

PREFACE

前言

《高中同步测控全优设计》饱含着我们的人文关怀,承载着我们的爱心与智慧——致力于打通高考通道,帮助你在学习的过程中找到成功的喜悦!

你手中的这本《高中同步测控全优设计》以理念统帅板块,以板块整合栏目,以栏目组织内容。从板块到栏目,从形式到内容,都紧紧扣准新课程的脉搏,做到了继承与创新合一。本书设置了三大板块:【温故知新】【互动课堂】与【主动成长】。

【温故知新】在链接并温习已学知识的基础上,加强对新知识的预习与掌握,使前后内容有机交融、一脉相承。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“新知预习”和“知识回顾”。“新知预习”去粗取精,呈现出新知识的精华部分,并引导你自主掌握知识重点;“知识回顾”承前启后,为前后知识的学习搭起一座桥梁,并使知识在课内课外都得到再现与应用。

【互动课堂】倡导师生互动、生本互动,旨在让你实现从被动到主动的根本转变。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“疏导引导”和“活学巧用”。“疏导引导”既有对主干知识和学习方法的疏导与引导,又有针对主干知识的精选例题、精彩解析及精致升华;“活学巧用”凸现的是实践运用的风范与力量、探究创新的思路与乐趣、提高升华的深度与高度。

【主动成长】留给你一片自主锤炼、主动发展的天空,让你在第一时间成为学习的主人、创新的主人。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“夯基达标”“走近高考”。“夯基达标”展示的是知识点覆盖面广泛的基础题,为你搭建一个夯实基础、稳扎稳打、步步为营的平台;“走近高考”展示的是近年来的高考真题和模拟题,让你提前触摸高考、感受高考,做到有备无患。

本书图标形象生动、体例明确清晰、版式活泼大方、内容科学严谨,图文并茂的全优设计既做到了“活”而不乱,又做到了“实”而不死,是一本容易让你产生阅读冲动、爱不释手的教辅读物。

《高中同步测控全优设计》编写组



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS

目录

第一章 集合 1

§ 1 集合的含义与表示 1

温故知新 1

互动课堂 2

主动成长 4

§ 2 集合的基本关系 5

温故知新 5

互动课堂 5

主动成长 7

§ 3 集合的基本运算 8

温故知新 8

互动课堂 8

主动成长 12

本章测评 13

第二章 函数 15

§ 1 生活中的变量关系 15

温故知新 15

互动课堂 16

主动成长 17

§ 2 对函数的进一步认识 18

温故知新 18

互动课堂 19

主动成长 22

§ 3 函数的单调性 23

温故知新 23

互动课堂 23

主动成长 25

§ 4 二次函数性质的再研究 27

温故知新 27

互动课堂 27

主动成长 34

§ 5 简单的幂函数 36

温故知新 36

互动课堂 36

主动成长 38

本章测评 40

第三章 指数函数和对数函数 42

§ 1 正整数指数函数 42

温故知新 42

互动课堂 43

主动成长 44

§ 2 指数概念的扩充 45

温故知新 45

互动课堂 45

主动成长 48

§ 3 指数函数 49

温故知新 49

互动课堂 49

主动成长 51

§ 4 对数 53



温故知新·····	53
互动课堂·····	53
主动成长·····	56
§ 5 对数函数 ·····	57
温故知新·····	57
互动课堂·····	57
主动成长·····	61
§ 6 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较 ···	
·····	62
温故知新·····	62
互动课堂·····	63
主动成长·····	64
本章测评·····	65

第四章 函数应用 ·····	67
§ 1 函数与方程 ·····	67
温故知新·····	67
互动课堂·····	68
主动成长·····	71
§ 2 实际问题的函数建模 ·····	72
温故知新·····	72
互动课堂·····	73
主动成长·····	78
本章测评·····	80
综合测试 ·····	83
解析与答案 ·····	85





第一章 集合



本章概要

本章主要讲述集合的初步知识. 集合是数学中最基本的概念之一, 也是初、高中数学衔接点之一. 本章既对初中数学中有关概念(如数集、方程的解集、点的轨迹等)在理论上予以肯定和提高, 同时也为集合思想进一步渗透于高中数学(如函数的概念, 空间的点、线、面的关系, 曲线和方程等)打下基础. 集合论及其所反映的数学思想, 在越来越广泛的领域中得到应用.

本章的知识要求:

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念; 理解空集、全集的意义; 理解属于、包含、相等关系的意义; 能用有关术语和符号表示元素与集合、集合与集合之间的关系. 其重点是有关集合的基本概念, 难点是有关集合的各个概念的涵义以及这些概念相互之间的区别与联系.

本章是高中数学的起始章, 学好本章知识, 对于顺利学习高中数学意义重大, 学习本章知识切忌急于求成. 随着后续章节的学习, 其应用越来越广泛和深入, 相应地, 对集合的理解和掌握水平也会越来越高.

§ 1 集合的含义与表示



温故知新



新知预习

集合的含义与表示

(一) 集合的概念与分类

1. 集合中元素的特征: _____、_____、_____.
2. 集合的分类: (1) _____: 含有有限个元素的集合; (2) _____: 含有无限个元素的集合; (3) _____: 不含任何元素的集合, 记作 $\emptyset$;

(二) 集合的表示方法

1. 常用数集的字母表示:

自然数集—_____;
整数集—_____;
有理数集—_____;
实数集—_____.

2. _____法: 把集合中的全部元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合的方法.



知识回顾

背景链接

20 世纪初, 伟大的数学家、集合论的创始人——奥格尔·康托尔把人们从有限带进了无穷, 把近代数学推向了现代数学. 在 1874~1909 年的 30 多年间, 他系统地建立了关于无穷集合的理论, 创立了超穷序数、基数新概念, 并把最新的超穷基数 $\aleph$ 赋予可数集, 给连续统更高的超穷数, 还建立了一整套有关的基本定理. 1901 年勒贝格以测度论充实了集合论, 康托尔的集合论才被公认了.

知识链接

初中接触的数集: 自然数集、整数集、有理数集、实数集等.





3. _____法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

(三)元素与集合的关系

1. 如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 _____;
2. 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 _____.



一、集合的概念

1. 集合:一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集).

(1)构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).

(2)如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A (记作 $a \in A$),如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A (记作 $a \notin A$).

2. 空集:一般地,把不含任何元素的集合叫空集.记作 $\emptyset$.

● 疑难疏引 集合中元素的特征:(1)确定性,是指集合中的元素是确定的,即任何一个对象都能明确它是或不是某个集合的元素,两者必具其一,它是判断一组对象是否形成集合的标准;(2)互异性,是指给定的一个集合的元素中,任何两个元素都是不同的,因而在同一个集合中,不能重复出现同一元素,这一点常被我们所忽略;(3)无序性,是指在一个集合中,元素之间都是平等的,它们都充当集合中的一员,无先后次序之分.

案例 1 下列各组对象能否构成集合,为什么?

