

PREFACE

前言

《高中同步测控全优设计》饱含着我们的人文关怀,承载着我们的爱心与智慧——致力于打通高考通道,帮助你在学习的过程中找到成功的喜悦!

你手中的这本《高中同步测控全优设计》以理念统帅板块,以板块整合栏目,以栏目组织内容。从板块到栏目,从形式到内容,都紧紧扣准新课程的脉搏,做到了继承与创新合一。本书设置了三大板块【温故知新】【互动课堂】与【主动成长】。

【温故知新】在链接并温习已学知识的基础上,加强对新知识的预习与掌握,使前后内容有机交融、一脉相承。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“新知预习”和“知识回顾”。“新知预习”去粗取精,呈现出新知识的精华部分,并引导你自主掌握知识重点;“知识回顾”承前启后,为前后知识的学习搭起一座桥梁,并使知识在课内课外都得到再现与应用。

【互动课堂】倡导生师互动、生本互动,旨在让你实现从被动到主动的根本转变。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“疏导引导”和“活学巧用”。“疏导引导”既有对主干知识和学习方法的疏导与引导,又有针对主干知识的精选例题、精彩解析及精致升华;“活学巧用”凸现的是实践运用的风范与力量、探究创新的思路与乐趣、提高升华的深度与高度。

【主动成长】留给你一片自主锤炼、主动发展的天空,让你在第一时间成为学习的主人、创新的主人。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“夯基达标”“走近高考”。“夯基达标”展示的是知识点覆盖面广泛的基础题,为你搭建一个夯实基础、稳扎稳打、步步为营的平台;“走近高考”展示的是近两年来的高考真题和模拟题,让你提前触摸高考、感受高考,做到有备无患。

本书图标形象生动、体例明确清晰、版式活泼大方、内容科学严谨,图文并茂的全优设计既做到了“活”而不乱,又做到了“实”而不死,是一本容易让你产生阅读冲动、爱不释手的教辅读物。

《高中同步测控全优设计》编写组



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS

目录

第一章 集合与函数概念 1

本章概要 1

1.1 集合 1

温故知新 1

互动课堂 2

主动成长 7

1.2 函数及其表示 9

温故知新 9

互动课堂 9

主动成长 17

1.3 函数的基本性质 19

温故知新 19

互动课堂 19

主动成长 25

自主建构 25

本章测评 26

第二章 基本初等函数(I) 28

本章概要 28

2.1 指数函数 28

温故知新 28

互动课堂 29

主动成长 34

2.2 对数函数 36

温故知新 36

互动课堂 37

主动成长 42

2.3 幂函数 43

温故知新 43

互动课堂 44

主动成长 46

自主建构 47

本章测评 47

第三章 函数的应用 49

本章概要 49

3.1 函数与方程 49

温故知新 49

互动课堂 50

主动成长 54

3.2 函数模型及其应用 55

温故知新 55

互动课堂 55

主动成长 59

自主建构 61

本章测评 61

综合测试(一) 62

综合测试(二) 64

解析与答案 67



第一章 集合与函数概念



本章概要

集合是高中函数概念产生的理论基础,函数是高中数学的核心概念.

本章将集合作为一种语言来学习,所以要理解集合、子集、交集、并集、补集的概念;理解空集、全集的意义;理解属于、包含、相等关系的意义;能用有关术语和符号表示元素与集合、集合与集合之间的关系.其重点是有关集合的基本概念,难点是有关集合的各个概念的涵义以及这些概念相互之间的区别与联系.充分感受用集合表示数学内容时的简洁性、准确性,学会用集合语言描述数学对象,发展运用数学语言进行交流的能力.

函数作为描述客观世界变化规律的重要数学模型,其用集合表述概念比初中的概念表述更加严密,而函数三要素以及图象和性质的理解和掌握是我们学习过程中的重点和难点,尤其是单调性、奇偶性等性质的掌握和应用要格外重视,在学习过程中强调结合实际问题,感受运用函数概念建立模型的过程与方法,从而发展我们对变量数学的认识,本章内容是我们高中数学问题的基础内容,也是重点内容,是高考考查的主体内容,我们在学习中一定要认真对待,扎扎实实地学习本章内容,为今后的学习打下良好的基础.

函数作为重要的解题工具还广泛应用于物理和其他学科中.

1.1 集合



温故知新



新知预习

一、集合的定义与表示

(一)集合的概念与分类

1. 集合中元素的特征: _____、_____、_____.

2. 集合的分类:(1) _____:含有有限个元素的集合;(2) _____:含有无限个元素的集合;(3) _____:不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.

(二)集合的表示法

1. 常用数集的字母表示:自然数集——_____;整数集——_____;有理数集——_____;实数集——_____.

2. _____法:把集合中的全部元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

3. _____法:把集合中的元素的公共属性描述出来写在大括号内表示集合的方法.



相关链接

背景链接

我们原本生活在一个无穷的世界里,但我们的认识往往要从有限开始.无穷的世界里有着我们在有限的思维方式下认为不可思议的问题.例如:“从地球到月球上的线段和一厘米长线段上的点一样多.”你会相信吗?发现它并揭示其中奥秘的是20世纪初伟大的数学家、集合论的创始人——奥格尔·康托尔.他的理论把人们从有限带进了无穷,把近代数学推向了现代数学.在1874~1909的30多年间,他系统地建立了关于无穷集合的理论,创立了超穷序数、基数新概念,并把最



(三)元素与集合的关系符号

1. 如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 _____;
2. 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 _____.

二、集合间的基本关系

1. 子集:对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B ,或者说集合 B 包含集合 A ,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$;当集合 A 不包含于集合 B ,或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$;

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$,即若 $A \subseteq B$,又 $B \subseteq A$,则 $A=B$.

2. 子集和真子集

(1)若 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),则 A 是 B 的 _____. 空集是任何集合的 _____,即 $\emptyset \subseteq A$. 任何一个集合是它本身的 _____,即 $A \subseteq A$.

(2)对于两个集合 A 与 B ,若 $A \subseteq B$,并且 $A \neq B$,则 A 是 B 的 _____,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$). 空集是任何非空集合的 _____.

(3)若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.

3. 全集:如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个 _____,由 U 来表示. 全集具有相对性.

4. 补集:所谓 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 但 } x \notin A, A \subseteq U\}$ 就是说从全集 U 中取出集合 A 的 _____ 元素之后,所有剩余的元素组成的集合就是 $\complement_U A$.

三、集合的运算

1. 交集:由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,叫做 A 与 B 的 _____,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

2. 并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的 _____,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

新的超穷基数 W 赋予可数集,给连续统更高的超穷数,还建立了一整套有关的基本定理. 1901 年勒贝格以测度论充实了集合论,康托尔的集合论才被公认了. 在集合论产生与发展的整个过程中,许多数学家与哲学家从事了集合论的研究工作,并取得了令人振奋的成就,策墨罗和弗朗克尔通过对康托尔朴素集合论的研究,提出了 ZF 公理系统,把集合论建立在一系列公理系统上,使朴素集合论完善为公理化集合论. 它克服了康托朴素集合论引起的一些矛盾,推动了集合论的发展.

知识链接

初中接触的数集:自然数集、整数集、有理数集、实数集等;

自然数集的概念:自然数的全体组成自然数集;

自然数集表示方法:在椭圆圈内填上一些自然数,点上三点,在圈下写上“自然数集”,用此形式表示自然数集.



1.1.1 集合的含义与表示

1. 集合的含义

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合.

疑难疏引 (1)集合是数学中最原始的概念之一,无法给出它的定义只能作描述性说明.

(2)集合中元素的特征. 确定性是指集合中的元素是确定的,即任何一个对象都能明确它是或不是某个集合的元素,两者必居其一,它是判断一组对象是否形成集合的标准;互异性是指给定的一个集合的元素中,任何两个元素都是不同的,因而在同一个集合中,不能重复出现同一元素,这一点常被我们所忽略;无序性是指在一个集合中,元素之间都是平等的,它



活学巧用

- 1 下列所给对象不能构成集合的是 _____ ()

- A. 一个平面内的所有点
- B. 所有小于零的正数
- C. 某校高一(4)班的高个子学生
- D. 某一天到商场买过货物的顾客

思路解析 因为 A、B、D 中所给对象都是确定的,从而可以构成集合;而 C 中所给对象不确定,原因是找不到衡量学生身高较高的标准,故不能构成集合,若将 C 中“身高较高的男同学”改为“身高 175 cm 以上的男同学”,则能构成集合.

答案 C

- 2 已知 $-3 \in \{a-3, 2a-3, a^2-4\}$, 求 a .

思路解析 已知集合中的三个元素都含有未知数,且都具



们都充当集合中的一员,无先后次序之分.

案例 1 下列对象:①方程 $x^2 - 9 = 0$ 的实数根;②我国近代著名的数学家;③联合国常任理事国;④空气中密度大的气体,能否构成集合?

【探究】研究对象能否构成集合的问题一般主要考查集合元素的确定性.①③中的研究对象显然符合确定性;②中“著名”没有明确的界限;④中“密度大”的程度没有明确的界限.因而①③能构成集合,②④不能.

【溯源】判断命题是否构成集合最重要的标志就是看其所叙述对象是否具有确定性,即对所叙述对象进行描述的特征词语是否具有共性标准.

案例 2 当 x 为何值时, $\{0, x, x^2 - x\}$ 不能表示一个数集?

【探究】问题的知识依托是集合中元素的互异性,即同一集合中的元素必须是互不相同的. $\{0, x, x^2 - x\}$ 能否表示一个数集,关键在于它是否具备集合元素的三个特征,在这里,只要看它是否满足互异性,即要使 $\{0, x, x^2 - x\}$ 不表示一个数集,只需 $x=0$ 或 $x^2 - x=0$ 或 $x^2 - x=x$, 即 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=2$.

