



第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

温故知新

新知预习

1. 按_____方向旋转形成的角叫做正角,按_____方向旋转形成的角叫做负角,如果_____,形成零角.
2. 在直角坐标系内讨论角,使角的顶点与_____重合,角的始边与_____重合,那么角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限角.
3. 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S =$ _____.

知识回顾

知识链接

在初中我们学习过角的概念,它是这样定义的:角可以看成平面内一条射线绕着端点,从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

生活链接

在体操中我们经常听到这样的动作名称:“转体 720° ”(即转体 2 周)“转体 $1\ 080^\circ$ ”(即转体 3 周),说明角的概念可以进一步推广.

互动课堂

疏导引导

1. 角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.如图 1-1-1.

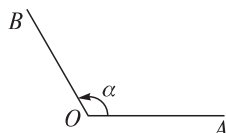


图 1-1-1

2. 角的概念的推广

按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成一个零角.如图 1-1-2 中的角是一个

活学巧用

- 1 下列各命题正确的是 ()
- A. 终边相同的角一定相等
 - B. 第一象限角都是锐角
 - C. 锐角都是第一象限角
 - D. 小于 90° 的角都是锐角

解析: 可根据各种角的定义,利用排除法予以解答.对于 A, -60° 和 300° 是终边相同的角,它们并不相等,应排除 A.

对于 B, 390° 是第一象限角,可它不是锐角,应排除 B.

对于 D, -60° 是小于 90° 的角,但它不是锐角,

$\therefore$ 应排除 D.

综上,应选 C.

答案: C





正角,等于 750° ,图 1-1-3 中,正角 $\alpha = 210^\circ$,负角 $\beta = -150^\circ$, $\gamma = -660^\circ$.

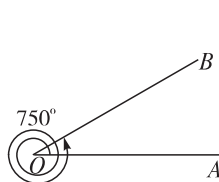


图 1-1-2

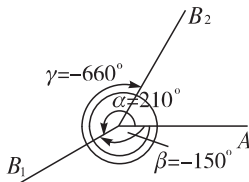


图 1-1-3

3. 在直角坐标系内讨论角

象限角:当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴正半轴重合,如果角的终边在第几象限,就把这个角叫做第几象限角.

4. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示为角 α 与整数个周角的和.

5. 几个重要的角的集合

(1) 象限角的集合

第一象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

第二象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, 90^\circ < \beta < 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

第三象限角的集合为 $\{\alpha | 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, 180^\circ < \beta < 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

第四象限角的集合为 $\{\alpha | 270^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 360^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, 270^\circ < \beta < 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 几种特殊角的集合

终边落在 x 轴正半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 x 轴负半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 y 轴正半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 y 轴负半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 $y = x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 $y = -x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 $y = \pm x$ 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

2 (1) 已知 $-990^\circ < \alpha < -630^\circ$, 且 α 与 120° 角的终边相同, 则 $\alpha =$ _____.

(2) 在 -720° 到 720° 之间与 -1050° 角终边相同的角是 _____.

解析: (1) $\because \alpha$ 与 120° 角终边相同,

故有 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

又 $\because -990^\circ < \alpha < -630^\circ$,

$\therefore -990^\circ < k \cdot 360^\circ + 120^\circ < -630^\circ$, 即 $-1110^\circ < k \cdot 360^\circ < -750^\circ$.

当 $k = -3$ 时, $\alpha = (-3) \cdot 360^\circ + 120^\circ = -960^\circ$.

(2) 与 1050° 角终边相同的所有的角可表示为 $\alpha = k \cdot 360^\circ + (-1050^\circ), k \in \mathbb{Z}$,

依题意得 $-720^\circ < k \cdot 360^\circ - 1050^\circ < 720^\circ$,

解得 $\frac{11}{12} < k < 4 \frac{11}{12}$, $\therefore k = 1, 2, 3, 4$.

