement_I B$ 为 ()
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
- 22 (2006 北京海淀模拟, 1) 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 3 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$ 的非空真子集的个数是 ()
A. 16 B. 8
C. 6 D. 4

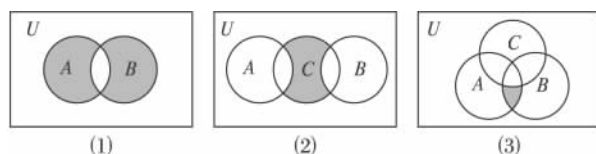


本章测评

- 下列几组对象可以构成集合的是 ()
 A. 充分接近 π 的实数的全体
 B. 善良的人
 C. A 校高一(1)班所有聪明的学生
 D. B 单位所有身高在 1.75 cm 以上的人
- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集共有 ()
 A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个
- 设 A、B 是全集 U 的两个子集, 且 $A \subseteq B$, 则下列式子成立的是 ()
 A. $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ B. $\complement_U A \cup \complement_U B = U$
 C. $A \cap \complement_U B = \emptyset$ D. $\complement_U A \cap B = \emptyset$
- 如果集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 那么 a 的值是 ()
 A. 0 B. 0 或 1
 C. 1 D. 不能确定
- 设集合 $M = \{x | x \leq 2\sqrt{3}\}$, $a = \sqrt{11+b}$, 其中 $b \in (0, 1)$, 则下列关系中正确的是 ()
 A. $a \subseteq M$ B. $a \notin M$
 C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subseteq M$
- 已知 $A = \{1, 2, a^2 - 3a - 1\}$, $B = \{1, 3\}$, $A \cap B = \{3, 1\}$, 则 a 等于 ()
 A. -4 或 1 B. -1 或 4
 C. -1 D. 4
- 已知 I 为全集, 集合 $M, N \subseteq I$, 若 $M \cap N = N$, 则 ()
 A. $\overline{M} \supseteq \overline{N}$ B. $M \subseteq \overline{N}$
 C. $\overline{M} \subseteq \overline{N}$ D. $M \supseteq \overline{N}$
- 给定集合 A、B, 定义 $A * B = \{x | x = m - n, m \in A, n \in B\}$, 若 $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则集合 $A * B$ 中的所有元素之和为 ()
 A. 15 B. 14 C. 27 D. -14
- 设集合 $M = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -3\}$, $N = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } |x| \leq 5\}$, 则 $M \cup N$ 中元素的个数为 ()
 A. 11 B. 10
 C. 16 D. 15
- 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A、B 为 U 的子集, 若 $A \cap B = \{2\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{4\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 5\}$, 则下列结论正确的是 ()
 A. $3 \notin A, 3 \notin B$ B. $3 \notin A, 3 \in B$
 C. $3 \in A, 3 \notin B$ D. $3 \in A, 3 \in B$
- 设 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - px + 15 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 5x + q = 0\}$, 若 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$, 则 A、B 分别为 ()



- A. $\{3,5\}, \{2,3\}$ B. $\{2,3\}, \{3,5\}$
 C. $\{2,5\}, \{3,5\}$ D. $\{3,5\}, \{2,5\}$
- 12 设 $*$ 是集合 A 中元素的一种运算, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 都有 $x * y \in A$, 则称运算 $*$ 对集合 A 是封闭的, 若 $M = \{x | x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 则对集合 M 不封闭的运算是……
 …………… ()
 A. 加法 B. 减法 C. 乘法 D. 除法
- 13 已知全集 $U = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, 若 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{0, 4, 5\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 2, 8\}$, $A \cap B = \{9\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
- 14 若一数集中的任一元素的倒数仍在该集合中, 则称该集合为“可倒数集”, 试写出一个含三个元素的可倒数集: _____ (只需写出一个集合)
- 15 已知 $S = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 0\}$, 用列举法表示集合 $\complement_S A$ 是 _____.
- 16 设全集为 U , 用集合 A, B, C 的交、并、补集符号表示图中的阴影部分.



- (1) _____;
 (2) _____;
 (3) _____;
- 17 已知全集 $U = \{x | x \text{ 取不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, A, B 是 U 的两个子集, 且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{11, 19, 29\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$, 求 A, B .

- 18 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \in \mathbf{N} | x^2 + px + 12 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x^2 - 5x + q = 0\}$, 若 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{4\}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, 试求 $p+q$ 的值和 $A \cup B$.

- 19 已知 $M = \{2, a, b\}$, $N = \{2a, 2, b^2\}$, 且 $M = N$, 求 a, b 的值.