【溯源】判断一组对象能否构成一个集合,关键是看这组对象是否同时具备集合元素的三个特征.考查该知识点的问题分正向和逆向思维两个角度,其解决问题的基础还是正确理解三个特征要求.

2. 元素和集合的关系

● 疑难疏引 (1)元素和集合的关系是 $\in$ 和 $\notin$,二者有且只有一种成立.集合具有两方面的意义,即:凡是符合条件的对象都是它的元素;只要是它的元素就必须符合条件.辩证理解集合和元素这两个概念;(2)集合和元素是两个不同的概念,符号 $\in$ 和 $\notin$ 是表示元素和集合之间关系的,不能用来表示集合之间的关系.例如 $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$ 的写法就是错误的,而 $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 的写法就是正确的.

案例 3 设集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$,若 $a \in A, b \in B$,试判断 $a+b$ 与 A, B 的关系.

【探究】首先看到 $a+b$ 是元素, A, B 是集合. $\therefore a+b$ 与 A, B 的关系应该是 $\in, \notin$ 的关系. $\because a \in A, \therefore a = 2k_1 (k_1 \in \mathbb{Z})$.
又 $\because b \in B, \therefore b = 2k_2 + 1 (k_2 \in \mathbb{Z})$. $\therefore a+b = 2(k_1 + k_2) + 1$.
 $\because k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}, \therefore a+b \in B$, 从而 $a+b \notin A$.

【溯源】理解一个集合的意义重点在于抓住代表元素及公共属性,而判断元素与集合的关系,依据就是元素的公共属性,解题时需做必要的恒等变形.

3. 常用的数集及其记法

- (1)全体非负整数组成的集合称为非负整数集,记作 $\mathbb{N}$.
- (2)所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$.
- (3)全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbb{Z}$.
- (4)全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbb{Q}$.
- (5)全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbb{R}$.

准确记忆常用数集的符号表示,特别注意 $\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}_+$ 等拓展符号表示的集合特征以及数 0 的归属问题.

4. 集合的表示方法

列举法:把集合中的全部元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法;

有不不确定性,故不能确定 -3 就是其中的哪一个,应根据分类讨论的思想进行逐一计算.

【答案】若 $-3 = a - 3$, 即 $a = 0$.

当 $a = 0$ 时, $2a - 3 = -3$, 即不符合元素的互异性,
 $\therefore a = 0$ (舍);若 $-3 = 2a - 3 \Rightarrow a = 0$, 同理舍掉;若 $a^2 - 4 = -3$, 即 $a = \pm 1$. 当 $a = 1$ 时, 集合为 $\{-2, -1, -3\}$; 当 $a = -1$ 时, 集合为 $\{-4, -5, -3\}$, $\therefore a = \pm 1$.

3 含有三个实数的集合可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 又可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2003} - b^{2004} =$ _____.

【思路解析】考查集合元素的确定性、互异性、无序性.

由 $\frac{b}{a}$ 得 $a \neq 0$, 又集合中元素有 0, 所以 $b = 0$, 得 $a + b = a$.

所以只能 $a^2 = 1$ 得 $a = \pm 1$.

又由元素互异性 $a \neq 1$, 所以 $a = -1$.

$a^{2003} - b^{2004} = (-1)^{2003} + 0^{2004} = -1$.

【答案】 -1

4 已知集合 $A = \{x | x = m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Z}\}$, 判断下列元素 x 与集合 A 的关系: (1) $x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; (2) $x = x_1 + x_2$ (其中 $x_1 \in A, x_2 \in A$).

【思路解析】本题考查元素与集合的关系. 判断某对象是否为某集合的元素, 关键在于判断它们是否具备该集合元素公有的属性即将 x 值试着写成 $m + n\sqrt{2}$ 的形式, 若 m, n 是整数, 便可完成判定, 若无法表示成上式或 m, n 不为整数, 则 x 不为集合中元素.

【答案】 (1) $x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 即 $m = \sqrt{3}, n = 1$, 其中 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}, \therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \notin A$.

(2) $\because x_1, x_2 \in A$, 设 $x_1 = m_1 + n_1\sqrt{2}, x_2 = m_2 + n_2\sqrt{2}$ ($m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), 则 $x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}$, 由 $m_1 + m_2 \in \mathbb{Z}, n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$,
 $\therefore x_1 + x_2 \in A$.

5 给出下面几个关系式: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, 0.3 \in \mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{N}, 0 \in \{0\}, 0 \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \in \mathbb{N}^*, -\pi \notin \mathbb{Z}, -5 \notin \mathbb{Z}$, 其中正确的关系式的个数是 _____ ()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【思路解析】注意常用数集的字母表示.

【答案】 A

6 下面有四个命题: ①集合 $\mathbb{N}$ 中的最小元素为 1; ②方程 $(x-1)^3(x+2)(x-5) = 0$ 的解集含有 3 个元素; ③ $0 \in \emptyset$; ④满足 $1+x > x$ 的实数的全体形成集合. 其中正确命题的个数是 _____ ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

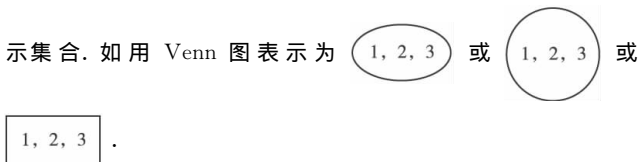
【思路解析】集合 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, 最小的自然数是 0, 故①不对; 据集合中元素的互异性知方程 $(x-1)^3(x+2)(x-5) = 0$ 有 3 个不同的解: 1, -2, 5, 所以②对; 空集不含有任何元素, $1+x > x$ 表示 x 可以为任意实数, 因此③错, ④对, 故选 C.

【答案】 C



描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,在大括号内表示集合的方法;

图示法:Venn图法,采用平面上一条封闭曲线的内部表示集合.如用Venn图表示为



疑难疏引 (1)在使用列举法时应注意以下四点:①元素间用逗号“,”;②元素不重复;③不考虑元素顺序;④对于含元素较多的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律呈现出来后,才能用省略号表示,如 $\{1,2,3,\dots,n\}$, $\{1,3,5,7,9,\dots\}$.

(2)在使用描述法时应注意以下几点:①写清元素代号;②说清集合中元素的特性;③文字表述多层次时,应当准确使用“且”“或”;④所有描述的内容都写在集合括号内;⑤语句力求简明、确切,字句逐一说明.

(3)图示法表示集合的图形的形状、大小与集合的性质没有任何关系,它仅仅把集合中的元素都包括在内,从而体现“整体”.Venn图可直观地表示集合,帮助我们理解、分析问题,但不能作为严密的数学工具使用.

(4)列举法与描述法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.要注意:一般无限集时,不宜采用列举法,因为不能将无限集中元素一一列举出来,而没有列举出来的元素往往难以确定.但要注意,有时为了方便,在不引起混淆的情况下,也把具有明显特征的无限集用列举法表示:如 $N=\{0,1,2,3,\dots\}$ 等.

案例4 下列两个集合:(1) $A=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$;(2) $A=\{x|x^2-6x-7=0\}$, $B=\{(x,y)|\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x+2y=11 \end{cases}\}$ 有什么关系?

【探究】要确定一个集合,必须从这个集合中的元素入手,只有确定了这个集合中元素的特征,才可以确定这个集合.对于问题中给出的两个集合中的元素,可以发现:一个是数,一个是实数对(点).即(1)集合 A 是一个点集,是函数 $y=x^2$ 图象上的点的集合;集合 B 是数集,是由所有实数的完全平方构成的集合.两个集合的元素显然是不同的.(2)进一步化简两个集合可以得到: $A=\{-1,7\}$, $B=\{(-1,7)\}$.集合 A 、 B 分别是方程、方程组解的集合,但 A 中有两个元素 $-1,7$,而 B 中只有一个元素 $(-1,7)$.

【溯源】两个集合相同,要求两个集合中的元素都要相同,元素相同就要求元素的种类、属性和数量都要相同.要注意:集合中元素个数较少时采用数形结合的思想进行解析和理解,更容易抓住概念的本质.同时对数集和点集用列举法表示要格外重视区别,还要注意到用描述法表示数集和点集对元素特征的描述也是完全不同的.

1.1.2 集合间的基本关系

子集

(1)对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都

7 用适当的形式表示下列对象构成的集合.(1)比3大5的数;(2)11以内的质数;(3) $x^2-5x+6=0$ 的解;(4)函数 $y=x^2+4$ 图象上的点.

【思路解析】对于一个集合用特征性质即描述法表示还是列举法表示,从理论上讲都可以,但有些可能很不方便,因此要结合具体问题选择合理的表示方法.

【答案】(1)列举法: $\{8\}$;描述法: $\{x|x-3=5\}$.(2)列举法: $\{2,3,5,7\}$;描述法: $\{11\text{ 以内的质数}\}$.(3)列举法: $\{2,3\}$;描述法: $\{x|x^2-5x+6=0\}$.(4)描述法: $\{(x,y)|y=x^2+4\}$.

8 设集合 $A=\{x|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{N}\}$,试用列举法表示集合.

【思路解析】由 $\frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z}$,知 $3-x$ 必为6的因数,遍取6的诸因数,再验证 $x\in\mathbf{N}$ 即可.

【答案】 $\because \frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},\therefore 3-x$ 可取 $\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$.

又 $x\in\mathbf{N},\therefore A=\{1,2,4,5,6,9\}$.