所求的角为 $1 \times 360^\circ - 1050^\circ = -690^\circ$,

$2 \times 360^\circ - 1050^\circ = -330^\circ$, $3 \times 360^\circ - 1050^\circ = 30^\circ$,

$4 \times 360^\circ - 1050^\circ = 390^\circ$.

答案: (1) -960° (2) $-690^\circ, -330^\circ, 30^\circ, 390^\circ$

3 已知 α 是第一象限角, 试确定 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

解析: $\because \alpha$ 是第一象限角,

$\therefore 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 则 $k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

当 $k = 2n$ 时, $2n\pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{\pi}{4}$,

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角.

当 $k = 2n + 1$ 时, $2n\pi + \pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$,

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

答案: 第一象限或第三象限角.

点评: 已知 α 是第 m 象限角 ($m = 1, 2, 3, 4$), 求 $\frac{\alpha}{n}$ 角所在象限的问题, 用“等分象限法”处理较好, 先将各象限分成几等份, 然后从 x 轴正方向上方第一个区域开始, 按逆时针方向依次标上 $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots$, 周而复始, 直至填完所有区域, 出现数字 m 的区域即为所求, 例如: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别是第

一、二、三、四象限角, 则 $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_4}{2}$ 分布如图 1-1-4.

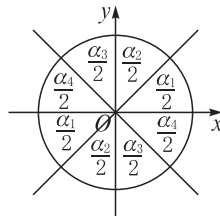


图 1-1-4





主动成长



夯基达标

- 1 下列各角:① -120° ;② -240° ;③ 180° ;④ 490° . 其中属于第二象限的角是 ()
A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②④
- 2 下列各组角中,终边相同的角是..... ()
A. 390° 与 690° B. -330° 与 750°
C. 480° 与 -420° D. 300° 与 -840°
- 3 终边在第二象限的角的集合是 ()
A. $(90^\circ, 180^\circ)$
B. $[90^\circ, 180^\circ]$
C. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
D. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- 4 在下列各组的两个角中,终边不相同的一组是 ... ()
A. 130° 或 490° B. 180° 或 -180°
C. 90° 或 900° D. -32° 或 688°
- 5 下列命题中正确的是 ()
A. 第一象限的角必是锐角
B. 终边相同的角必相等
C. 相等角的终边位置必相同
D. 不相等的角终边位置必不相同
- 6 α 的终边经过点 $M(0, -3)$,则 α ()
A. 是第三象限角
B. 是第四象限角
C. 既是第三象限又是第四象限角
D. 不是任何象限角
- 7 在 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 中,与 -510° 角的终边相同的角为 ()
A. 150° B. 210°
C. 30° D. 330°
- 8 集合 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$,则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{-36^\circ, 54^\circ\}$
B. $\{-126^\circ, 144^\circ\}$
C. $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$
D. $\{-126^\circ, 54^\circ\}$
- 9 若 α 的终边在第二象限的角平分线上,则 α 的集合为 _____.

- 10 设 α 是第三象限角,试讨论 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的平面区域,并在直角坐标平面上把它们表示出来.

- 11 已知 $0^\circ < \theta < 360^\circ$, θ 角的7倍角的终边和 θ 角的终边重合,求角 θ .



走近高考

- 12 (经典回放) 集合 $A = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $B = \{\beta | \beta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}\}$ 的关系是 ()
A. $A \subsetneq B$ B. $A \supsetneq B$
C. $A = B$ D. $A \subseteq B$





轻轻告诉你 经一番挫折,长一番识见。——申涵光

1.1.2 弧度制



温故知新



新知预习

1. 角度制:用_____作单位来度量角的制度叫角度制.
2. 弧度制:以_____为单位来度量角的制度叫弧度制.
3. 1 弧度:长度等于_____的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 弧度记作_____.
4. 角度与弧度之间的互化
 $360^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}, 180^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}, 1^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad}.$
 $2\pi \text{ rad} = \underline{\hspace{2cm}}, \pi \text{ rad} = \underline{\hspace{2cm}}, 1 \text{ rad} = (\underline{\hspace{2cm}})^\circ \approx \underline{\hspace{2cm}}.$