- 20 已知集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

- 21 集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$. 若 $A \cap B = A \cup B$, 求 a 的值.

- 22 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | qx^2 + px + 1 = 0\}$ 同时满足: ① $A \cap B \neq \emptyset$, ② $A \cap \overline{B} = \{-2\}$, 其中 p, q 均为不等于零的实数, 求 p, q 的值.

第二章 函数



本章概要

函数是中学数学的重点内容,函数概念贯穿中学数学的始终,利用函数知识、思想可以处理、解决很多数学问题.因此,近几年来,每年的高考数学试题,都贯穿着函数及其性质这条主线,显现出“函数热”居高不下的趋势.函数问题具有较强的伸缩性,既可以“低档题”——选择、填空形式出现(如映射、函数基本性质及反函数等多属此类),也可以“中档题”“高档题”形式出现并多与其他问题联系在一起.因此,本章内容是我们高中数学问题的基础内容,也是重点内容,是高考考查的主体内容,我们在学习中一定要认真对待,扎扎实实地学习本章内容,为今后的学习打下良好的基础.

函数是数学中最重要的概念之一,它不但是数学研究的对象,同时也是数学中常用的一种思想方法,函数的思想广泛地渗透到学习数学的全过程及其他各学科之中,所以各类考试把函数作为重点考查内容.

本章的知识要求:

深刻理解函数的有关概念,掌握对应法则、图象等有关性质.

掌握函数的单调性的概念、基本的判定方法和步骤,并会运用.

掌握反函数的概念,理解反函数的意义,一些常见符号的意义,求反函数的方法和步骤,掌握反函数和原函数的图象间的关系等.

2.1 函数



温故知新



新知预习

1. 映射:一般地,设 A, B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f ,对于集合 A 中的 _____ 一个元素,在集合 B 中都有 _____ 的元素和它对应,那么这样的对应(包括集合 A, B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f: A \rightarrow B$. 其中与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的 _____, a 叫做 b 的 _____.

2. 函数的三要素

构成函数的三要素: _____, _____, _____.

3. 函数的表示方法

函数的表示方法有三种: _____, _____, _____.

4. 函数的单调性与单调区间

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I :



相关链接

背景链接

1837 年德国数学家狄利克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的对应关系是无关紧要的,所以他的定义是:“如果对于 x 的每一个值, y 总有一个完全确定的值与之对应,则 y 是 x 的函数.”这个定义抓住了概念的本质属性,变量 y 称为 x 的函数,只需有一个法则存在,使得这个函数取值范围中的每一个值,有一个确定的 y 值和它对应就行了,不管这个法则是公式或图象或表格或其他形式.这个定义比前面的定义带有普遍性,为理论研究和实际应用



如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是 减函数.

如果对于属于 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是 减函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数, 那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的) 单调性, 这一区间叫做 $y=f(x)$ 的 单调区间. 在单调区间上增函数的图象是 上升 的, 减函数的图象是 下降 的.

5. 函数的奇偶性的判断

一般地, 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内 任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

一般地, 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内 任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做 奇函数.



2.1.1 函数与映射的概念

1. 映射: 一般地, 设 A, B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 那么这样的对应(包括集合 A, B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射, 记作 $f: A \rightarrow B$. 其中与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象, a 叫做 b 的原象.

注: 理解象、原象、定义域、值域、一一对应和一一映射等概念.

2. 映射观点下的函数概念

如果 A, B 都是非空的数集, 那么 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 的函数, 记作 $y=f(x)$, 其中 $x \in A, y \in B$. 原象的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域, 象的集合 $C(C \subseteq B)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域. 函数符号 $y=f(x)$ 表示“ y 是 x 的函数”, 有时简记作函数 $f(x)$. 这种用映射刻画的函数定义我们称之为函数的近代定义.

● 疑难疏引 (1) 新定义更抽象, 更一般, 如:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases} \quad (\text{狄利克雷函数});$$

(2) 函数的三要素即定义域、值域和对应法则;

(3) 定义域 A = 原象集合, 值域 C 等于象集合, $C \subseteq B$;

(4) C 中的元素都有原象, 但未必唯一, 注意与一一映射的区别;

(5) A, B 是两个非空数集, 注意与映射定义中的 A, B 的区别;

(6) 函数一定是映射, 映射不一定是函数, 只要 A, B 是非空数集, 映射就是函数;

(7) 自变量 x 在 A 中任取一个值 a , 对应的函数值为 $f(a)$;

(8) 同时研究多个函数时, 函数符号还可用 $g(x), h(x), \dots$ 表示.