9 下面三个集合:

① $\{x|y=x^2+1\}$;② $\{y|y=x^2+1\}$;③ $\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(1)它们是不是相同的集合?

(2)它们各自的含义是什么?

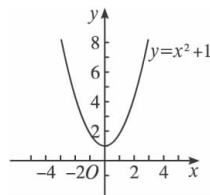
【思路解析】此题考查集合的概念,判断集合是不是相同,要看集合的元素是不是相同.

【答案】(1)不是相同的集合.

(2)集合①是函数 $y=x^2+1$ 的自变量 x 所允许值所组成的集合,因为 x 可以取任意实数,所以 $\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$.

集合②是函数 $y=x^2+1$ 的所有函数值 y 组成的集合,由二次函数图象知, $y\geq 1$,所以 $\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geq 1\}$.

集合③是函数 $y=x^2+1$ 图象上的所有点的坐标组成的集合.如下图所示:



10 已知集合 $P=\{0,1,2,3,4\}$, $Q=\{x|x=ab,a,b\in P,a\neq b\}$,用列举法求集合 Q .

【思路解析】集合 Q 中的元素是集合 P 中任意两个元素积,结合元素互异性要求,不同的积有 $0,2,3,4,6,8,12$.

【答案】 $Q=\{0,2,3,4,6,8,12\}$.

11 下列说法正确的是 ()

①任意集合必有子集 ②空集是任意集合的真子集 ③若集合 A 是集合 B 的子集,集合 B 是集合 C 的子集,则集合 A 是集合 C 的子集 ④若不属于集合 A 的元素也一定不





是集合 B 的元素(若 $a \in A$, 则 $a \in B$), 则称集合 A 为集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作: A 含于 B 或 B 包含 A .

(2) 对于两个集合 A 与 B , 如果集合中的任何一个元素都是集合 B 中的元素, 同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 中的元素, 这时, 我们说集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A=B$. (也可以说当集合 A 与 B 的元素完全相同时, 则 $A=B$)

(3) 对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 我们说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

(4) 对于集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; 任何一个集合是它本身的子集; $\emptyset$ 是任何集合的子集, 任何非空集合的真子集.

(5) 子集的有关性质

① $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

② $A \subsetneq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subsetneq C; A \subseteq B, B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$.

● 疑难疏引 (1) 一个集合的子集的个数仅与这个集合的元素的个数有关. 含 n 个元素的集合的子集数为 2^n 个, 非空子集数为 $2^n - 1$ 个, 真子集数为 $2^n - 1$ 个, 非空真子集数为 $2^n - 2$ 个.

(2) 两集合相等的意义是两集合中的元素都相同, 在求集合中元素字母的值时, 可能产生与互异性相矛盾的增解, 这需要解题后进行检验, 去伪存真. 同时还要注意分类讨论思想的应用, 做到不重不漏.

1.1.3 集合的基本运算

1. 交集、并集、补集的概念

(1) 一般地, 由既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作 A 交 B .

(2) 由属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作 A 并 B .

(3) 一般地, 如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素, 那么就称这个集合为全集, 通常记作 U .

(4) 对于一个集合 A , 则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 记作 $\complement_U A$.

2. 交集、并集、补集的性质

(1) $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$.

(2) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B$.

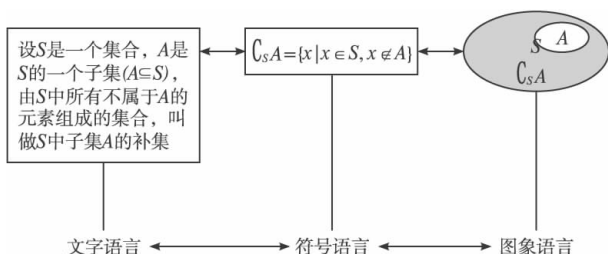
(3) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

(4) $A \cap \complement_U A = \emptyset, A \cup \complement_U A = U$.

(5) 德·摩根律

$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B, \complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$.

● 疑难疏引 1. 用数学的三种语言互译表示全集与补集



属于集合 B , 则 B 是 A 的子集

A. ①②③ B. ①③④ C. ①③ D. ①②③④

【思路解析】 此题考查子集的性质, 并需要注意空集的特殊性.

(1) 任意集合都是自身的子集, 因此①正确. (2) 空集是任意非空集合的真子集, 因此②不正确. (3) 集合子集的性质具有传递性, 因此③正确. (4) 可利用文氏图进行思路解析, ④正确.

【答案】 B

12 已知集合 $A = \{0, 2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$, 非空集合 M 满足 $M \subseteq A$ 且 $M \subseteq B$, 则满足条件的集合 M 的个数为 $\dots$ ()

A. 7 B. 8 C. 15 D. 16

【思路解析】 $M \subseteq A$ 且 $M \subseteq B$, 则 $M \subseteq (A \cap B) = N = \{0, 2, 3\}$, 进而求出集合 N 的非空子集为 $2^3 - 1 = 7$ (个).

【答案】 A

13 设集合 $A = \{x, x^2, xy\}, B = \{1, x, y\}$, 且 $A=B$, 求实数 x, y 的值.

【思路解析】 注意到 A, B 中都有 x , $\therefore A=B$, $\therefore A, B$ 中剩余两元素应分别对应相等, 但需分类讨论, 注意集合中元素的互异性的检验.

【答案】 $\because A=B, \therefore \begin{cases} x^2=1, \\ xy=y \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2=y, \\ xy=1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 或当 $x=1, y \in \mathbb{R}$

时, $A=B=\{1, 1, y\}$, 不满足集合中元素的互异性, $\therefore$ 舍去. 当 $x=-1, y=0$ 时, $A=B=\{-1, 1, 0\}$, 适合. 当 $x=y=1$ 时, $A=B=\{1, 1, 1\}$, 不满足集合中元素的互异性, $\therefore$ 舍去. 综上, 知 $x=-1, y=0$.

14 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个不相等实根为 α, β . 集合 $A = \{\alpha, \beta\}, B = \{2, 4, 5, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap C = A, A \cap B = \emptyset$, 求 p, q 的值.

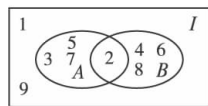
【思路解析】 由 $A \cap C = A$ 知 $A \subseteq C$. 又 $A = \{\alpha, \beta\}$, 则 $\alpha \in C, \beta \in C$. 而 $A \cap B = \emptyset$, 故 $\alpha \notin B, \beta \notin B$. 显然既属于 C 又不属于 B 的元素只有 1 和 3. 不妨设 $\alpha=1, \beta=3$. 对于方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根 α, β 应用韦达定理可得 $p=-4, q=3$.

【答案】 $p=-4, q=3$.

15 已知全集 $I = \{\text{小于 } 10 \text{ 的正整数}\}$, 其子集 A, B 满足 $\complement_I A \cap \complement_I B = \{1, 9\}, A \cap B = \{2\}, \complement_I A \cap B = \{4, 6, 8\}$, 求集合 A, B .

【思路解析】 本题主要考查的是全集、补集以及交集之间的运算, 方法可采用韦恩图法.

【答案】



所以 $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$.

16 已知全集 $U = \{\text{不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, A, B 是 U 的两个子集, 且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}, A \cup (\complement_U B) = \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 23\}, (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}, B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路解析】 $U = \{\text{不大于 } 30 \text{ 的质数}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13,$



2. 集合运算注意事项

(1) 处理集合运算问题时,要注意化简集合的表达式. 如果集合中含有字母,要注意对字母分类讨论.

(2) 在解决有关集合运算题目时,一要把握概念中的关键词,如“所有”“且”“或”;二要把握它们各自的实质;三要借助数轴,应用数形结合的思想.

(3) Venn 图在集合中起到数形结合的作用,由图可以把一些不明确的数量关系直观地表现出来,起到化繁为简,化抽象为直观的作用.

(4) 集合作为数学语言,已深刻地融入函数、方程、不等式、平面曲线、平面区域等有关知识之中,处理集合问题时,应充分综合运用有关的数学知识进行求解.

(5) 在学习子、交、并、补集的概念时,应注意对“任何一个”“都”“所有”“且”“或”等词的理解,“交集”是指两个集合中所有公共元素所组成的集合,忽略了“交集”概念中的“所有”两个字就会错误地认为“若 $A=\{1,2,3\}, B=\{2,3,4\}$, 则 $A \cap B=\{2\}$ ”. “并集”概念中的“或”与生活用语中的“或”含义不同,生活用语中的“或”一般是或此或彼,必具其一,不兼有,“并集”概念中的“或”是可兼有的,但不必须兼有. 记忆口诀:

集合平时很常用,数学概念有不同.

理解集合并不难,三个要素是关键.

元素确定和互异,还有无序要牢记.

集合不论空不空,总有子集在其中.

集合用图很方便,子交并补很明显.

案例 1 若集合 $U=\{x|1<x\leq 7\}, A=\{x|2\leq x<5\}, B=\{x|3\leq x<7\}$. 如何求解 (1) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; (2) $\complement_U (A \cup B)$; (3) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$; (4) $\complement_U (A \cap B)$ 呢?

【探究】 首先把题目给出的集合(数集)在数轴上正确表示出来,在正确识别题目给出的集合符号后就可以得出结果. 先在数轴上分别表示出集合 U, A, B , 再求出 $A \cap B=\{x|3\leq x<5\}, A \cup B=\{x|2\leq x<7\}, \complement_U A=\{x|1<x<2 \text{ 或 } 5\leq x\leq 7\}, \complement_U B=\{x|1<x<3 \text{ 或 } x=7\}$, 于是得 (1) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)=\{x|1<x<2 \text{ 或 } x=7\}$; (2) $\complement_U (A \cup B)=\{x|1<x<2 \text{ 或 } x=7\}$; (3) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)=\{x|1<x<3 \text{ 或 } 5\leq x\leq 7\}$; (4) $\complement_U (A \cap B)=\{x|1<x<3 \text{ 或 } 5\leq x\leq 7\}$.