知识回顾

1. 在初中,我们都说这个角大小为 30° 或 90° ,使用角度制来度量角. 1 度是这样定义的,把圆周 360 等分,则其中 1 份所对的圆心角是 1 度. 并且角度制规定 60 分等于 1 度,60 秒等于 1 分.
2. 在初中,我们还学过弧长公式与扇形的面积公式,它们分别为 $l = \frac{n\pi r}{180}, s = \frac{n\pi r^2}{360}$.



互动课堂



疏导引导

1. 度量角的单位制:角度制、弧度制

(1) 角度制

初中学过角度制,它是一种重要的度量角的制度. 规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度角,记作 1° ,用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制.

(2) 弧度制

规定长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 以弧度为单位来度量角的制度叫做弧度制;在弧度制下,1 弧度记作 1 rad.

如图 1-1-6, $\widehat{AB}$ 的长等于半径 r , $\widehat{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角,即 $\frac{l}{r} = 1$.

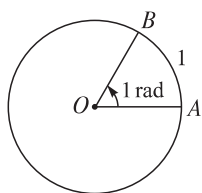


图 1-1-6



活学巧用

- 1 下列诸命题中,假命题是 ()
 A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位
 B. 一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$,一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$
 C. 根据弧度的定义, 180° 一定等于 π 弧度
 D. 不论用角度制还是用弧度制度量角,它们与圆的半径长短有关

解析: A、B、C 都正确. 1 弧度等于半径长的圆弧所对的圆心角(或弧)的大小,而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或弧)的大小.

因此不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

答案: D

- 2 圆弧长度等于其内接正三角形边长,则其圆心角的弧度数为 ()
 A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

解析: 设圆半径为 r ,则其内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}r$, $\therefore \theta =$





(3) 弧度数

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是0.如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l ,那么角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

这里, α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

2. 弧长公式与扇形的面积公式

(1) 设 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长, r 是圆的半径,则有 $l = |\alpha| \cdot r$.

其中 α 是角的弧度数.

(2) 扇形面积公式

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\alpha \cdot r^2.$$

3. 角度与弧度之间的互化

(1) 将角度化为弧度

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, 180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

(2) 将弧度化为角度

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ, \pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

(3) 弧度制与角度制的换算公式

设一个角的弧度数为 α ,角度数为 n° ,则 $\alpha(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ$,

$$n^\circ = n \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

(4) 一些特殊角的度数与弧度数的对应表.

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
度	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	360°
弧度	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

5. 角度制与弧度制的比较

(1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度.

(2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或弧)的大小,而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或弧)的大小.

(3) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

(4) 用弧度为单位表示角的大小时,“弧度”两字可以省略不写.如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2 \text{ 弧度})$, $\pi = 180^\circ$ 是指 π 弧度 $= 180^\circ$;但如果以度($^\circ$)为单位表示角时,度($^\circ$)就不能

$$\frac{\sqrt{3}r}{r} = \sqrt{3}.$$

答案:C

3 一个扇形的面积为1,周长为4,则中心角的弧度数为_____.

解析:设扇形的半径为 r ,弧长为 l ,则 $2r + l = 4$, $\therefore l = 4 - 2r$.

$$\text{根据扇形面积公式 } S = \frac{1}{2}lr \text{ 得 } 1 = \frac{1}{2}(4 - 2r) \cdot r.$$

$$\therefore r = 1, \therefore l = 2. \therefore |\alpha| = \frac{l}{r} = \frac{2}{1} = 2. \therefore \alpha = \pm 2.$$

答案: ± 2

4 (1) 把 $112^\circ 30'$ 化成弧度(精确到0.001).

(2) 把 $112^\circ 30'$ 化成弧度(用 π 表示).