案例 1 下列各组函数是否表示同一个函数?

(1) $f(x) = 2x+1$ 与 $g(x) = \sqrt{4x^2+4x+1}$;

(2) $f(x) = \frac{x^2-x}{x}$ 与 $g(x) = x-1$;

提供了方便. 因此, 这个定义曾被比较长期地使用着.

知识链接

自从德国数学家康托尔的集合论被大家接受后, 用集合对应关系来定义函数概念就是现在高中课本里用的了. 数学书上使用的“函数”一词是转译词.



1 判断下列各组中的两个函数是否是同一函数? 为什么?

(1) $y_1 = \frac{(x+3)(x-5)}{x+3}$ 与 $y_2 = x-5$;

(2) $y_1 = \sqrt{x+1} \sqrt{x-1}$ 与 $y_2 = \sqrt{(x+1)(x-1)}$;

(3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(4) $f(x) = x$ 与 $F(x) = \sqrt[3]{x^3}$;

(5) $f_1(x) = (\sqrt{2x-5})^2$ 与 $f_2(x) = 2x-5$.

【思路解析】由函数的定义可知, 函数三要素中, 只要定义域和对应法则相同就是同一函数, 否则只要定义域和对应法则中有一个不同就不是同一函数.

【答案】(1) 不是同一函数, 定义域不同;

(2) 不是同一函数, 定义域不同;

(3) 不是同一函数, 值域不同;

(4) 是同一函数;

(5) 不是同一函数, 定义域、值域都不同.

2 判断下列两个对应是否是集合 A 到集合 B 的映射.

(1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 对应法则 $f: x \rightarrow 2x+1$;

(2) 设 $A = \mathbb{N}^*$, $B = \{0, 1\}$, 对应法则 $f: x \rightarrow x$ 除以 2 得到的余数;



$$(3) f(x) = |x-1| \text{ 与 } g(t) = \begin{cases} t-1, & t \geq 1, \\ 1-t, & t < 1; \end{cases}$$

$$(4) f(n) = 2n-1 (n \in \mathbf{Z}) \text{ 与 } g(n) = 2n+1 (n \in \mathbf{Z}).$$

【探究】对于根式、分式、绝对值式,要先化简再判断,在化简时要注意等价变形,否则等号不成立.

(1) $g(x) = |2x+1|$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 对应关系不同,因此是不同的函数.

(2) $f(x) = x-1 (x \neq 0)$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同,因此是不同的函数.

$$(3) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1, \end{cases} f(x) \text{ 与 } g(t) \text{ 的定义域相同,对应关系相同,因此是相同的函数.}$$

的函数.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应关系不同,因此是不同的函数.

【溯源】对于(2),在分式化简中,常常由于约分导致变形不等价,从而出错.对于(3),尽管表示自变量和对应法则的字母分别不相同,但它们的实质相同,因此是相同的函数.对于(4),尽管定义域相同,值域都是奇数组成的集合,但是对应法则不同,因此是不同的函数.

案例 2 已知 $A = \{1, 2, 3, k\}$, $B = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$, $a \in A, k \in \mathbf{N}, x \in A, y \in B, f: x \rightarrow y = 3x + 1$ 是从定义域 A 到值域 B 的一个函数,求 a, k, A, B .

【探究】函数就是从定义域到值域的对应,因此值域中的每一元素,在定义域中一定能找到元素与之对应.

由对应法则: $1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 7, 3 \rightarrow 10, k \rightarrow 3k + 1$.

$\therefore a^4 \neq 10, \therefore a^2 + 3a = 10 \Rightarrow a = 2 (a = -5 \text{ 舍去}).$ 又 $3k + 1 = 16, \therefore k = 5$.

故 $A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{4, 7, 10, 16\}$.

2.1.2 函数的定义域

函数定义域是函数 $y = f(x)$ 自变量 x 的取值范围.

疑难疏引 (1) 定义域不同,而对应法则相同的函数,应看作两个不同函数.如: $y = x^2 (x \in \mathbf{R})$ 与 $y = x^2 (x > 0)$; $y = 1$ 与 $y = x^0$.

(2) 若未加以特别说明,函数的定义域就是指使这个式子有意义的所有实数 x 的集合;在实际中,还必须考虑 x 所代表的具体量的允许值范围.

案例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1};$$

$$(2) y = \sqrt{x^2-3} + \sqrt{5-x^2}.$$

【探究】给定函数时,要指明函数的定义域,对于用解析式表示的函数,如果没有给出定义域,那么就认为函数的定义域是指使函数表达式有意义的自变量取值的集合.