【溯源】 对于有关集合运算的问题,如果题目给出的集合是无限数集,可以结合数轴来帮助解决;如果给出的集合是有限集合,可以借助 Venn 图帮助解决问题,另外,涉及补集的运算时,我们要注意运用德·摩根律简化运算.

案例 2 以集合的子、交、并、补为载体,求解参数问题有哪些注意事项?

比如:已知集合 $A=\{x|-2\leq x\leq 5\}, B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$, 若 $A \cup B=A$, 求实数 m 的取值范围.

【探究】 问题考查集合间的运算关系及分类讨论的数学思想. 由 $A \cup B=A$ 得到 $B \subseteq A$, 然后分 $B=\emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况讨论.

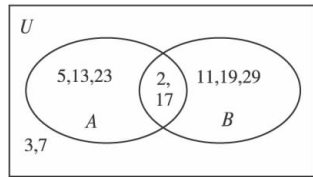
由 $A \cup B=A \Rightarrow B \subseteq A$. 可以得到:

(1) 若 $B=\emptyset$, 即 $m+1>2m-1$,

$\therefore m<2$.

此时 $A \cup B=A \cup \emptyset=A$ 成立.

17, 19, 23}, 而 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$, 画出韦恩图, 标出三个集合 $A \cap (\complement_U B), A \cup (\complement_U B), \complement_U (A \cup B)$, 易得 $A \cap B=\{2, 17\}$.



$\therefore A=\{2, 5, 13, 17, 23\}, B=\{2, 11, 17, 19, 29\}$.

【答案】 $\{2, 5, 13, 17, 23\} \quad \{2, 11, 17, 19, 29\}$

17 已知 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}, B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$, 且 $A \cap B=\{2, 5\}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求 $A \cup B$.

【思路解析】 利用 $A \cap B=\{2, 5\}$ 确定集合元素的取值是本题的关键.

【答案】 由题意知, $a^3-2a^2-a+7=5$, 解之得 $a=-1, 1, 2$.

当 $a=-1, 1$ 时, $A=\{2, 4, 5\}, B=\{-4, 2, 4, 5\}$ 或 $\{-4, 1, 4, 12\}$, 这与已知 $A \cap B=\{2, 5\}$ 矛盾; 当 $a=2$ 时, 符合题意, 故 $a=2$.

此时 $A \cup B=\{2, 4, 5\} \cup \{-4, 2, 5, 25\}=\{-4, 2, 4, 5, 25\}$.

18 已知 $A=\{x|x^2+x-6=0\}, B=\{x|mx+1=0\}$, 且 $B \cup A=A$, 求实数 m 的取值范围.

【思路解析】 问题错在对集合 B 考虑的不全面, $B=\{x|mx+1=0\}$ 代表方程 $mx+1=0$ 的解集, 可以有一解, 也可无解. 而无解的情况是 $B=\emptyset$, 这种情况又恰恰满足 $B \cup A=A$ 的题设条件. 错的原因有两个, 其一是忽略了 $mx+1=0$ 会无解; 其二是忽略了 $A \cup B=A \Leftrightarrow B \subseteq A$ 及 $\emptyset$ 是任何集合的子集.

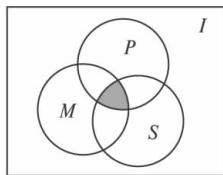
【答案】 $\because A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3, 2\}$, 且 $B=\{x|mx+1=0\}, B \cup A=A$,

$\therefore B=\{-3\}, B=\{2\}$ 或 $B=\emptyset$, 即 $-3m+1=0, 2m+1=0$, 或 $m=0$. 故实数 $m \in \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\}$.

19 2005 年寒假, 小明为完成社会实践作业, 对某校大学生进行调查, 结果如下: 电脑拥有率为 49%, 手机拥有率为 85%, MP3 拥有率为 44%, 拥有上述三种物品中两种的占 38%, 三种物品齐全的占 25%, 那么三种物品中一种也没有的大学生比例为 ()

A. 10% B. 12% C. 15% D. 27%

【思路解析】 韦恩图如下图所示, 设调查了 100 名大学生.



$I=\{\text{被调查的 100 名大学生}\}$,

$M=\{100 \text{ 名学生中拥有电脑的学生}\}$,

$S=\{100 \text{ 名学生中拥有手机的学生}\}$,

$P=\{100 \text{ 名学生中拥有 MP3 的学生}\}$,



$$(2) \text{若 } B \neq \emptyset \text{ 而且 } B \subseteq A, \text{ 则 } \begin{cases} m+1 \leq 2m-1 \\ -2 \leq m+1 \\ 5 \geq 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \geq -3 \\ m \leq 3 \end{cases}$$

$$2 \leq m \leq 3.$$

综上所述, m 的取值范围为 $m \leq 3$.

【溯源】 在求解参数类型问题时要注意以下几点:

① $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

② $B \subseteq A$ 中包含有 $B = \emptyset$ 的情况;

③ 字母问题要注意分类讨论和数形结合. 一般参数求值问题要先弄清集合间关系, 注意代入验证方法的应用, 同时注意二次方程中根与系数关系的应用.

案例 3 某车间有 120 人, 其中乘电上班的 84 人, 乘汽车上班的 32 人, 两车都乘的 18 人, 求:

(1) 只乘电车的人数;

(2) 不乘电车的人数;

(3) 乘车的人数;

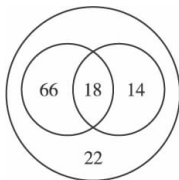
(4) 不乘车的人数;

(5) 只乘一种车的人数.

【探究】 本题考查集合的运算, 解题的关键是把文字语言转化为集合语言, 借助于 Venn 图的直观性把它表示出来, 设只乘电车的人数为 x , 不乘车的人数为 y , 乘车的人数为 z , 不乘电车的人数为 u , 只乘一种车的人数为 v , 如图所示, 可得 $x =$

$84 - 18 = 66$ (人), $y = 120 - 84 = 36$ (人), $z = 84 + 32 - 18 = 98$ (人), $u = 120 - 98 = 22$ (人), $v = (84 - 18) + (32 - 18) = 80$ (人).

【溯源】 实际问题在遇到一人能承担多种任务的“全能”情况时, 正好是集合中交集的完美体现, 此时借助交集性质数形结合, 问题迎刃而解.



要求 $\complement_U(M \cup P \cup S)$ 的元素个数, 根据已知条件, 先求集合 $M \cup P \cup S$ 中元素的个数较容易. 由图形知 $M \cup P \cup S$ 的元素个数为 $49 + 85 + 44 - 38 - 2 \times 25 = 90$.

$\therefore \complement_U(M \cup P \cup S)$ 的元素个数为 10. 故选 A.

【答案】 A

20 已知 $A = \{x | x^2 + px - 12 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + qx + r = 0\}$, 且 $A \neq B$, 若 $A \cup B = \{-3, 4\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 p, q, r 的值.

【思路解析】 本题考查集合的交、并运算, 可结合方程的根与集合的关系, 从两集合有公共元素 -3 入手, 再利用 $A \cup B = \{-3, 4\}$, 求出所有参数.

【答案】 由已知 $-3 \in A$ 且 $-3 \in B$.

把 $x = -3$ 代入方程 $x^2 + px - 12 = 0$, 得 $9 - 3p - 12 = 0$, 解得 $p = -1$. 于是可得集合 $A = \{-3, 4\}$.

又 $A \cup B = \{-3, 4\} = A$, 所以 $B \subseteq A$, 而已知 $A \neq B$,

所以 $B \subsetneq A$. 由 $-3 \in B$ 可知 $B = \{-3\}$, 即方程 $x^2 + qx + r = 0$ 有两个相等的实数根 -3 , 由根与系数的关系得 $\begin{cases} (-3) + (-3) = -q, \\ (-3) \times (-3) = r. \end{cases}$ 解得 $q = 6, r = 9$.

故 $p = -1, q = 6, r = 9$.

21 已知全集 $S = \{x | |x| < 8, x \in \mathbb{N}\}$, A, B 是 S 的子集, 若 ① $(\complement_S A) \cup (\complement_S B) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$; ② $(\complement_S A) \cap B = \{2, 6\}$; ③ $(\complement_S B) \cap A = \{1, 7\}$. 求满足上述条件的集合 A, B .

【思路解析】 由①知 $\complement_S(A \cap B) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,

$\therefore A \cap B = \{3\}$, 即 $3 \in A$, 且 $3 \in B$;

由②知, $2 \in B, 6 \in B$, 但 $2 \notin A, 6 \notin A$;

由③知, $1 \in A, 7 \in A$, 但 $1 \notin B, 7 \notin B$.

$\therefore A = \{1, 3, 7\}, B = \{2, 3, 6\}$.

【说明】 另可借助韦恩图直观推理分析.

【答案】 $A = \{1, 3, 7\}, B = \{2, 3, 6\}$.