(3) 把 $-\frac{5\pi}{12}$ 化成度.

解析:(1) ① $n = 112^\circ 30'$, $\pi = 3.1416$; ② $n = 112 \frac{30}{60} = 112.5$;

$$\text{③ } \alpha = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175; \text{④ } \alpha = na = 1.96875. \therefore \alpha \approx 1.969 \text{ rad}.$$

$$(2) 112^\circ 30' = \left(\frac{225}{2}\right)^\circ = \frac{225}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{8}.$$

$$(3) -\frac{5\pi}{12} = -\left(\frac{5\pi}{12} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -75^\circ.$$

答案:(1) 1.969 rad; (2) $\frac{5\pi}{8}$; (3) -75° .

5 集合 $A = \{\alpha | \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha | \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

的关系是_____ ()

A. $A = B$

B. $A \subseteq B$

C. $A \supseteq B$

D. 以上都不对

解析:对于集合 A ,当 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$ 时, $\alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{当 } k = 2n - 1 \text{ 时, } \alpha = (2n - 1)\pi + \frac{\pi}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}. \therefore A = B.$$

答案:A

7 将下列弧度制表示的角化为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0, 2\pi))$ 的形式,并指出它们所在的象限.

$$(1) -\frac{15\pi}{4}; (2) \frac{32\pi}{3}; (3) -20; (4) -2\sqrt{3}.$$

解析:对于含有 π 的弧度数表示的角,我们先将它化为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z}, |\alpha| \in [0, 2\pi))$ 的形式,再根据 α 角终边所在位置进行判断.对于不含有 π 的弧度数表示的角,取 $\pi = 3.14$,化为 $k \times 6.28 + \alpha, k \in \mathbb{Z}, |\alpha| \in [0, 6.28)$ 的形式,通过 α 与 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 比较,估算出角所在象限.

答案:(1) $-\frac{15\pi}{4} = -4\pi + \frac{\pi}{4}$,是第一象限角;(2) $\frac{32\pi}{3} = 10\pi + \frac{2\pi}{3}$,是第二象限角;(3) $-20 = -3 \times 6.28 - 1.16$,是第

四象限角;(4) $-2\sqrt{3} \approx -3.464$,是第二象限角.



轻轻告诉你 失败者成功之母。——毛泽东

省去.

(5) 角的概念推广以后, 无论用角度制还是用弧度制都能在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应的关系, 每一个角都有唯一的一个实数与它对应; 反过来, 每一个实数也都有唯一的一个角与它对应.

8 若 α 是第四象限角, 则 $\pi - \alpha$ 是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

解析: $\because \alpha$ 为第四象限角, $\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

$$\therefore -2k\pi < -\alpha < -2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\therefore -2k\pi + \pi < \pi - \alpha < -2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}).$$

$\therefore \pi - \alpha$ 是第三象限角.

答案: C



主动成长



夯基达标

1 终边在第一、四象限的角的集合可表示为 ()

- A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
B. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbf{Z}$
C. $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
D. $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi) \cup (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbf{Z}$

2 把 -1485° 写成 $2k\pi + \alpha (0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbf{Z})$ 的形式是 ()

- A. $-8\pi + \frac{\pi}{4}$ B. $-8\pi - \frac{7\pi}{4}$
C. $-10\pi - \frac{\pi}{4}$ D. $-10\pi + \frac{7\pi}{4}$

3 $-\frac{29\pi}{12}$ 所在的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

4 集合 $M = \{x | x = (3k - 2)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{y | y = (3\lambda + 1)\pi, \lambda \in \mathbf{Z}\}$, $S = \{y | y = (6m + 1)\pi, m \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 ()

- A. $S \subsetneq P \subsetneq M$ B. $S = P \subsetneq M$
C. $S \subsetneq P = M$ D. $S \supsetneq P = M$

5 已知圆上的一段弧长等于该圆的内接正方形的边长, 则这段弧所对的圆周角的弧度数为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

6 已知集合 $A = \{x | 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 为 ()

- A. $\emptyset$
B. $\{x | -4 \leq x \leq \pi\}$

$$C. \{x | 0 \leq x \leq \pi\}$$

$$D. \{x | -4 \leq x \leq -\pi\} \text{ 或 } \{x | 0 \leq x \leq \pi\}$$

7 已知扇形的半径为 r , 若它的周长等于弧所在的半圆的长, 则扇形的圆心角为 _____ 弧度, 扇形的面积为 _____.