(1)接近于 0 的数的全体;(2)比较小的正整数的全体;(3)平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体;(4)正三角形的全体;(5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

【探究】“接近于 0 的数”“比较小的正整数”标准不明确,所以(1)、(2)不是集合.同样,“ $\sqrt{2}$ 的近似值”不明确精确到什么程度,因此,很难判定一个数是不是它的近似值,所以也不是一个集合.(3)、(4)能构成集合.

【溯源】判断一组对象是否构成集合的最重要标志就是看其所叙述对象是否具有确定性,即对所叙述对象进行描述的特征词语是否具有共性标准.

案例 2 设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$,数 k 应满足什么条件?

【探究】集合的元素应具有集合的元素的属性,利用互异性可得解.

根据集合中元素的互异性,有 $k^2 - k \neq 2k$,解得 $k \neq 0, k \neq 3$,所以实数 k 的取值范围是 $\{k | k \neq 0 \text{ 且 } k \neq 3\}$.

【溯源】判断一组对象能否构成一个集合,关键是看这组对象是否同时具备集合元素的三个特征.考查该知识点的问题分正向和逆向思维两个角度,其解决问题的基础是正确理解三个特征要求.

3. 常用的数集及其记法

- (1)全体非负整数组成的集合称为非负整数集,记作 $\mathbb{N}$;
- (2)所有正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbb{N}_+$;
- (3)全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbb{Z}$;
- (4)全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbb{Q}$;
- (5)全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbb{R}$.

自然数集的概念:自然数的全体组成自然数集.

自然数集的表示方法:在椭圆圈内填上一些自然数,点上三点,在圈下写上“自然数集”,用此形式表示自然数集.



1 下列对象不能构成集合的是 ()

- ①方程 $x^2 - 9 = 0$ 的实数根
- ②我国近代著名的数学家
- ③联合国常任理事国
- ④空气中密度大的气体

A. ①② B. ①④
C. ①②④ D. ②④

【思路解析】研究对象能否构成集合的问题一般主要考查集合中元素的确定性.①③中的研究对象显然符合确定性;②中“著名”没有明确的界限;④中“密度大”的程度没有明确的界限.故②④不能构成集合.

【答案】 D

2 集合 $P = \{1, m, m^2 - 3m - 1\}$,若 $3 \in P$ 且 $-1 \notin P$,则实数 m 的值为…… ()

A. 4 B. 3
C. 4 或 3 D. -1 或 4

【思路解析】 $\because 3 \in P$ 且 $-1 \notin P$,
 $\therefore m^2 - 3m - 1 = 3$,得 $m = 4$ 或 $m = -1$ (舍)或者 $m = 3$ (舍).
 $\therefore m = 4$. 因此,选 A.

【答案】 A

3 给出下面几个关系式: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, 0.3 \in$

$\mathbb{Q}, 0 \in \mathbb{N}, 0 \in \{0\}, 0 \in \mathbb{N}_+, \frac{1}{2} \in \mathbb{N}_+, -\pi \notin \mathbb{Z}, -5 \notin \mathbb{Z}$,其中正确的关系式的个数是 …………… ()

A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

【思路解析】注意常用数集的字母表示.

【答案】 A





二、集合的表示方法

列举法:把集合中的全部元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法;

描述法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

疑难疏引 (1)在使用列举法时应注意以下四点:①元素间用逗号“,”;②元素不重复;③不考虑元素顺序;④对于含元素较多的集合,如果构成该集合的元素有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律呈现出来后,才能用省略号表示,如 $\{1,2,3,\dots,n\}$, $\{1,3,5,7,9,\dots\}$.

(2)在使用描述法时应注意以下几点:①写清元素代号;②说清集合中元素的特性;③文字表述多层次时,应当准确使用“且”“或”;④所有描述的内容都写在集合括号内;⑤语句力求简明、确切.

(3)列举法与描述法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.一般表示无限集时,不宜采用列举法,因为不能将无限集中的元素一一列举出来.有时为了方便,在不引起混淆的情况下,也把具有明显特征的无限集用列举法表示:如 $N=\{0,1,2,3,\dots\}$ 等.

案例 3 下面六种表示法:

(1) $\{x=-1,y=2\}$; (2) $\{(x,y)|\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}\}$; (3) $\{-1,2\}$; (4) $(-1,2)$; (5) $\{(-1,2)\}$; (6) $\{(x,y)|x=-1 \text{ 或 } y=2\}$,

其中能正确表示方程组 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集的是哪几组?

【探究】由于此方程组的解是 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 集合中只有 $(-1,2)$ 这一个元素,

所以 $\{(x,y)|\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}\}=\{(x,y)|\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}\}=\{(-1,2)\}$.

故(2)(5)是正确的.

【溯源】研究元素与集合的关系时,一要注意集合的表示方法(列举法或描述法),二要明确元素所具有的特征性质.

三、元素与集合的关系

(1)元素和集合的关系是 $\in$ 和 $\notin$,二者有且只有一种成立.集合具有两方面的意义,即:凡是符合条件的对象都是它的元素;只要是它的元素就必须符合条件.辩证地理解集合和元素这两个概念.(2)集合和元素是两个不同的概念,符号 $\in$ 和 $\notin$ 是表示元素和集合之间关系的,不能用来表示集合之间的关系.

案例 4 若集合 $M=\{a|a=x^2-y^2,x,y\in\mathbb{Z}\}$.

(1)整数 8,9,10 是否属于 M ;

(2)证明一切奇数都属于 M .

【探究】要判断 8,9,10 是否属于 M ,关键是看 8,9,10 能否写成两个整数的平方差.

(1) $\because 8=3^2-1,9=5^2-4^2,\therefore 8\in M,9\in M$.

假设 $10=x^2-y^2,x,y\in\mathbb{Z}$,则 $(|x|+|y|)(|x|-|y|)=10$,且 $|x|+|y|>|x|-|y|>0$.

$\therefore 10=1\times 10=2\times 5,\therefore \begin{cases} |x|+|y|=10 \\ |x|-|y|=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |x|+|y|=5 \\ |x|-|y|=2 \end{cases}$

显然均无整数解, $\therefore 10\notin M$.

(2)设奇数为 $2n+1,n\in\mathbb{Z}$,恒有 $2n+1=(n+1)^2-n^2,\therefore 2n+1\in M$,即一切奇数都属于 M .

【溯源】关于集合 M ,我们还可以获得以下结论:

① M 中的所有元素都属于 $\mathbb{Z}$;

② M 是无限集合;

③ 偶数 $4n-2(n\in\mathbb{Z})$ 不属于 M .

4 集合 $\{\frac{m-2}{3}|m\in\mathbb{N},m\leq 20\}$ 的元素个数有..... ()

A. 6 个 B. 7 个
C. 21 个 D. 10 个

【思路解析】 $\because$ 符合条件的 m 为 $0\sim 20$ 一共 21 个自然数, $\therefore \frac{m-2}{3}$ 的值也有 21 个.因此,选 C.