主动成长



夯基达标

1 下列说法正确的是 ()

- A. 2004 年雅典奥运会的所有比赛项目组成一个集合
B. 某个班年龄较小的学生组成一个集合
C. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 1, 2\}$ 表示不同的集合
D. $1, 0, 5, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 组成的集合有四个元素

2 下列四个集合中, 是空集的是 ()

- A. $\{x | x + 3 = 3\}$
B. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbb{R}\}$
C. $\{x | x^2 \leq 0\}$
D. $\{x | x^2 - x + 1 = 0\}$

3 下面六种表示法:

- ① $\{x = -1, y = 2\}$, ② $\{(x, y) | x = -1, y = 2\}$, ③ $\{-1, 2\}$,
④ $(-1, 2)$, ⑤ $\{(-1, 2)\}$, ⑥ $\{(x, y) | x = -1 \text{ 或 } y = 2\}$, 能

正确表示方程组 $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 的解集的是 ()

- A. ①②③④⑤⑥ B. ①②④⑤
C. ②⑤ D. ②⑤⑥

4 下列各组集合中, 表示同一集合的是 ()

- A. $M = \{(3, 2)\}, N = \{(2, 3)\}$
B. $M = \{3, 2\}, N = \{2, 3\}$
C. $M = \{(x, y) | x + y = 1\}, N = \{y | x + y = 1\}$
D. $M = \{1, 2\}, N = \{(1, 2)\}$

5 设集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 7\}, S = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k - 1\}$, 若 $M \cap S = \emptyset$, 则 k 的取值范围是 ()



- A. $k \leq 4$ B. $k < 2$ 或 $k > 6$
 C. $k < 0$ 或 $k > 6$ D. $k < 0$
- 6 设 U 为全集, M, G 是非空集合, $M \subseteq U, G \subseteq U, M \not\subseteq G, G \not\subseteq M$, 则 $(M \cap G) \cup M$ 等于 ()
 A. $M \cap G$ B. $\complement_U G \cap M$
 C. $\emptyset$ D. M
- 7 下列说法: ①空集没有子集; ②空集是任何集合的真子集; ③任何集合最少有两个不同子集; ④ $\emptyset \subseteq \{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$; ⑤ $\{3n-1 | n \in \mathbf{Z}\} = \{3n+2 | n \in \mathbf{Z}\}$. 其中说法正确的有 ()
 A. 0 个 B. 1 个
 C. 2 个 D. 3 个



走近高考

- 8 (经典回放) 已知集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x | x \geq a\}$, 并且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是
- 9 2004 湖北高考, 16 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题: ① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$; ② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \subseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$; ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \in B$. 其中真命题的序号是
- 10 已知集合 A, B, C 为非空集合, $M = A \cap C, N = B \cap C, P = M \cup N$, 则 ()
 A. $C \cap P = C$ B. $C \cap P = P$
 C. $C \cap P = C \cup P$ D. $C \cap P = \emptyset$
- 11 2005 天津高考, 文 1 设集合 $A = \{x | 0 \leq x < 3 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 ()
 A. 16 B. 8
 C. 7 D. 4
- 12 2005 广东高考, 1 若集合 $M = \{x | |x| \leq 2\}, N = \{x | x^2 - 3x = 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
 A. $\{3\}$ B. $\{0\}$
 C. $\{0, 2\}$ D. $\{0, 3\}$
- 13 2006 上海春季高考, 16 若集合 $A = \{y | y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y | y = 2 - \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
 A. $(-\infty, 1]$ B. $[-1, 1]$
 C. $\emptyset$ D. $\{1\}$
- 14 同时满足 (1) $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (2) 若 $a \in M$, 则 $6-a \in M$ 的非空集合 M 有 ()
 A. 32 个 B. 15 个
 C. 7 个 D. 6 个
- 15 集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\}, P = \{x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\}$, 则 M, N, P 之间的关系是 ()
 A. $M = N \subseteq P$ B. $M \subseteq N = P$
 C. $M \subseteq N \subseteq P$ D. $N \subseteq P = M$

- 16 U 是全集, A, B 是非空集合且 $A \subseteq B \subseteq U$, 那么下列集合中为空集的是 ()
 A. $A \cap (\complement_U B)$ B. $(\complement_U A) \cap B$
 C. $A \cap B$ D. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
- 17 设 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}, B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

- 18 2008 年第 29 届奥运会将在北京开幕, 现有三个实数的集合, 既可以表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 请求 $a^{2008} + b^{2008}$ 的值, 并研究讨论 $a^n + b^n$ 的值.





1.2 函数及其表示



1. 函数的概念

设 A, B 是非空的数集, 如果按某个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个 x , 在集合 B 中都有_____的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数, 记作 $y = f(x), x \in A$. 其中 x 叫_____, x 的取值范围 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的_____; 与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的_____.

2. 函数的表示方法

主要有三种常用的表示方法, 即解析法、_____和图象法.

3. 函数的三要素

对应法则 f 、_____和值域 $\{f(x) | x \in A\}$.

4. “区间”与“无穷大”的两个概念

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 我们规定:

(1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做_____, 表示为 $[a, b]$.

(2) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为_____.

(3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为_____、_____.

5. 映射的概念

设 A, B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于 A 中的每一个元素, 在 B 中都有唯一的元素与之对应, 那么, 这样的单值对应叫做集合 A 到集合 B 的映射, 记作_____.



知识链接

函数的传统定义: 设在某变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就称 y 是 x 的函数, x 叫做自变量.

1. 已学函数

(1) 一次函数 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$.

(2) 反比例函数 $f(x) = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

(3) 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

2. 函数的传统定义

设在某变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就称 y 是 x 的函数, x 叫做自变量.

应用链接

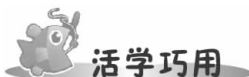
函数作为中学数学知识的重要组成部分无孔不入, 和物理、化学学科有着密切的关系, 同时生活实际中的最大、最小、最省等问题的解决也离不开函数知识.



1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

设 A, B 是非空的数集, 如果按某个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$.



1 下列各组函数中, 表示同一个函数的是 ()

A. $y = x - 1$ 和 $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

B. $y = x^0$ 和 $y = 1$

C. $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = (x + 1)^2$

D. $f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $g(x) = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$



其中 x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域, 显然值域是集合 B 的子集。

● 疑难疏引 函数概念的正确理解:

(1) 关于函数的两个定义域实质上是一致的。初中定义的出发点是运动变化的观点, 而高中定义却是从集合、对应的观点出发。

(2) 两个函数相同的充要条件是它们的定义域与对应关系分别相同, 例如函数 $f(x) = |x|$, 与 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 是同一个函数。

(3) 函数的核心是对应关系。在函数符号 $y = f(x)$ 中, f 是表示函数的对应关系, 等式 $y = f(x)$ 表明, 对于定义域中的任意 x , 在对应关系 f 的作用下, 可得到 y , 因此, f 是使“对应”得以实现的方法和途径。

函数符号 $y = f(x)$ 是“ y 是 x 的函数”这句话的数学表示, 它不表示“ y 等于 f 与 x 的乘积”。 $f(x)$ 可以是解析式, 也可以是图象或数表。

(4) 值域是全体函数值所组成的集合。在多数情况下, 一旦定义域和对应关系确定, 函数的值域也就随之确定。

2. 函数的三要素

构成函数的三要素: 定义域 A , 对应法则 f , 值域 B 。

● 疑难疏引 核心是对应法则 f , 它是联系 x 和 y 的纽带, 是对应得以实现的关键。对应法则可以由多种形式给出, 可以是解析法, 可以是列表法和图象法, 不管是哪种形式, 都必须是确定的, 且使集合 A 中的每一个元素在 B 中都有唯一的元素与之对应。当一个函数的定义域和对应法则确定之后, 值域也就唯一的确定了, 所以值域是定义域这个“原材料”通过对应法则“加工”而成的“产品”。因此, 要确定一个函数, 只要定义域与对应法则确定即可。

定义域 A , 值域 C 以及从 A 到 C 的对应法则 f , 称为函数的三要素。由于值域可由定义域和对应法则唯一确定, 所以两个函数当且仅当定义域与对应法则分别相同时, 才是同一函数。

3. 区间的概念

(1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$ 。

(2) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为 (a, b) 。

(3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 。

● 疑难疏引 无穷大是个符号, 不是一个数。关于用 $-\infty$ 、 $+\infty$ 作为区间的一端或两端的区间称为无穷区间。区间是数学中常用的术语和符号。必须记住闭区间、开区间、半开半闭区间的符号及其含义。

对于 $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, 都称数 a 和数 b 为区间的端点: a 为左端点, b 为右端点, 称 $b - a$ 为区间长度。这样, 某些以实数为元素的集合就有三种表示法: 集合表示法、不等式表示法和区间表示法。

案例 1 下列各题中的两个函数表示同一个函数的是

..... ()

【思路解析】看两个函数是否相同, 主要看函数的定义域和对应法则。A 选项中的两个函数定义域不相同; B 选项中的两个函数的定义域也不同; C 选项中的两个函数的解析式不同; 只有 D 选项中的两个函数对应法则相同, 定义域也相同。

【答案】D

2 下列各组函数是否表示同一个函数?