8 在 1 点 15 分时, 时针与分针所成的最小正角是多少弧度?

9 已知扇形的周长为 30 cm, 当它的半径和圆心角各取什么值时, 才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?

10 半径为 R 的扇形, 其周长为 $4R$, 则扇形中所含弓形的面积是多少?



走近高考

11 2004 浙江高考 点 P 从 $(1, 0)$ 出发, 沿单位圆 $x^2 + y^2 =$

1 按逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点, 则 Q 的坐标为

..... ()

- A. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$





1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数



温故知新



新知预习

1. 如图 1-2-1, 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么

(1) _____ 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) _____ 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) _____ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

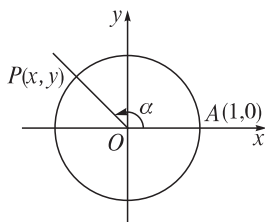


图 1-2-1

2. 三角函数在各象限的符号.

$\sin\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 α 是 _____ 角限时, $\sin\alpha > 0$; 当 α 是 _____ 象限时, $\sin\alpha < 0$.

$\cos\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 α 是 _____ 象限时, $\cos\alpha > 0$; 当 α 是 _____ 象限时, $\cos\alpha < 0$.

$\tan\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 α 是 _____ 象限时, $\tan\alpha > 0$; 当 α 是 _____ 象限时, $\tan\alpha < 0$.



知识回顾

1. 在初中, 我们学习过锐角三角函数的定义, 即射线 OP 在第一象限, $P(x, y)$ 是该射线上任意一点, $MP \perp Ox$ 于 M , 记 $\angle MOP = \alpha$, 则 $OM = x$, $MP = y$, $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$. 根据锐角三角函数的定义知 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.

2. 函数的三要素为定义域、对应法则、值域.



互动课堂



疏导引导

1. 任意角三角函数的定义

设 $P(a, b)$ 是角 α 的终边与单位圆的交点, 由 P 向 x 轴引垂线, 垂足为 M .

根据锐角三角函数的定义得

$$\sin\alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = b, \cos\alpha = \frac{|OM|}{|OP|} = a, \tan\alpha = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{b}{a}.$$

同样的道理, 我们也可以利用单位圆来定义任意角的三角函数. 如图 1-2-2, 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么



活学巧用

① 已知角 α 的终边经过点 $P(3a, -4a) (a \neq 0)$, 求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$.

解析: $x = 3a, y = -4a$,

$$\therefore r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = 5|a| (a \neq 0).$$

(1) 当 $a > 0$ 时, $r = 5a$, α 是第四象限角.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}, \tan\alpha =$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}.$$



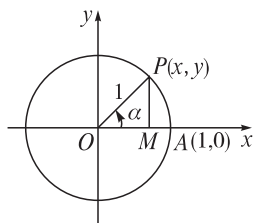


图 1-2-2

- (1) y 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = y$.
 (2) x 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = x$.
 (3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.

2. 三角函数线

设单位圆的圆心与坐标原点重合, 则单位圆与 x 轴的交点分别为 $A(1, 0)$ 、 $A'(-1, 0)$, 与 y 轴的交点分别为 $B(0, 1)$ 、 $B'(0, -1)$. 设角 α 的顶点在圆心 O , 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边与单位圆相交于点 P (如图 1-2-3(a)), 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴于 M , 则点 M 是点 P 在 x 轴上的正射影 (简称射影), 由三角函数的定义可知点 P 的坐标为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, 即 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

其中 $\cos\alpha = OM$, $\sin\alpha = MP$. 这就是说角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的横坐标和纵坐标. 又设单位圆在点 A 的切线与 α 的终边或其反向延长线相交于点 $T(T')$ (图 1-2-3(b)), 则 $\tan\alpha = AT(AT')$.