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 1. \end{cases} \text{ 故所求定义域为 } [-2, 1) \cup (1, 2].$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} x^2-3 \geq 0, \\ 5-x^2 \geq 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \text{ 或 } x \leq -\sqrt{3}, \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}. \end{cases} \text{ 故所求定义域为 } [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}].$$

【溯源】从本例可以看出,求函数 $y = f(x)$ 的定义域时通常有以下几种情况:

① 如果 $f(x)$ 是整式,那么函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$;

② 如果 $f(x)$ 是分式,那么函数的定义域是使分母不等于零的实数 x 的集合;

③ 如果 $f(x)$ 为二次根式,那么函数的定义域是使根号内的式子大于或等于 0 的实数 x 的集合;

④ 如果 $f(x)$ 是由几部分数学式子构成的,那么函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数 x 的集合.

案例 2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 求函数 $f(2x-1)$ 的定义域.

$$(3) \text{ 设 } X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4}\}, f: x \rightarrow x \text{ 取倒数};$$

$$(4) A = \{(x, y) \mid |x| < 2, x + y < 3, x, y \in \mathbf{N}\}, B = \{0, 1, 2\}, f: (x, y) \rightarrow x + y;$$

$$(5) A = \{x \mid x > 2, x \in \mathbf{N}\}, B = \mathbf{N}, f: x \rightarrow \text{小于 } x \text{ 的最大质数};$$

$$(6) A = \mathbf{N}, B = \{0, 1, 2\}, f: x \rightarrow x \text{ 被 } 3 \text{ 除所得余数}.$$

【思路解析】根据映射的概念判断对应是否是映射,如果按照某种对应法则 f ,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应(包括集合 A, B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射.

【答案】(1)(2)(3)(5)(6) 都是 A 到 B 的映射,(4) 不是 A 到 B 的映射.

$$3 (1) \text{ 求函数 } f(x) = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}} \text{ 的定}$$

义域;

$$(2) \text{ 求函数 } y = \sqrt{|x-2|+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3x+7}} \text{ 的定义域}.$$

【分析】求函数定义域的一般方法是将题意转化为不等式或不等式组.

【解】(1) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ |x|-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x < 0. \end{cases}$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}} \text{ 的定义}$$

域为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$.

(2) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} |x-2|+3 \geq 0 \\ 3x+7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbf{R}, \\ x \neq -\frac{7}{3}, \end{cases}$$

$$\text{即 } x < -\frac{7}{3} \text{ 或 } x > -\frac{7}{3}. \text{ 故原函}$$

数的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{7}{3}\}$.

$$4 \text{ 若函数 } y = \sqrt{ax^2 - ax + \frac{1}{a}} \text{ 的定义域}$$

是一切实数,求实数 a 的取值范围.

【分析】求函数的定义域,关键是明确自变量是什么,在判断自变量是什么的时候还要考虑到对应法则 f ,自变量的取值范围只与对应法则 f 有关,而与用什么字母表示自变量无关.本题如果逆向思考一下就可以变成另外一道题,即已知定义域,求解析式中的某个系数(如对数底数)的值或范围.





【探究】函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ 是指 $a \leq x \leq b$, 即在同一对应法则 f 的作用下, 接受法则的对象无论是什么代数式时, 必受 $a \leq x \leq b$ 制约. 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$,

所以对于函数 $f(2x-1)$, 有 $-1 \leq 2x-1 \leq 3$, 解得 $0 \leq x \leq 2$. 故函数的定义域是 $[0, 2]$.

【溯源】(1) 此题比较抽象, 理解关键在于: 由于函数的定义域是自变量 x 的范围, 而 $f(x)$ 的自变量是 x , 对于函数 $f[g(x)]$ 而言, 自变量也是 x , 但同时有 $f(x)$ 中的“ x ”的范围与 $f[g(x)]$ 中的“ $g(x)$ ”的范围是相同的.

(2) 已知定义域为 $[a, b]$, 求 $f[g(x)]$ 定义域, 只需解不等式 $a \leq g(x) \leq b$, 即得 $f[g(x)]$ 的定义域.

2.1.3 函数的值域

基本函数的值域

1. 正比例函数 $y=kx$ 与一次函数.

$y=kx+b(k \neq 0)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$,

当 $a > 0$ 时, 值域为 $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$;

当 $a < 0$ 时, 值域为 $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$.

案例 1 求下列函数的值域:

(1) $y=x^2+4x-2, x \in \mathbf{R}$;

(2) $y=x^2+4x-2, x \in [-5, 0]$;

(3) $y=x^2+4x-2, x \in [-6, -3]$;

(4) $y=x^2+4x-2, x \in [0, 2]$.