【答案】 C

5 方程组 $\begin{cases} 2x+y+6=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集是..... ()

A. $\{(-3,0)\}$ B. $\{-3,0\}$
C. $(-3,0)$ D. $\{(0,-3)\}$

【思路解析】本题为解二元一次方程组的问题,其关键是明确集合中元素的一般形式.

【答案】 A

6 已知集合 $P=\{0,1,2,3,4\},Q=\{x|x=ab,a,b\in P,a\neq b\}$,用列举法求集合 Q .

【思路解析】集合 Q 中的元素是集合 P 中任意两个元素的积,结合元素互异性要求,不同的积有 0,2,3,4,6,8,12.

【答案】 $Q=\{0,2,3,4,6,8,12\}$.

7 已知集合 $A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbb{Z}\}$,判断下列元素 x 与集合 A 的关系:(1) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;(2) $x=x_1+x_2$ (其中 $x_1\in A,x_2\in A$).

【思路解析】本题考查元素与集合的关系.判断某对象是否为某集合的元素,关键在于判断它们是否具备该集合元素共有的属性.将 x 值试着写成 $m+n\sqrt{2}$ 的形式,若 m,n 是整数,便可完成判定,若无法表示成上式或 m,n 不为整数,则 x 不为集合中的元素.

【答案】(1) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,即 $m=\sqrt{3},n=1$,其中 $\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\notin A$.

(2) $\because x_1,x_2\in A$,设 $x_1=m_1+n_1\sqrt{2},x_2=m_2+n_2\sqrt{2},(m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{Z})$,则 $x_1+x_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$,由 $m_1+m_2\in\mathbb{Z},n_1+n_2\in\mathbb{Z},\therefore x_1+x_2\in A$.



夯基达标

- 1 在“①高一数学课本中的难题;②所有的正三角形;③方程 $x^2+2=0$ 的实数解”中,能够表示成集合的是…… ()
A. ② B. ③ C. ②③ D. ①②③
- 2 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x-1<\sqrt{3}\}$,则有…… ()
A. $3\in A$ 且 $-3\notin A$
B. $3\in A$ 且 $-3\in A$
C. $3\notin A$ 且 $-3\in A$
D. $3\notin A$ 且 $-3\notin A$
- 3 下列命题中正确的是…… ()
A. $\{0\}$ 是空集
B. $\{x\in\mathbf{Q}|\frac{6}{x}\in\mathbf{N}\}$ 是有限集
C. $\{x\in\mathbf{Q}|x^2+x+2=0\}$ 是空集
D. $\{1,2\}$ 和 $\{2,1\}$ 是不同的集合
- 4 如果集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$ 中只有一个元素,则 a 的值是…… ()
A. 0 B. 0 或 1
C. 1 D. 不能确定
- 5 集合 $A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$. 又 $a\in A, b\in B$, 则一定有…… ()
A. $a+b\in A$
B. $a+b\in B$
C. $a+b\in C$
D. $a+b\notin A, B, C$ 中任一个
- 6 集合 $M=\{a|\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}, \text{且 } a\in\mathbf{Z}\}$, 用列举法表示集合 $M=$ _____.
- 7 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, \sqrt[3]{x^3}$ 所构成的集合最多有_____个元素.



走近高考

- 8 [2005 湖北高考,理 1] 设 P, Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$, 若 $P=\{0, 2, 5\}$, $Q=\{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是…… ()
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6
- 9 (经典回放) 设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in\mathbf{N}_+\}$, $N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in\mathbf{N}_+\}$, 试用列举法表示集合 M, N .
- 10 [2005 湖北黄冈模拟] 下列四个集合中不同于另外三个的是…… ()
A. $\{y|y=2\}$ B. $\{x|x^2-4x+4=0\}$
C. $\{x=2\}$ D. $\{2\}$
- 11 [2006 河北唐山模拟, 14] 设 x, y, z 都是非零实数, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xy}{|xy|} + \frac{xz}{|xz|} + \frac{yz}{|yz|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 所有可能的值组成的集合表示出来为_____ (用列举法).





§ 2 集合的基本关系



集合的基本关系

1. 子集:一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B ,或者说集合 B 包含集合 A ,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$;当集合 A 不包含于集合 B ,或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$,即若 $A \subseteq B$,又 $B \subseteq A$,则 $A=B$.

2. 子集和真子集

(1)若 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),则 A 是 B 的_____.空集是任何集合的_____,即 $\emptyset \subseteq A$.任何一个集合是它本身的_____,即 $A \subseteq A$.

(2)对于两个集合 A 与 B ,若 $A \subseteq B$,并且 $A \neq B$,则 A 是 B 的_____,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).空集是任何非空集合的_____.

(3)若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.



背景链接

在集合论产生与发展的整个过程中,许多数学家与哲学家从事了集合论的研究工作,并取得了令人振奋的成就.策墨罗和弗郎克尔通过对康托尔朴素集合论的研究,提出了 ZF 公理系统,把集合论建立在一系列公理系统上.使朴素集合论完善为公理化集合论.它克服了康托尔朴素集合论引起的一些矛盾,推动了集合论的发展.

知识链接

集合的定义,集合的元素,集合元素的性质,集合的表示方法.



集合的基本关系

1. 相关定义

(1)对于两个集合 A, B ,如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集.记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

(2)对于两个集合 A, B ,如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称集合 A 是集合 B 的真子集.记为 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

(3)如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任意一个元素都是集合 A 的元素,则称集合 A 和集合 B 相等,记作 $A=B$.

● 疑难疏引 (1)“ A 是 B 的子集”, A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,即由任意 $x \in A$ 能得到 $x \in B$. (2)任何一个集合是它本身的子集,记作 $A \subseteq A$. (3)空集是任何集合的子集. (4)在子集的定义中,不能理解为子集 A 是 B 中的“部分元素”所组成的集合.

2. 相关性质

(1) $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

(2) $B \subseteq A \Leftrightarrow B=\emptyset, B \subsetneq A$ 或 $B \neq \emptyset$ 且 $A=B$.



1 下列四个命题:①空集没有子集;②空集是任何一个集合的真子集;③空集中元素个数为 0;④任一集合必有两个或两个以上的子集.其中正确的有…… ()

A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 3 个

【思路解析】空集是任何一个集合的子集;空集是任何一个非空集合的真子集;任何集合是它本身的子集.③正确,选 B.

【答案】B

2 设集合 $M=\{x|x \leq 0\}$,则下列



$$(3) A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

$$A \subsetneq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subsetneq C.$$

$$A \subseteq B, B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C.$$

(4) 若集合 A 有 n 个元素,则 A 的子集个数为 2^n ,真子集个数为 $2^n - 1$ 个.

案例 1 下列六个关系中,错误的是哪几个,为什么?

$$(1) (0, 1, 2) \subseteq \{0, 1, 2\};$$

$$(2) 1 \subseteq \{0, 1, 2\};$$

$$(3) \{1\} \in \{0, 1, 2\};$$

$$(4) \emptyset \subsetneq \{0\};$$

$$(5) \emptyset \subseteq \{0\};$$

$$(6) \emptyset = \{0\}.$$

【探究】 本题主要检测对集合符号的理解,区别元素与集合的从属关系和集合与集合的包含关系,以及对空集的理解.易知(2)(3)(6)是错的.