我们把轴上向量 $\overrightarrow{OM}$ 、 $\overrightarrow{MP}$ 、 $\overrightarrow{AT}(AT')$ 叫做 α 的余弦线、正弦线、正切线.

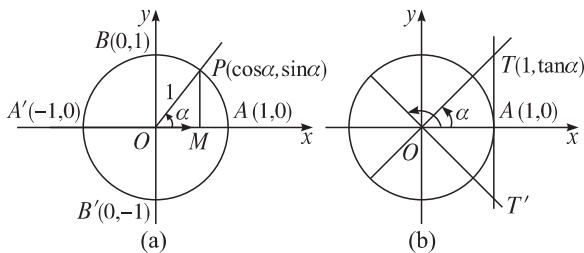


图 1-2-3

3. 三角函数在各象限的符号

由三角函数的定义以及各象限内的点的坐标的符号, 可以确定三角函数的符号.

$\sin\alpha = y$, 于是 $\sin\alpha$ 的符号与 y 的符号相同, 即当 α 是第一、二象限的角时, $\sin\alpha > 0$; 当 α 是第三、四象限的角时, $\sin\alpha < 0$.

$\cos\alpha = x$, 于是 $\cos\alpha$ 的符号与 x 的符号相同, 即当 α 是第一、四象限角时, $\cos\alpha > 0$; 当 α 是第二、三象限的角时, $\cos\alpha < 0$.

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$, 当 x 与 y 同号时, 它们的比值为正, 当 x 与 y 异号时, 它们的比值为负, 即当 α 是第一、三象限角时, $\tan\alpha > 0$; 当 α 是第二、四象限角时, $\tan\alpha < 0$.

(2) 当 $a < 0$ 时, $r = -5a$, α 是第二象限角,

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = -\frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}.$$

答案: $\sin\alpha = \pm \frac{4}{5}, \cos\alpha = \pm \frac{3}{5}, \tan\alpha = -\frac{4}{3}.$

- 2 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 终边的范围, 并由此写出角 α 的集合.

(1) $\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$.

解析: 作出满足 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = -\frac{1}{2}$ 的角的终边, 然后根据已知条件确定出角 α 终边的范围.

(1) 作直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 交单位圆于 A, B 两点, 连结 OA, OB , 则 OA 与 OB 围成的区域 (如图 1-2-4 阴影部分) 即为角 α 的终边的范围, 故满足条件的角 α 的集合为 $\{\alpha | 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 作直线 $x = -\frac{1}{2}$ 交单位圆于 C, D 两点, 连结 OC 与 OD , 则 OC 与 OD 围成的区域 (如图 1-2-5 阴影部分) 即为角 α 终边的范围.

故满足条件的角 α 的集合为 $\{\alpha | 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

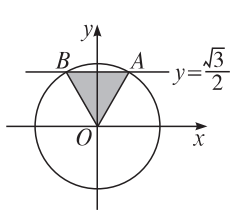


图 1-2-4

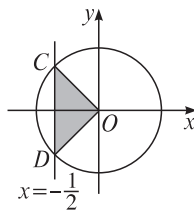


图 1-2-5

- 3 确定下列三角函数值的符号.

(1) $\cos 250^\circ$; (2) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; (3) $\tan(-672^\circ)$; (4) $\tan \frac{11\pi}{3}$.

解析: (1) $\because 250^\circ$ 是第三象限角, $\therefore \cos 250^\circ < 0$.

(2) $\because -\frac{\pi}{4}$ 是第四象限角, $\therefore \sin(-\frac{\pi}{4}) < 0$.