(1) $f(x) = 2x + 1$ 与 $g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$;

(2) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ 与 $g(x) = x - 1$;

(3) $f(x) = |x - 1|$ 与 $g(t) = \begin{cases} t - 1, & t \geq 1, \\ 1 - t, & t < 1; \end{cases}$

(4) $f(n) = 2n - 1 (n \in \mathbf{Z})$ 与 $g(n) = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 。

【思路解析】对于根式、分式、绝对值式, 要先化简再判断, 在化简时要注意等价变形, 否则等号不成立。

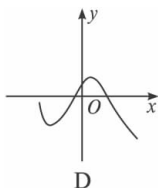
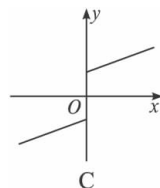
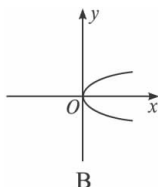
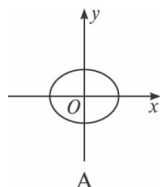
【答案】(1) $g(x) = |2x + 1|$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 对应关系不同, 因此是不同的函数。

(2) $f(x) = x - 1 (x \neq 0)$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 因此是不同的函数。

(3) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1, \\ 1 - x, & x < 1, \end{cases}$ $f(x)$ 与 $g(t)$ 的定义域相同, 对应关系相同, 因此是相同的函数。

(4) $f(n)$ 与 $g(n)$ 的对应关系不同, 因此是不同的函数。

3 在下列选项中, 可表示函数 $y = f(x)$ 的图象的只可能是 ()



【思路解析】判断一幅图象表示的是不是函数的图象, 关键是在图象中能不能找到一个 x 对应两个或两个以上的 y , 如果一个 x 对应两个以上的 y , 那么这个图象表示的就不是函数的图象。

A 的图象表示的不是函数的图象, $\because$ 存在一个自变量 x 的取值 (如: $x = 0$) 有两个 y 与之对应, 不符合函数的定义。因此 A 不正确; B 的图象是关于 x 轴对称也不符合函数的定义。因此 B 也不正确; C 的图象是关于原点对称, 但是当自变量 $x = 0$ 时, 有两个 y 值与之对应, 不符合函数的定义。 $\therefore$ C 选项也不正确; D 表示的图象符合函数的定义, 因此它表示的是函数的图象。因此选 D。

【答案】D

4 求下列函数的定义域:

(1) $y = 2 + \frac{3}{x - 2}$;



- A. $f(x)=x, g(x)=\sqrt[2n]{x^{2n}}$
 B. $f(n)=2n+1(n \in \mathbf{Z}), g(n)=2n-1(n \in \mathbf{Z})$
 C. $f(x)=x-2, g(t)=t-2$
 D. $f(x)=\frac{1-x^2}{1-x}, g(x)=1+x$

【探究】两个函数相同必须有相同的定义域、值域和对应法则. A 中两函数的值域不同; B 中虽然定义域和值域都相同, 但对应法则不同; C 中尽管表示自变量的两个字母不同, 但两个函数的三个要素是一致的, 因此它们是同一函数; D 中两函数的定义域不同. C 符合.

【溯源】给定两个函数, 要判断它们是否是同一函数, 主要看两个方面: 一看定义域是否相同; 二看对应法则是否一致. 只有当两函数的定义域相同且对应法则完全一致时, 两函数才可称为同一函数.

若判断两个函数不是同一个函数, 只要三要素中有一者不同即可判断不是同一个函数.

4. 函数的定义域

函数定义域是函数 $y=f(x)$ 自变量 x 的取值范围.

● 疑难疏引 (1) 定义域不同, 而对应法则相同的函数, 应看作两个不同函数; 如: $y=x^2(x \in \mathbf{R})$ 与 $y=x^2(x>0)$; $y=1$ 与 $y=x^0$.

(2) 若未加以特别说明, 函数的定义域就是指使这个式子有意义的所有实数 x 的集合; 在实际中, 还必须考虑 x 所代表的具体量的允许值范围.

(3) 常见函数定义域类型及求解策略:

如果给出具体解析式求定义域: 一般首先分析解析式中含有哪几种运算, 然后列出各运算对象的范围, 组成不等式组, 解不等式组, 即得所求定义域. 求函数的定义域就是求使函数解析式有意义的自变量的取值的集合:

① 解析式是整式的函数, 其定义域为 $\mathbf{R}$;

② 解析式是分式的函数, 其定义域为使分母不为零的实数的集合;

③ 解析式是偶次根式的函数, 其定义域是使被开方式为非负数的实数的集合.

复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域和 $f(x)$ 定义域互相转化, 要注意定义域就是 x 的取值范围, 并且前者中 $g(x)$ 的取值范围等价于后者中 x 的取值范围.

如果解析式是由实际问题得出的, 则其定义域不仅是要使实际问题有意义, 还必须是使思路分析式有意义的实数的集合.

案例 2 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求实数 m 的取值范围.

【探究】首先向不等式转化, 在求 m 的取值范围时, 由于 m 为二次项系数, $\therefore$ 要对其进行分类讨论; 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $mx^2-6mx+m+8 \geq 0$ 恒成立.

当 $m=0$ 时, $x \in \mathbf{R}$.

当 $m \neq 0$ 时, $\begin{cases} m>0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m>0, \\ (-6m)^2-4m(m+8) \leq 0. \end{cases}$

解之, 得 $0 < m \leq 1$. 故 $0 \leq m \leq 1$.

【溯源】由定义域是 $\mathbf{R}$ 求参数的取值范围问题, 首先转化成含参不等式恒成立, 然后利用数形结合等方法列出相关条

$$(2) y = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x-1};$$

$$(3) y = (x-1)^0 + \sqrt{\frac{2}{x+1}}.$$

【思路解析】给定函数时, 要指明函数的定义域. 对于用解析式表示的函数, 如果没有给出定义域, 那么就认为函数的定义域是指使函数有意义的自变量的取值集合. 因为函数的定义域是同时使思路分析式各部分有意义的 x 值的集合, 所以应取各部分的交集.

【答案】(1) 要使函数有意义, 当且仅当 $x-2 \neq 0$, 即 $x \neq 2$, 所以这个函数的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 2\}$.

(2) 要使函数有意义, 当且仅当 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $1 \leq x \leq 3$, 所以这个函数的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } 1 \leq x \leq 3\}$.

(3) 要使函数有意义, 当且仅当 $\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ \frac{2}{x+1} \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x > -1$

且 $x \neq 1$, 所以这个函数的定义域为 $\{x|x > -1 \text{ 且 } x \neq 1\}$.

5 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(3x-1)$ 的定义域为_____.

【思路解析】 $\because 0 \leq x \leq 1$,

$$\therefore 1 \leq x+1 \leq 2.$$

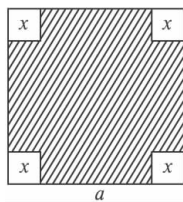
又 $\because f(x+1)$ 和 $f(3x-1)$ 在对应法则上有联系,

$$\therefore 1 \leq 3x-1 \leq 2.$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \text{ 即 } f(3x-1) \text{ 的定义域为 } \frac{2}{3} \leq x \leq 1.$$

【答案】 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

6 如图, 有一块边长为 a 的正方形铁皮, 将其四个角各截去一个边长为 x 的小正方形, 然后折成一个无盖的盒子, 写出体积 V 以 x 为自变量的函数式是_____, 这个函数的定义域为_____.



【思路解析】据长方体的体积公式, 易得 $V=x(a-2x)^2$, 其中 $0 < x < \frac{a}{2}$.

【答案】 $V=x(a-2x)^2 \quad \{x|0 < x < \frac{a}{2}\}$

7 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 3, & x \geq 2, \end{cases}$ 则 $f(-\frac{1}{2}) =$ _____, $f(1) =$ _____, $f(6) =$ _____.

【思路解析】分清自变量对应的解析式.

【答案】1 $-\frac{1}{2}$ 3

8 如果 $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1-x^2}$, 求 $f(x)$ 的解析式.



件,尤其注意在含 x^2 项问题中要对其系数进行讨论.

5. 函数的解析式

● 疑难疏引

(1) 在 $y=f(x)$ 中 f 表示对应法则,不同的函数其含义不一样.

(2) $f(x)$ 不一定是解析式,有时可能是“列表”“图象”.

(3) 符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别又有联系. $f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值,是一个常量;而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数,在一般情况下,它是一个变量. $f(a)$ 是 $f(x)$ 的一个特殊值.

案例 3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ 根据已知条件

分别求出 $f(1), f(-3), f[f(-3)], f\{f[f(-3)]\}$ 的值.

【探究】 此函数是分段函数,应注意在不同的自变量取值范围内有不同的对应关系.

答案: $f(1)=1^2=1; f(-3)=0; f[f(-3)]=f(0)=1; f\{f[f(-3)]\}=f[f(0)]=f(1)=1^2=1.$

【溯源】 深刻理解复合函数的概念,注意选取的自变量和其主要应用的解析式要对应,这类问题是历年高考的热点.

案例 4 已知函数 $f(x+1)=x^2-1, x \in [-1, 3]$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【探究】 函数是一类特殊的对应,已知函数 $f(x+1)=x^2-1$,即知道了 $x+1$ 被法则“处理”的结果是 x^2-1 ,如果知道 x^2-1 是怎样由 $x+1$ 演变得出的,也就知道 $f(x)$ 的表达式了. 本题可用“配凑法”或“换元法”.

解法一:(配凑法) $\because f(x+1)=x^2-1=(x+1)^2-2(x+1),$
 $\therefore f(x)=x^2-2x.$

又当 $x \in [-1, 3]$ 时, $(x+1) \in [0, 4], \therefore f(x)=x^2-2x, x \in [0, 4].$

解法二:(换元法) 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 且由 $x \in [-1, 3]$ 知 $t \in [0, 4], \therefore$ 由 $f(x+1)=x^2-1$, 得 $f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t, t \in [0, 4].$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x, x \in [0, 4].$

【溯源】 已知函数 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式一般有两种方法,一种是用配凑的方法,一种是用换元的方法.

所谓“配凑法”即把已知的 $f[g(x)]$ 配凑成关于 $g(x)$ 的表达式,而后将 $g(x)$ 全用 x 取代,化简得要求的 $f(x)$ 的表达式;

所谓“换元法”即令已知的 $f[g(x)]$ 中的 $g(x)=t$, 由此解出 x , 即用 t 的表达式表示出 x , 后代入 $f[g(x)]$, 化简成最简式.