【溯源】 做此类问题,首先要分析是元素与集合之间的关系还是集合之间的关系,如果是元素和集合,那么只能用“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”,如果是两集合之间的关系,那么应该在“ $\subseteq$ ”“ $\supseteq$ ”和“ $=$ ”中选择合适的符号表示.

案例 2 (1) 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有子集;

(2) 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

【探究】 本题考查子集的概念,注意不要遗漏,可按一定的顺序书写,养成好的习惯.

结果如下:(1) $\{a, b\}$ 的子集是 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

(2) $\{a, b, c\}$ 的子集是 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

【溯源】 事实上集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是 2^n ,所有真子集的个数是 $2^n - 1$,所有非空真子集的个数是 $2^n - 2$.

案例 3 已知 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$,求满足条件的集合 A .

【探究】 首先弄清应由怎样的元素组成集合 A .

$\because \{1, 2\} \subseteq A, \therefore A$ 中要有元素 1 和 2.

然后将 A 中元素增加的状况进行分类讨论:

(1) A 中仅有元素 1 和 2 时, $A = \{1, 2\}$.

(2) A 在 1, 2 的基础上增加 1 个,于是有 $A = \{1, 2, 3\}$ 或 $A = \{1, 2, 4\}$.

(3) A 在 1, 2 的基础上增加 2 个,于是有 $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

这样符合条件的集合 A 共有 4 个:

$\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

【溯源】 (1) 若条件改为 $\{1, 2\} \subsetneq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$,则符合条件的 A 应将上述四个集合中的 $\{1, 2\}$ 去掉.

(2) 若仅需求 A 的个数则只需用公式 $2^{4-2} = 4$ 即可.

(3) 解题时应注意空集独特性,采用分类讨论、数形结合、等价转化思想解决集合与二次方程的综合应用题.

案例 4 已知 $A = \{0, 1\}, B = \{x | x \subseteq A\}, C = \{x | x \in A, x \in \mathbb{N}_+\}$. 探讨三个集合之间的关系.

【探究】 构成集合的元素可以是世界万物,当然也可以是集合,集合 B 中的元素就是集合.因为 $B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, C = \{1\}$,所以 $A \in B, C \in B, C \subseteq A$.

【溯源】 (1) 集合的元素是任意的. (2) 在解有关集合问题时,对元素的识别是一个十分重要的环节,必须做到准确无误.

案例 5 设 $A = \{x | 1 < x < 2\}, B = \{x | x > a\}$,若 $A \subsetneq B$,则 a 的取值范围是

【探究】 $A \subsetneq B$ 说明 A 是 B 的真子集,利用数轴(如图 1-2-1)可知 $a \leq 1$.

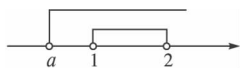


图 1-2-1

关系中正确的是 …… ()

$$A. 0 \subseteq M \quad B. \{0\} \in M$$

$$C. \{0\} \subseteq M \quad D. \emptyset \in M$$

【思路解析】 本题考查几个符号的正确应用.

【答案】 C

3 集合 $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$,

$B = \{y | y = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$,则 A

与 B 的关系为 …… ()

$$A. A \subsetneq B \quad B. A \supsetneq B$$

$$C. A = B \quad D. A \neq B$$

【思路解析】 易知集合 A 就是奇数集,集合 B 通过给 k 赋值,也可以取到所有的奇数,故选 C.

【答案】 C

4 写出满足 $\{1, 3\} \subseteq M \subseteq \{1, 3, 5, 7\}$ 的所有集合 M .

【思路解析】 根据题目条件可以知道集合 M 中至少含有元素 1 和 3,最多只能有 4 个元素 1, 3, 5 和 7,所以相当于求集合 $\{5, 7\}$ 的所有子集,然后在这些子集中都加上元素 1 和 3 即可.

【答案】 其结果为 $\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 5, 7\}$.

5 设集合 $A = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$,

$B = \{2, 5, b\}$,并且 $A = B$,求实数 a, b 的值.

【思路解析】 本题考查集合相等的含义,易知 $\{2, 5, b\} = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$,解方程组即可.

【答案】 由已知, $\{2, 5, b\} = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$,

$$\therefore \begin{cases} b = 3, \\ a^2 + 2a - 3 = 5 \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} b = 3, \\ a = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 3, \\ a = 2. \end{cases}$$

6 已知 M, N 都有 3 个元素,且

$M = \{a, a + d, a + 2d\}, N = \{a, aq, aq^2\}$,其中 $a \neq 0, M = N$,求 q 的值.

【思路解析】 $\because M = N, \therefore a + d = aq, a + 2d = aq^2$, ①

或 $a + d = aq^2, a + 2d = aq$. ②

对①式后式减前式,得 $d = aq(q - 1)$,代入前式,得 $q = 1$.但此时 $aq = a$,违背了元素的互异性, $\therefore$ 舍去 $q = 1$.对②式后式减前式,得 $d = aq(1 - q)$,再代



【溯源】解此类题目通过数轴比较直观.

案例6 已知 $A = \{-3, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 2px + q = 0\}$, $B \neq \emptyset$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 p, q 的值.

【探究】本题可以先求出集合 B 的三种情况, 再由方程的根来求出字母的值.

由 $B \subseteq A$, 知 $B = \{-3\}$ 或 $\{4\}$ 或 $\{-3, 4\}$.

当 $B = \{-3\}$ 时, 方程 $x^2 - 2px + q = 0$ 有两个相等的根 -3 , $\therefore \begin{cases} 9 + 6p + q = 0, \\ \Delta = 4p^2 - 4q = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p = -3, \\ q = 9; \end{cases}$

当 $B = \{4\}$ 时, 方程 $x^2 - 2px + q = 0$ 有两个相等的根 4 ,

$\therefore \begin{cases} 16 - 8p + q = 0, \\ \Delta = 4p^2 - 4q = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p = 4, \\ q = 16; \end{cases}$

当 $B = \{-3, 4\}$ 时, 方程 $x^2 - 2px + q = 0$ 的根是 $-3, 4$,

$\therefore \begin{cases} 9 + 6p + q = 0, \\ 16 - 8p + q = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p = \frac{1}{2}, \\ q = -12. \end{cases}$

【溯源】本题应从集合 B 的三种情况考虑, 而不应该盲目地把 $-3, 4$ 带入方程.

入后式, 得 $q = 1$ (舍), $q = -\frac{1}{2}$.

综上, $q = -\frac{1}{2}$.

【答案】 $q = -\frac{1}{2}$.

7 已知 $A = \{x | x < 5\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【思路解析】 $A \subseteq B$ 说明 A 的范围比 B 的范围小, 所以 $a \geq 5$.

【答案】 $a \geq 5$.

8 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 5\}$, $B = \{x | -m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$ 且 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值范围.