【探究】这些函数都是二次函数且解析式都相同, 但是各自函数的定义域都是不同的, 应该通过“配方”借助于函数的图象而求其值域.

(1) 配方, 得 $y=(x+2)^2-6$, 由于 $x \in \mathbf{R}$, 故当 $x=-2$ 时, $y_{\min}=-6$, 无最大值. 所以值域是 $[-6, +\infty)$.

(2) 配方, 得 $y=(x+2)^2-6$, 因为 $x \in [-5, 0]$, 所以当 $x=-2$ 时, $y_{\min}=-6$; 当 $x=0$ 时, $y_{\max}=3$. 故函数的值域是 $[-6, 3]$.

(3) 配方, 得 $y=(x+2)^2-6$, 因为 $x \in [-6, -3]$, 所以当 $x=-3$ 时, $y_{\min}=-5$; 当 $x=-6$ 时, $y_{\max}=10$. 故函数的值域是 $[-5, 10]$.

(4) 配方, 得 $y=(x+2)^2-6$, 因为 $x \in [0, 2]$, 所以当 $x=0$ 时, $y_{\min}=-2$; 当 $x=2$ 时, $y_{\max}=10$. 故函数的值域是 $[-2, 10]$.

【溯源】配方法是求“二次函数类”值域的基本方法, 形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 的函数的值域问题, 均可使用配方法. 上述四个题目相同但所给的区间不同, 最后得到的值域也不同, 主要是由于二次函数在不同区间上的单调性不同而产生的, 因此在求二次函数值域时一定要考虑函数是针对哪一个区间上的值域和此时图象是什么样子.

案例 2 求函数 $y=\frac{5x+4}{x-1}$ 的值域.

【探究】此函数的分子与分母都是关于 x 的一次函数, 因此可以将其分解成一个常数与一个分式的和或差的形式, 并且分式的变量 x 只在分母中, 又因为反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 及其相应的形式 $y=\frac{1}{ax+b}$ 的值域为 $\{y|y \neq 0\}$, 所以这种函数的值域

【解】 $ax^2-ax+\frac{1}{a} \geq 0$ 恒成立, 等价于

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = a^2 - 4a \cdot \frac{1}{a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq 2.$$

5 已知函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 求函数 $f(x)$ 的定义域.

【分析】由于函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 所以 $-1 \leq x \leq 3$, 得到 $2 \leq x+3 \leq 6$, 故可以得到函数 $f(x)$ 的定义域.

【解】因为函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 所以由 $-1 \leq x \leq 3$, 得到 $2 \leq x+3 \leq 6$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2, 6]$.

6 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(3x-1)$ 的定义域为_____.

【思路解析】要明确 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 是说 $f(x+1)$ 中的 $x \in [0, 1]$, 而 $f(3x-1)$ 的定义域是指 $f(3x-1)$ 中的 x 的取值范围, 这两个 x 不相同, $\therefore$ 它们分别是两个函数的自变量, 这两个函数的联系是在对应法则上有联系, 即 $x+1$ 和 $3x-2$ 的取值范围相同. 根据这一联系求解.

$\therefore$ 函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, $\therefore 0 \leq x \leq 1$, $\therefore 1 \leq x+1 \leq 2$.

又 $\therefore f(x+1)$ 和 $f(3x-1)$ 在对应法则上有联系, $\therefore 1 \leq 3x-1 \leq 2$.

$\therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 1$, 即 $f(3x-1)$ 的定义域为 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$.

【答案】 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

7 二次函数 $y=-x^2+6x+k$ 的值域为 $(-\infty, 0]$, 求 k 的值.

【分析】 $\therefore$ 二次函数 $y=-x^2+6x+k$ 的值域为 $(-\infty, 0]$,

$\therefore$ 其最大值为 0, 即顶点纵坐标为 0, 从图形上看就是二次函数的图象与 x 轴相切.

【解法一】 $y=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$, $\therefore$ 值域为 $(-\infty, 0]$,

$\therefore k+9=0, k=-9$.

【解法二】 $\therefore$ 二次函数开口向下, 值域为 $(-\infty, 0]$, $\therefore$ 其图象与 x 轴相切, 判别式 $\Delta=0$, 即 $\Delta=6^2-4 \cdot (-1) \cdot k=36+4k=0$, $\therefore k=-9$.

8 已知函数 $y=\begin{cases} -2x+3, & x \geq 0, \\ -x+3, & -1 \leq x < 0, \\ x+5, & x < -1, \end{cases}$ 则