需要注意的是,无论是用“配凑法”还是用“换元法”,在求出 $f(x)$ 的表达式后,都需要指出其定义域,而 $f(x)$ 的定义域即 x 的取值范围应和已知条件 $f[g(x)]$ 中 $g(x)$ 的范围一致,所以说求 $f(x)$ 的定义域就是求函数 $g(x)$ 的值域.

案例 5 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过点 $A(1, 1), B(2, 0)$ 及点 $C(6, 0)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【探究】 二次函数是我们熟悉的一种函数,其形式有:一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0)$; 交点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0)$, 其中 x_1, x_2 分别是 $f(x)$ 的

【思路解析】 函数解析式 $y=f(x)$ 是自变量 x 确定 y 值的关系式, 本题实质是求经怎样的变形得到 $\frac{x}{1-x^2}$ 这一结果.

【答案】 配凑法: $\because f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}=\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1},$

$\therefore f(x)=\frac{x}{x^2-1}(x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0, x \neq \pm 1).$

换元法: 设 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, 代入 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$, 得

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{t}{t^2-1},$$

$\therefore f(x)=\frac{x}{x^2-1}(x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0, x \neq \pm 1).$

9 已知一次函数 $y=f(x)$ 满足 $f[f(x)]=4x+3$, 求一次函数的解析式.

【思路解析】 设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$, 用待定系数法.

【答案】 设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$,

$$\therefore f[f(x)]=a \cdot f(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b.$$

$$\therefore a^2x+ab+b=4x+3.$$

$$\therefore \begin{cases} a^2=4, \\ ab+b=3. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2, \\ b=-3. \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=2x+1 \text{ 或 } f(x)=-2x-3.$$

10 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}(a, b$ 为常数) 且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3, x_2=4$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

【思路解析】 求出函数 $f(x)$ 的解析式中的待定系数 a, b 是我们解题的目标, 根据已知条件 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3, x_2=4$, 可以将题意转化为方程组求解.

【答案】 将 $x_1=3, x_2=4$ 分别代入方程 $\frac{x^2}{ax+b}-x+12=0$,

$$\text{得} \begin{cases} \frac{9}{3a+b}=-9, \\ \frac{16}{4a+b}=-8. \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} a=-1, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x)=\frac{x^2}{2-x}(x \neq 2).$$

11 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(-x)=x(x \neq 0)$, 求 $f(x)$.

【思路解析】 以 $-x$ 代换 x , 解关于 $-x, x$ 的方程组, 消去 $-x$.

【答案】 $\because f(x)+2f(-x)=x$ ①

以 $-x$ 代换 x , 得 $f(-x)+2f(x)=-x$ ②

解①②组成的方程组得 $f(x)=-3x$.

12 已知 $f(xy)=f(x)f(y)$, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $f(x)$.

【思路解析】 可利用赋值法求解. 赋值法: 在求函数的解析式时, 有时候要“以退求进”, 即把自变量赋于特殊值展现内在联系, 或者减少变量个数, 以利求解.



图象与 x 轴的两个交点的横坐标;顶点式 $f(x)=a(x-m)^2+n$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$), (m, n) 是顶点坐标. 无论哪种形式都有三个参数, 所以可用待定系数法求解 $f(x)$, 具体解法如下.

解法一:(待定系数法)由题意可设 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$).

$\therefore f(x)$ 的图象过点 $A(1, 1)$ 、 $B(2, 0)$ 及点 $C(6, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=1, \\ 4a+2b+c=0, \\ 36a+6b+c=0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{5}, \\ b=-\frac{8}{5}, \\ c=\frac{12}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{8}{5}x+\frac{12}{5}.$$

解法二:(待定系数法) $\therefore f(x)$ 的图象过点 $B(2, 0)$ 及点 $C(6, 0)$, $\therefore f(x)$ 的图象与 x 轴的两交点的横坐标分别是 2 和 6. $\therefore$ 可设 $f(x)=a(x-2)(x-6)$, $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$. $\therefore f(x)$ 的图象过点 $A(1, 1)$, $\therefore 1=a(1-2)(1-6)$. 解得 $a=\frac{1}{5}$.

$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}(x-2)(x-6), \text{即 } f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{8}{5}x+\frac{12}{5}.$$

解法三:(待定系数法) $\therefore f(x)$ 的图象过点 $B(2, 0)$ 及点 $C(6, 0)$, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2+6}{2}$, 即 $x=4$ 对称. $\therefore$ 可设 $f(x)=a(x-4)^2+m$, 其中 $a, m \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$. 又 $f(x)$ 的图象过点 $A(1, 1)$ 、 $B(2, 0)$, $\therefore \begin{cases} 1=a(1-4)^2+m, \\ 0=a(2-4)^2+m. \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} m+9a=1, \\ m+4a=0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{5}, \\ m=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}(x-4)^2-\frac{4}{5}, \text{即 } f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{8}{5}x+\frac{12}{5}.$$

【溯源】当知道了函数类型求解函数表达式时, 一般用待定系数法. 如求一次函数可设 $f(x)=kx+b$, k, b 为待定系数; 求反比例函数可设 $f(x)=\frac{k}{x}$, k 为待定系数.

6. 函数的值域

基本函数的值域:

(1) 正比例函数 $y=kx$ 与一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的值域为 $\mathbf{R}$.

(2) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$).

当 $a > 0$ 时, 值域为 $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$;

当 $a < 0$ 时, 值域为 $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$.

常见函数值域的求解类型和方法:

(1) 配方法是求“二次函数类”值域的基本方法, 形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 的函数的值域问题, 均可使用配方法.

(2) 函数解析式中含有根式, 并且根式内 x 的次数与根式外的 x 的次数相同, 可用一个新的变量来替代根式, 而根

【答案】由于等式 $f(xy)=f(x)f(y)$ 对于一切实数都成立, 故不妨设 $y=0$, 代入得 $f(x \cdot 0)=f(x) \cdot f(0)$, 即 $f(0)=f(x) \cdot f(0)$.

又 $\therefore f(0) \neq 0$, $\therefore f(x)=1$.

13 已知 a 为实数, $x \in (-\infty, a)$, 则函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 的最小值是 ()

A. $a+\frac{3}{4}$

B. a^2+1

C. 1

D. a^2+1 或 $a+\frac{3}{4}$

【思路解析】此题考查用配方法求二次函数, 并用分类讨论的数学思想确定函数的最小值.

$$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}, \text{若 } a \leq \frac{1}{2},$$

则函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 从而函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 在 $(-\infty, a)$ 上的最小值为

$$f(a)=a^2+1; \text{若 } a > \frac{1}{2}, \text{则函数 } f(x)=x^2-x+a+1 \text{ 在}$$

$$(-\infty, a) \text{ 上的最小值为 } f(\frac{1}{2})=a+\frac{3}{4}.$$

综上, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数的最小值为 a^2+1 ; 当 $a > \frac{1}{2}$

时, 函数的最小值为 $a+\frac{3}{4}$. 因此选 D.

【答案】D

14 二次函数 $y=-x^2+6x+k$ 的值域为 $(-\infty, 0]$, 求 k 的值.

【思路解析】 $\therefore$ 二次函数 $y=-x^2+6x+k$ 的值域为 $(-\infty, 0]$, $\therefore$ 其最小值为 0, 即顶点纵坐标为 0, 从图形上看就二次函数的图象与 x 轴相切.

【答案】法 1: $y=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$.

$\therefore$ 值域为 $(-\infty, 0]$,

$$\therefore k+9=0, k=-9.$$

法 2: $\therefore$ 二次函数开口向下, 值域为 $(-\infty, 0]$,

$\therefore$ 其图象与 x 轴相切, 判别式 $\Delta=0$,

$$\text{即 } \Delta=6^2-4 \cdot (-1) \cdot k=36+4k=0.$$

$$\therefore k=-9.$$

15 函数 $y=\frac{2x-3}{2x+3}$ 的值域是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

B. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【思路解析】因为函数的分子与分母都是关于 x 的一次函数, 所以可用“分离常数法”求此函数的值域.

$$y=\frac{2x-3}{2x+3}$$

$$=\frac{(2x+3)-6}{2x+3}$$

$$=1-\frac{6}{2x+3}.$$

$$\therefore \frac{6}{2x+3} \neq 0, \therefore y \neq 1. \text{ 故选 B.}$$



式外的 x 也可以用这个新的变量表示出来,这样就可将原函数表示成这个新变量的一个二次函数形.我们把这种求函数值域的方法叫做“换元法”,形如 $y=ax+d\pm\sqrt{bx+c}(ab\neq 0)$ 的函数均可用“换元法”求值域.需要注意的是换元后的变量的取值范围.

(3)形如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(c\neq 0, bc\neq ad)$ 可以将其分解成一个常数与一个分式的和或差的形式,并且分式的变量 x 只在分母中,又因为反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 及其相应的形式 $y=\frac{1}{ax+b}$ 的值域为 $\{y|y\neq 0\}$,所以这种函数的值域就是不等于此常数的所有实数.我们通常称这种求值域的方法为“分离常数法”.

(4)形如 $y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}(a_1, a_2$ 不同时为零)的函数,可把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x, y)=0$,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geq 0$,从而求得原函数的值域.注意事项:函数定义域应为 $\mathbf{R}$ (或有有限个断点),分子、分母没有公因式.

案例 6 在求解下列函数的值域后,你能有什么启发吗?

- (1) $y=x^2+4x-2, x\in\mathbf{R}$;
- (2) $y=x^2+4x-2, x\in[-5, 0]$;
- (3) $y=x^2+4x-2, x\in[-6, -3]$;
- (4) $y=x^2+4x-2, x\in[0, 2]$.