【思路解析】分析可知集合 A 是集合 B 的子集, 从本质上要注意到这两个集合所表示的范围的大小. 方法可采用数轴法.

【答案】 $\because A \subseteq B$,

$$\therefore \begin{cases} -2 \geq -m + 1, \\ 5 \leq 2m - 1. \end{cases}$$

$\therefore m \geq 3$.



1 四个关系式① $\emptyset \subseteq \{0\}$; ② $0 \in \{0\}$; ③ $\emptyset \in \{0\}$; ④ $\emptyset = \{0\}$, 其中表述正确的是

- A. ①② B. ①③
C. ①④ D. ②④

2 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则

- A. $M = N$ B. $M \subseteq N$
C. $M \supseteq N$ D. $M \supset N$

3 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = x - 1, x \in A\}$, 则 $\{0\}$ 与 B 的关系是

- A. $\{0\} \in B$ B. $\{0\} \subseteq B$
C. $\{0\} \not\subseteq B$ D. $\{0\} \supseteq B$

4 设集合 $A = \{\text{平行四边形}\}$, $B = \{\text{菱形}\}$, $C = \{\text{正方形}\}$, 则集合 A, B, C 的关系是

5 设 $A = \{x | x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | 1 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$, 则 A 与 B 的关系是

6 已知 $A = \{x | |x - a| = 4\}$, $B = \{1, 2, b\}$.

(1) 是否存在实数 a , 使得对于任意实数 b ($b \neq 1, b \neq 2$), 都

有 $A \subseteq B$? 若存在, 求出对应的 a 值, 若不存在, 请说明理由.

(2) 若 $A \subseteq B$ 成立, 求出对应的实数对 (a, b) .

7 已知 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + 1 = 0\}$, $B = \{1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.



轻轻告诉你

一个人应该为知识不广博而害羞。——张衡



走近高考

8. [2005 北京高考, 4] 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x > 1\}$, $P = \{x | x^2 > 1\}$, 则下列关系中正确的是 ()
- A. $M = P$ B. $P \supsetneq M$
C. $M \supsetneq P$ D. $\complement_U M \cap P = \emptyset$
9. [2005 天津高考, 1] 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 3 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集个数是 ()
- A. 16 B. 8 C. 7 D. 4
10. [2006 唐山三模, 15] 已知 $A = \{x | \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}\}$, 试求集合 A 的所有真子集的个数.

11. [2006 北京东城, 18] 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值.

§ 3 集合的基本运算



温故知新



新知预习

集合的运算

1. 交集: 由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.
2. 并集: 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.
3. 全集: 如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个全集, 由 U 来表示. 全集具有相对性.
4. 补集: 所谓 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 但 } x \notin A, A \subseteq U\}$ 就是说从全集 U 中取出集合 A 的元素之后, 所有剩余的元素组成的集合就是 $\complement_U A$.



知识回顾

应用链接

高一(二)班共 40 人, 从学校去公园, 全程步行的有 3 人, 全程坐公共汽车的有 18 人, 不坐公共汽车也不步行的有 6 人, 那么既坐公共汽车也步行一段路的人数为多少? 这个问题如何解决?

知识链接

集合的概念, 集合之间的关系可以结合韦恩图来表示.



互动课堂



疏导引导

集合的运算

1. 交集

定义: 一般地, 由所有属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 、 B 的交集.



活学巧用

1. (1) 设集合 $A = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.



记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

基本性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

案例 1 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为 ()

- A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$
C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

【探究】 由已知得 $M \cap N = \{(x, y) | \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}\} = \{(3, -1)\}$.

也可采用筛选法. 因为集合 M, N 的元素都是数组 (x, y) , 所以只有 D 符合要求.

【答案】 D

【溯源】 求两集合的交集, 即求同时满足两集合中元素性质的元素组成的集合. 本题就是求方程组 $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ 的解组成的集合. 弄清集合中元素的一般形式, 明确代表元素的性质对于解题成败是至关重要的.

2. 并集

定义: 一般地, 对于给定的两个集合 A, B 把它们所有的元素并在一起所组成的集合, 叫做 A, B 的并集. 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

基本性质: $A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

案例 2 已知关于 x 的方程 $3x^2 + px - 7 = 0$ 的解集为 A , 方程 $3x^2 - 7x + q = 0$ 的解集为 B , 若 $A \cap B = \{-\frac{1}{3}\}$, 求 $A \cup B$.

【探究】 本题主要考查交集与并集的定义以及它们在解题中的灵活应用. 过程如下:

$$\begin{aligned} \because A \cap B &= \{-\frac{1}{3}\}, \\ \therefore -\frac{1}{3} &\in A \text{ 且 } -\frac{1}{3} \in B. \\ \therefore 3(-\frac{1}{3})^2 + p(-\frac{1}{3}) - 7 &= 0, \text{ 且 } 3(-\frac{1}{3})^2 - 7(-\frac{1}{3}) + q = 0. \\ \therefore p &= -20, q = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{由 } 3x^2 - 20x - 7 = 0, \text{ 得 } A = \{-\frac{1}{3}, 7\},$$

$$\text{由 } 3x^2 - 7x - \frac{8}{3} = 0, \text{ 得 } B = \{-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\}.$$

$$\therefore A \cup B = \{-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, 7\}.$$

【溯源】 明确 $A \cap B$ 中的元素都是 A, B 中的元素是解决本题的突破口, $A \cup B$ 中只能出现一次 A 与 B 的公共元素, 这是在求集合并集时需注意的.

3. 全集、补集

定义: 在给定的问题中, 若研究的所有集合都是某一给定集合的子集, 那么称这个给定的集合为全集. 若 A 是全集 U 的子集, 由 U 中不属于 A 的元素构成的集合, 叫做 A 在 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$.

基本性质: $A \cap \complement_U A = \emptyset$, $A \cup \complement_U A = U$, $\complement_U(\complement_U A) = A$,

$$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B,$$

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B.$$

案例 3 已知全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, 若 $A = \{b, 2\}$, $\complement_I A = \{5\}$, 求实数 a, b .

【探究】 本题主要考查全集及补集的定义和集合中元素的性质, 以及它们在解题中的灵活应用.

$$\because A \cup \complement_I A = I,$$

$$\therefore b = 3, a^2 + 2a - 3 = 5.$$

$$\therefore b = 3, a = -4 \text{ 或 } b = 3, a = 2.$$

(2) 设集合 $A = \{(x, y) | x + y = 3\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 1\}$, 求 $A \cap B$.

(3) 设集合 $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3\}$, 求 $A \cap B$.

【思路解析】 解此类问题, 要先根据代表元素确定是什么类型的集合. 代表元素取到的值才是真正的元素. 点集求交集即求方程组的解.

【答案】 (1) $A \cup B = \{x | x \text{ 是斜三角形}\}$, $A \cap B = \emptyset$.

$$(2) A \cap B = \{(x, y) | \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}\} = \{(2, 1)\}.$$

$$(3) A = \{x | x = a^2 + 2a + 4\} = \{x | x = (a + 1)^2 + 3\} = \{x | x \geq 3\}, \\ B = \{y | y = b^2 - 4b + 3\} = \{y | y = (b - 2)^2 - 1\} = \{y | y \geq -1\}, \\ \therefore A \cap B = A = \{x | x \geq 3\}.$$

- 2 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 那么 $\complement_U(A \cap B)$ 等于 ()
- A. $\{3, 4\}$
B. $\{1, 2, 5, 6\}$
C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
D. $\emptyset$

【思路解析】 此题考查集合的交、并、补运算.

【答案】 B

- 3 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()
- A. $A \cup B$
B. $A \cap B$
C. $\complement_U A \cap \complement_U B$
D. $\complement_U A \cup \complement_U B$

【思路解析】 图示如图 1-3-1:

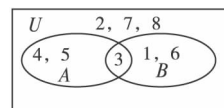


图 1-3-1

【答案】 C

- 4 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 5\}$, $B \subseteq \complement_U A$, 则集合 B 的个数是 ()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【思路解析】 $\complement_U A = \{2, 3, 4\}$, B 就是 $\{2, 3, 4\}$ 的真子集, 故选 C.



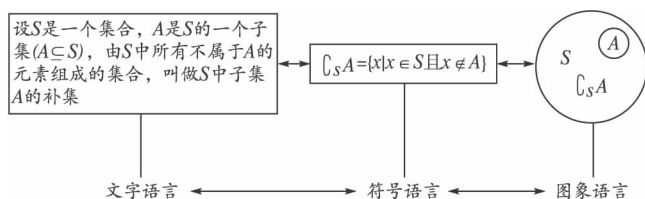
【溯源】求集合的补集运算时,一定要明确全集是什么,因为任何集合的补集都是相对于全集而言的。

4. 集合的综合运用

- (1) 基本知识: ①集合与元素(定义、表示方法);
②集合间的关系(子集,真子集,集合相等);
③集合运算(交集,并集,补集)。

基本方法: 枚举法,分析法,综合法,数形结合。

● 疑难疏引 (1) 用数学的三种语言互译表示全集与补集



(2) 集合运算的注意事项

①处理集合运算问题时,要注意化简集合的表达式. 如果集合中含有字母,要注意字母分类讨论。

②在解决有关集合运算题目时,一要把握概念中的关键词. 如“所有”“且”“或”;二要把握它们各自的实质;三要善于借助数轴,应用数形结合的思想。

(3)Venn图在集合中起到数形结合的作用,由图可以把一些不明确的数量关系直观地表现出来,起到化繁为简、化抽象为直观的作用。

(4)集合作为数学语言,已深刻地融入到函数、方程、不等式、平面曲线、平面区域等有关知识之中. 处理集合问题时,应充分综合运用有关的数学知识进行求解。

(5)在学习子、交、并、补集的概念时,应注意对“任何一个”“都”“所有”“或”“且”等词的理解,“交集”是指两个集合的所有公共元素所组成的集合. 忽略了“交集”概念中的“所有”两个字就会错误地认为“若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$ ”。“并集”概念中的“或”与生活用语中的“或”含义不同,生活用语中的“或”一般是或此或彼,必具其一,不兼有,“并集”概念中的“或”是可兼有的,但不必须兼有. 记忆口诀:

集合平时很常用,数学概念有不同.
理解集合并不难,三个要素是关键.
元素确定和互异,还有无序要牢记.
集合不论空不空,总有子集在其中.
集合用图很方便,子交并补很明显.

案例4 满足条件 $\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的所有集合 B 的个数有多少个,为什么?

【探究】此题是关于集合运算的逆运算,已知两个集合并的结果和其中的一个集合,求另一个集合,解决时要以元素为突破口,逐一试验可能的值,要做到不遗漏. 根据题意可得集合 B 中元素的个数可能是2个或3个或4个或5个. 当集合 B 中的元素个数为2个时, B 只能有一种可能的情况,即 $B = \{4, 5\}$; 当集合 B 中的元素个数为3个时,集合 B 有三种可能的情况,即 $B = \{1, 4, 5\}$ 或 $B = \{2, 4, 5\}$ 或 $B = \{3, 4, 5\}$; 当集合 B 中的元素个数为4个时,集合 B 也有三种可能的情况,即 $B = \{1, 2, 4, 5\}$ 或 $B = \{1, 3, 4, 5\}$ 或 $B = \{2, 3, 4, 5\}$; 当集合 B 中的元素个数为5个时,集合 B 只能有一种可能的情况,即 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 综上所述,所有集合 B 的个数有8个。

【溯源】集合中考察集合个数问题的类型还包括有限集合的子集个数问题,其结论为:含 n 个元素的集合的子集个数为 2^n ,真子集个数为 $2^n - 1$ 。

案例5 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求 a, m 。

【探究】 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$ 。

$\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A. \therefore B$ 有四种可能: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ 。

【答案】 C

- 5 集合 $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y | y = 5 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cup N =$ _____。

【思路解析】这两个集合都是数集,要先求出元素的范围再正确求解。

$$M = \{y | y \geq 1\}, N = \{y | y \leq 5\}, \therefore M \cup N = \mathbb{R}.$$

【答案】 R

- 6 S 与 T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T$, 令 $Z = S \cap T$, 则 $S \cup Z$ 为 _____。

- A. Z B. T
C. $\emptyset$ D. S

【思路解析】可利用 Venn 图求解,也可按集合的交、并运算的性质求解,还可通过构造特殊的集合 S, T, Z 进行求解。

【答案】 D

- 7 全集 $U = \mathbb{N}$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则 _____。
- A. $U = A \cup B$
B. $(\complement_U A) \subseteq B$
C. $U = A \cup \complement_U B$
D. $\complement_U A \supseteq \complement_U B$

【思路解析】易知 $B \subsetneq A$, 图示如图 1-3-2:

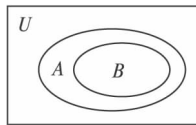


图 1-3-2

由图可知答案。

【答案】 C

- 8 已知 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 且 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ ($\mathbb{R}^+$ 表示正实数集), 求实数 p 的取值范围。

【答案】 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 即关于 x 的方程 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 无正实根。

(1) 若方程无实根, 则 $\Delta = (p+2)^2 - 4 < 0$, 即 $-4 < p < 0$, 此时满足条件。

(2) 若方程有实根, 但无正实根, 此时



$$\because x^2 - ax + a - 1 = (x-1)[x - (a-1)],$$

$\therefore$ 集合 B 中一定会有 1, 因而 $a-1=1$ 或 $a-1=2$.

$\therefore a=2$ 或 $a=3$. 又 $\because A \cap C = C, \therefore C \subseteq A$.