【探究】这些函数都是二次函数且解析式都相同,但是各自函数的定义域都是不同的,应该通过“配方”借助于函数的图象来求其函数.

(1)配方,得 $y=(x+2)^2-6$,由于 $x\in\mathbf{R}$,故当 $x=-2$ 时, $y_{\min}=-6$,无最大值,所以值域是 $[-6, +\infty)$.

(2)配方,得 $y=(x+2)^2-6$,因为 $x\in[-5, 0]$,所以当 $x=-2$ 时, $y_{\min}=-6$,当 $x=-5$ 时, $y_{\max}=3$.

故函数的值域是 $[-6, 3]$.

(3)配方,得 $y=(x+2)^2-6$,因为 $x\in[-6, -3]$,

所以当 $x=-3$ 时, $y_{\min}=-5$,当 $x=-6$ 时, $y_{\max}=10$.

故函数的值域是 $[-5, 10]$.

(4)配方,得 $y=(x+2)^2-6$,

因为 $x\in[0, 2]$,所以当 $x=0$ 时, $y_{\min}=-2$;

当 $x=2$ 时, $y_{\max}=10$.

故函数的值域是 $[-2, 10]$.

【溯源】上述四个题目相同但所给的区间不同,最后得到的值域也不同,主要是由于二次函数在不同区间上的单调性不同而产生的,因此在求二次函数值域时一定要考虑函数是针对哪一个区间上的值域和此时图象是什么样子的.

1.2.2 函数的表示法

1. 函数的表示方法

主要有三种常用的表示方法,即解析法、列表法和图象法.

(1)解析法:把一个函数用一个式子表示,这种表示函数的方法叫做解析法.

(2)列表法:把两个变量的一系列对应值列成一个表,这种表示方法叫做列表法.

(3)图象法:把两个变量之间的关系用图象表示,这种方法叫做图象法.

【答案】B

16 求函数 $y=2x-3+\sqrt{4x-13}$ 的值域.

【思路解析】函数解析式中含有根式,并且根式内 x 的次数与根式外的 x 的次数相同,故可用“换元法”来求值域.

【答案】令 $t=\sqrt{4x-13}(t\geq 0)$,则 $x=\frac{t^2+13}{4}$.

$$\text{所以 } y=\frac{t^2+7}{2}+t$$

$$=\frac{t^2+2t+13}{2}$$

$$=\frac{(t+1)^2+12}{2}.$$

因为 $t\geq 0$,所以当 $t=0$ 时, $y_{\min}=\frac{13}{2}$.

所以函数的值域是 $(-\infty, \frac{13}{2}]$.

17 求函数 $y=\frac{2x^2+2x+5}{2x^2+2x+1}$ 的值域.

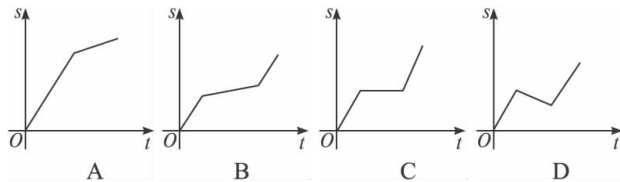
【思路解析】函数的解析式是分式,且分母中变量 x 的次数是二次的,函数式可化为关于 x 的一元二次方程,利用“判别式法”来求值域.

【答案】将解析式改写成关于 x 的一元二次方程 $(2y-2)x^2+(2y-2)x+y-5=0$.

当 $y\neq 1$ 时, $\Delta\geq 0$,即 $(2y-2)^2+20(2y-2)\geq 0\Rightarrow y\geq 1$ 或 $y\leq -9$.

当 $y=1$ 时, $y=5$ 不成立,所以值域为 $(-\infty, -9]\cup(1, +\infty)$.

18 李明骑车上学,一开始以某一速度前进,途中车子发生故障,只好停下来修车,车修好后,因怕耽误上学时间,于是就加快了车速,在下面给出的四个函数示意图中(s 为距离, t 为时间),符合以上情况的是



【思路解析】对位要清楚,注意时间和路程的变化关系.

【答案】C

19 已知 $f(x)=x^2+2x-3$,用图象法表示函数 $g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$.

【思路解析】知道函数 $g(x)$ 的定义域、值域和对应法则,就能根据这三个要素画出函数 $g(x)$ 的图象,所以要先求出函数 $g(x)$ 的三要素.

当 $f(x)\leq 0, x^2+2x-3\leq 0, -3\leq x\leq 1, g(x)=0$.

当 $f(x)>0$,即 $x<-3$ 或 $x>1, g(x)=f(x)=(x+1)^2-4$.

【答案】



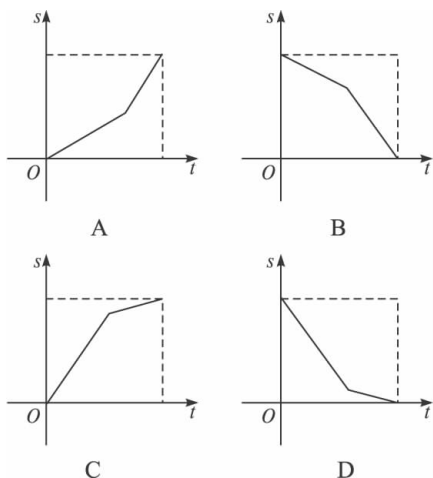
● 疑难疏引 用解析式表示函数关系的优点:函数关系清楚,容易从自变量的值求出其对应的函数值,便于用解析式来研究函数的性质.中学里研究的函数主要是用解析式表示的函数.缺点:有些函数很难用解析式表示.

用列表法表示函数关系的优点:不必通过计算就知道当自变量取某些值时函数的对应值.缺点:函数解析式的体现有时不明显.

用图象法表示函数关系的优点:能直观形象地表示出函数的变化情况,更能体现数形结合的思想.缺点:变量的值依赖于图象的精度,不利于精确计算.

由于函数关系的三种表示方法各具特色,优点突出,但大都存在着缺点,不尽如人意,所以在应用中本着物尽其用、扬长避短、优势互补的精神,通常表示函数关系是把这三种方法结合起来运用,先确定函数的解析式,即用解析法表示函数;再根据函数解析式,计算自变量与函数的各组对应值,列表;最后是画出函数的图象.

案例 1 小刚离开家去学校,由于怕迟到,所以一开始就跑步,跑累了再走余下的路程.在下图所示中,纵轴表示离学校的距离,横轴表示出发后的时间,则下列四个图象中较符合小刚走法的是 ()



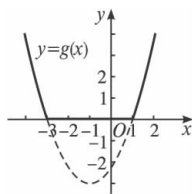
【探究】 首先审清题意,特别是横、纵两轴的含义.纵轴表示离学校的距离,所以排除 A、C,在 B、D 中选择答案.由于开始是跑步前进,所以同一时间内,位置变化大,所以选择 D.

【溯源】 实际应用问题是高考考查的重点也是难点,解决此类问题要特别重视实际变量和函数变量之间的对应关系,尤其是图象题经常用直观感觉判断.

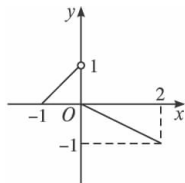
2. 分段函数

● 疑难疏引 有些函数在它的定义域中,对于自变量 x 的不同取值范围,对应法则也不同,这样的函数通常称为分段函数.分段函数是一个函数,而不是几个函数,分段函数是一个函数,在画图象时必须分段画,尤其需注意特殊点,在解决这部分题目时要注意分段定义函数作为一个整体与构成它的局部之间的关系.主要是指根据定义域的分段而产生不同的函数关系式.

案例 2 用分段函数表示 $f(x) = |x-1|$, 并求 $f(0)$ 、 $f(-2)$ 、 $f(3)$.



20 函数在闭区间 $[-1, 2]$ 上的图象如图所示,求此函数的解析式.



【思路解析】 根据函数的图象求函数的解析式,关键是确定自变量在每一段上所对应的函数类型,然后由待定系数法求出每一段上的解析式,从而得出整个函数的解析式.

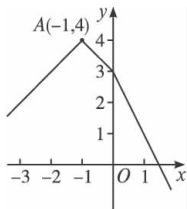
【答案】 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

21 已知函数 $y = \begin{cases} -2x+3, & x \geq 0, \\ -x+3, & -1 \leq x < 0, \\ x+5, & x < -1, \end{cases}$ 则函数 y 的最大值是_____.

【思路解析】 可根据函数图象直接观察函数的取值范围,如图,画出分段函数的图象,图象的最高点 A 的纵坐标就是函数的最大值.而点 A 的坐标就是方程组 $\begin{cases} y = -x+3 \\ y = x+5 \end{cases}$ 的

解,解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 4, \end{cases}$
 $\therefore A(-1, 4)$.

$\therefore$ 函数的最大值为 4.



【答案】 4

22 判断下列两个对应是否是集合 A 到集合 B 的映射?

- (1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 对应法则 $f: x \rightarrow 2x+1$;
- (2) 设 $A = \mathbf{N}^*$, $B = \{0, 1\}$, 对应法则 $f: x \rightarrow x$ 除以 2 得到的余数;
- (3) 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$, $f: x \rightarrow x$ 取倒数;
- (4) $A = \{(x, y) \mid |x| < 2, x+y < 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $f: (x, y) \rightarrow x+y$;
- (5) $A = \{x \mid x > 2, x \in \mathbf{N}\}$, $B = \mathbf{N}$, $f: x \rightarrow$ 小于 x 的最大质数;
- (6) $A = \mathbf{N}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $f: x \rightarrow x$ 被 3 除所得余数.