$\therefore C$ 有四种可能: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

(1) 若 $C = \emptyset$, 则方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的判别式 $\Delta = m^2 - 8 < 0$,

$$\therefore -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}.$$

(2) 若 $C = \{1\}$, 则方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 有两等根, 且均为 1,

$$\therefore \begin{cases} 1+1=m, \\ 1 \times 1=2 \end{cases} \text{ 不成立.}$$

(3) 若 $C = \{2\}$, 同理亦不成立.

$$(4) \text{ 若 } C = \{1, 2\} \text{ 则 } \begin{cases} 1+2=m, \\ 1 \times 2=2, \end{cases} \therefore m=3.$$

综上所述, $a=2$ 或 $a=3; m=3$ 或 $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

【溯源】 (1) 本题的解答是根据集合的“交”“并”的概念, 以及运用分类讨论思想来思考问题的.

$$(2) A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

(3) $C \subseteq A$ 时, 要注意 $C = \emptyset$ 的情况. 对于本题, 若忽略了这一点, 将会遗漏 $\Delta = m^2 - 8 < 0$ 的情况.

(4) 一元二次方程的解集是单元素集(元素有且只有一个)时, 用根与系数的关系处理最简捷; 也可将根代入原方程以及判别式为零求解, 切不可只将根代入求得. 例如 $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\} = \{1\}$ 时, 将 1 代入原方程可得 $m=3$, 虽然最后结果中有 $m=3$, 但在 $C = \{1\}$ 这个前提下, 该结论是错误的.

案例 6 某班对两条新制度 A、B 进行表决, 结果 A 以 90% 的得票率顺利通过, 而 B 却因得票 40% 未过半数被否决. 而且知道, 对 A、B 都投赞成票的学生是对 A、B 都投否决票的学生的 6 倍. 已知全班共 50 人, 并且不能弃权.

问单对 A 投赞成票和同时投 A、B 赞成票的学生各有多少人?

【探究】 赞成 A 的人数 $90\% \times 50 = 45$ 人, 赞成 B 的人数 $40\% \times 50 = 20$ 人.

设同时否决 A、B 的人数为 m 人, 则同时赞成 A、B 的人数为 $6m$ 人.

若设 $M = \{\text{赞成 A 的学生}\}, N = \{\text{赞成 B 的学生}\}$,

$$\text{则 } \text{card}(M \cup N) = \text{card}(M) + \text{card}(N) - \text{card}(M \cap N) = 45 + 20 - 6m = 65 - 6m.$$

由补集定义知 $\text{card}(M \cup N) + \text{card}(\complement_U(M \cup N)) = 50$, 即 $65 - 6m + m = 50$.

$$\therefore m=3, 6m=18. \therefore \text{单对 A 投赞成票的学生有 } 45 - 18 = 27 \text{ 人.}$$

同时赞成 A、B 的学生为 18 人.

【溯源】 解应用题关键是将自然语言转化为符号语言, 用集合语言来表达问题, 即建立起数学模型——求并集、补集、交集.

$$\begin{cases} \Delta = (p+2)^2 - 4 \geq 0, \\ x_1 x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 0, \\ \begin{cases} p^2 + 4p \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow p \geq 0. \\ -(p+2) \leq 2 \end{cases} \quad \text{即}$$

综合 (1) (2), 可知 p 的取值范围是 $p > -4$.

9 已知 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 2x + p = 0\}$ 且 $A \cap \{x \in \mathbf{R} | x > 0\} = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

【解】 $\because A \cap \{x \in \mathbf{R} | x > 0\} = \emptyset$, $\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2x + p = 0$ 无正根.

(1) 若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = 4 - 4p < 0$, 得 $p > 1$.

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A = \{x | x \leq 0\}$,

即方程 $x^2 + 2x + p = 0$ 的根都小于或等于 0.

设两根为 x_1, x_2 , 则

$$\begin{cases} \Delta = 4 - 4p \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -2 \leq 0 \\ x_1 x_2 = p \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore 0 \leq p \leq 1. \text{ 综上所述, } p \geq 0.$$

10 某班有学生 55 人, 其中音乐爱好者 34 人, 体育爱好者 43 人, 还有 4 人既不好体育也不好音乐, 则班级中既爱好体育又爱好音乐的有多少人?

【思路解析】 集合的元素个数的确定也是考查集合知识的一方面, 图示法可以使问题更加直观.

一般地, 对于两个集合 A 和 B , 记集合 A 的元素个数为 $\text{card}(A)$, 则

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

图示如图 1-3-3:

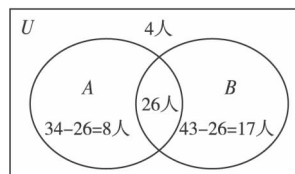


图 1-3-3

【答案】 26.



夯基达标

- 1 若 $A = \{1, 4, x\}$, $B = \{1, x^2\}$ 且 $A \cap B = B$, 则 $x =$ _____.
- 2 已知集合 $M = \{x | x \leq 1\}$, $P = \{x | x > t\}$, 若 $M \cap P \neq \emptyset$, 则实数 t 应该满足的条件是 _____ ()
A. $t > 1$ B. $t \geq 1$
C. $t < 1$ D. $t \leq 1$
- 3 集合 $A = \{a^2, a+1, -1\}$, $B = \{2a-1, |a-2|, 3a^2+4\}$, $A \cap B = \{-1\}$, 则 a 的值是 _____ ()
A. -1 B. 0 或 1
C. 2 D. 0
- 4 下列说法中正确的是 _____ ()
A. 任一集合必有真子集
B. 任一集合必有两个子集
C. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 A, B 之中至少有一个为空集
D. 若 $A \cap B = B$, 则 $B \subseteq A$
- 5 已知集合 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, 则 B 的子集最多可能有 _____ ()
A. 5 个 B. 6 个
C. 7 个 D. 8 个
- 6 已知 $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N$ 是 _____ ()
A. $\{0, 1\}$ B. $\{(0, 1)\}$
C. $\{1\}$ D. 以上答案均不对
- 7 设 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - px + 15 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 5x + q = 0\}$, 若 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$, A, B 分别为 _____ ()
A. $\{3, 5\}, \{2, 3\}$ B. $\{2, 3\}, \{3, 5\}$
C. $\{2, 5\}, \{3, 5\}$ D. $\{3, 5\}, \{2, 5\}$
- 8 已知全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$, $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, $C = \{x | -2 \leq x < 1\}$, 则 _____ ()
A. $C \subseteq A$ B. $C \subseteq \complement_U A$
C. $\complement_U B = C$ D. $\complement_U A = B$
- 9 如图 1-3-4, 阴影部分表示的集合是 _____ ()

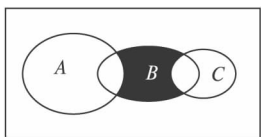


图 1-3-4

- A. $B \cap [\complement_U (A \cup C)]$
B. $(A \cup B) \cup (B \cup C)$
C. $(A \cup C) \cap (\complement_U B)$
D. $[\complement_U (A \cap C)] \cup B$

- 10 设全集 $U = \{x | x \leq 5, \text{ 且 } x \in \mathbb{N}_+\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$, 且 $(\complement_U A) \cup B = \{1, 4, 3, 5\}$, 求实数 p, q 的值.
- 11 设 A, B 是全集 U 的两个子集, 且 $A \subseteq B$, 则下列式子成立的是 _____ ()
A. $\complement_U A \subseteq \complement_U B$ B. $\complement_U A \cup \complement_U B = U$
C. $A \cap \complement_U B = \emptyset$ D. $\complement_U A \cap B = \emptyset$
- 12 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = (-5, 4)$, $B = [-2, 3]$, 则 $A \cap \complement_U B =$ _____.
- 13 设集合 $A = \{(x, y) | a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$, 则方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的解集为 _____, 方程 $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ 的解集为 _____.
- 14 设全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | 2x + 1 > 0\}$, 试用文字语言表述 $\complement_U A$ 的意义: _____.
- 15 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 且 $A = \{x | x^2 - 5x + m = 0, x \in U\}$, 若 $\complement_U A = \{1, 4\}$, 求 m 的值.

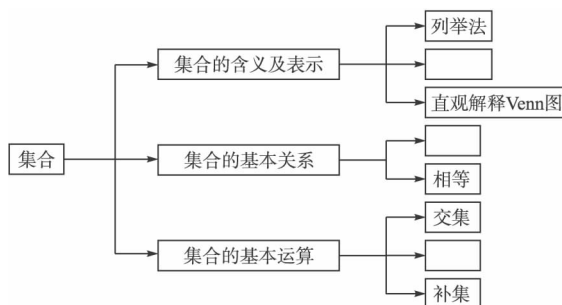
- 16 某班考试中, 语文、数学优秀的学生分别有 30 人、28 人, 语文、数学至少有一科优秀的学生有 38 人, 求:
(1) 语文、数学都优秀的学生人数;
(2) 仅数学成绩优秀的学生人数.



- 17 **2005 广东高考, 2** 若集合 $M = \{x \mid |x| \leq 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - 3x = 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
- A. $\{3\}$ B. $\{0\}$
C. $\{0, 2\}$ D. $\{0, 3\}$
- 18 **2004 天津高考, 1** 设集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$, 那么下列结论正确的是 ()
- A. $P \cap Q = P$ B. $P \cap Q \neq Q$
C. $P \cup Q = Q$ D. $P \cap Q \subsetneq P$
- 19 **2004 全国高考卷 I, 3** 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是 ()
- A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$
- 20 **2005 福建高考, 1** 已知集合 $P = \{x \mid |x-1| \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$, $Q = \mathbf{N}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()

- A. P B. Q C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

- 21 **2006 唐山调研, 11** 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合 A 的一个拆分, 并规定: 当且仅当 $A_1 = A_2$ 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种拆分, 则集合 $A = \{a_1, a_2\}$ 的不同拆分的种数为 ()
- A. 5 B. 7
C. 9 D. 10
- 22 定义集合 A, B 的一种运算: $A * B = \{x \mid x = x_1 + x_2, \text{ 其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A * B$ 中的所有元素数字之和为 ()
- A. 9 B. 14
C. 18 D. 21
- 23 **2005 北京西城抽样测试题** 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 5 - \sqrt{2}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$ 等于 ()
- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
C. $\{3, 4\}$ D. $\{4\}$



本章测评

- 1 下列各组对象: ①接近于 0 的数的全体; ②比较小的正整数全体; ③平面上到原点 O 的距离等于 1 的点的全体; ④三角形的全体; ⑤ $\sqrt{2}$ 的近似值的全体. 其中能构成集合的组数有 ()
- A. 2 组 B. 3 组 C. 4 组 D. 5 组
- 2 设 $U = \mathbf{R}$, $M = \{a \mid a = x + \sqrt{2}y, x, y \in \mathbf{Q}\}$, 则下列说法中正确的是 ()
- A. $M = \mathbf{Q}$ B. $M \subseteq \complement_U \mathbf{Q}$
C. $M \subsetneq \mathbf{Q}$ D. $M \neq \mathbf{Q}$
- 3 设 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{4\}$,

$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 3\}$, 则下列结论正确的是 ... ()

- A. $3 \notin A$ 且 $3 \notin B$ B. $3 \in A$ 且 $3 \notin B$
C. $3 \notin A$ 且 $3 \in B$ D. $3 \in A$ 且 $3 \in B$
- 4 以下四个关系: $\emptyset \in \{0\}$, $0 \in \emptyset$, $\{\emptyset\} \subseteq \{0\}$, $\emptyset \subsetneq \{0\}$, 其中正确的个数是 ()
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4
- 5 满足 $\{1, 2, 3\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数是 ... ()
- A. 8 B. 7
C. 6 D. 5



- 6 下列四个集合中, 是空集的是…………… ()

A. $\{x|x+3=3\}$
 B. $\{(x,y)|y^2=-x^2, x,y\in\mathbf{R}\}$
 C. $\{x|x^2\leq 0\}$
 D. $\{x|x^2-x+1=0\}$

- 7 集合 $A=\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{y|y=4k\pm 1, k\in\mathbf{Z}\}$, 则 A 与 B 的关系为…………… ()

A. $A\subseteq B$ B. $B\subseteq A$
 C. $A=B$ D. $A\neq B$

- 8 表示图形 1-1 中阴影部分的是 ()

A. $(A\cup C)\cap(B\cup C)$
 B. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$
 C. $(A\cup B)\cap(B\cup C)$
 D. $(A\cup B)\cap C$

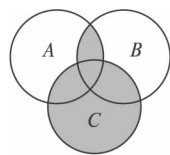


图 1-1

- 9 已知集合 A, B, C 为非空集合, $M=A\cap C$, $N=B\cap C$, $P=M\cup N$, 则…………… ()

A. $C\cap P=C$ B. $C\cap P=P$
 C. $C\cap P=C\cup P$ D. $C\cap P=\emptyset$

- 10 若集合 $\{(x,y)|x+y-2=0 \text{ 且 } x-2y+4=0\} \subsetneq \{(x,y)|y=3x+b\}$, 则 $b=$ _____.

- 11 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$ 至多有一个元素, 则 a 的取值范围是_____.

- 12 已知 $A=\{-2, -1, 0, 1\}$, $B=\{y|y=|x|, x\in A\}$, 则 $B=$ _____.

- 13 已知全集 $U=\{x|1<x<7\}$, $A=\{x|2\leq x<5\}$, $B=\{3\leq x<7\}$, 求 $\complement_U A$ 及 $\complement_U B$.

- 14 已知 $U=\{2, 3, a^2+2a-3\}$, $A=\{|a+1|, 2\}$, $\complement_U A=\{5\}$, 求实数 a 的值.

- 15 (1) $P=\{x|x^2-2x-3=0\}$, $S=\{x|ax+2=0\}$, $S\subseteq P$, 求 a 的取值;

- (2) $A=\{-2\leq x\leq 5\}$, $B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$, $B\subseteq A$, 求 m 的值.

- 16 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两个不相等实根为 α, β , 集合 $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{2, 4, 5, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cap C=A$, $A\cap B=\emptyset$, 求 p, q 的值.