(3) $\because -672^\circ = -2 \times 360^\circ + 48^\circ$, 而 48° 是第一象限角, $\therefore -672^\circ$ 是第一象限角. $\therefore \tan(-672^\circ) > 0$.

(4) $\because \frac{11\pi}{3} = 2\pi + \frac{5\pi}{3}$, 而 $\frac{5\pi}{3}$ 是第四象限角,

$\therefore \frac{11\pi}{3}$ 是第四象限角. $\therefore \tan \frac{11\pi}{3} < 0$.

答案: (1) $-$; (2) $-$; (3) $+$; (4) $-$.

- 4 若 $\sin\theta\cos\theta > 0$, 则 θ 在 ()

- A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第一、四象限 D. 第二、四象限



规律总结:记忆三角函数值在各象限的符号的方法很多,下面介绍一种利用口诀“一全正、二正弦、三正切、四余弦”.上述口诀表示,第一象限全是正值,第二象限正弦是正值,第三象限正切是正值,第四象限余弦是正值.

4. 公式一

由三角函数的定义可知,终边相同的角的同一三角函数值相等,由此得一组公式.(公式一)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha \\ \tan(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \tan \alpha \\ k &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

利用公式一,可以把求任意角的三角函数值转化为求 0 到 2π 角的三角函数值.

解析:由 $\sin\theta\cos\theta>0$ 可知 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 同号,若 $\sin\theta>0, \cos\theta>0$,则 θ 在第一象限;若 $\sin\theta<0, \cos\theta<0$,则 θ 在第三象限.

$\therefore \theta$ 在第一、三象限.

答案:B

5 确定下列三角函数值的符号.

(1) $\cos \frac{21\pi}{5}$; (2) $\sin(-760^\circ)$; (3) $\tan \frac{7\pi}{3}$.

解析:(1) $\because \cos \frac{21\pi}{5} = \cos(\frac{\pi}{5} + 4\pi) = \cos \frac{\pi}{5}$, 而 $\frac{\pi}{5}$ 是第一象限角, $\therefore \cos \frac{21\pi}{5} > 0$.

(2) $\because \sin(-760^\circ) = \sin(-40^\circ - 2 \times 360^\circ) = \sin(-40^\circ)$, 而 -40° 是第四象限角, $\therefore \sin(-760^\circ) < 0$.

(3) $\because \tan \frac{7\pi}{3} = \tan(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \tan \frac{\pi}{3}$, 而 $\frac{\pi}{3}$ 是第一象限角, $\therefore \tan \frac{7\pi}{3} > 0$.



主动成长



夯基达标

- 角 α 的终边上有一点 $P(a, a)$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$), 则 $\cos \alpha$ 的值是 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1
- 已知 $|\cos \theta| = \cos \theta$, $|\tan \theta| = -\tan \theta$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 的终边在 ()
A. 第二、四象限
B. 第一、三象限
C. 第二、四象限或 x 轴上
D. 第一、三象限或 x 轴上
- 已知 $P(x, 4)$ 是角 θ 终边上一点且 $\tan \theta = -\frac{2}{5}$, 则 x 的值为 ()
A. 10 B. $\frac{4}{5}$ C. -10 D. $-\frac{1}{5}$
- 已知 $\cos \alpha = m$, $0 < |m| < 1$, 且 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$, 则 α 在 ()
A. 第一或第二象限 B. 第三或第四象限
C. 第一或第四象限 D. 第二或第三象限
- 若角 α 的终边过点 $P(3\cos \theta, -4\cos \theta)$ (θ 为第二象限角), 则 $\sin \alpha =$
- 若 $\tan \theta = -2$, 则 $\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + 2 =$

- 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} + \lg(9-x^2)}{\sqrt{\cos x}}$ 的定义域.

- 角 α 的终边上存在一点 $P(-\frac{4}{5m}, \frac{3}{5m})$, 且 $\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha} < 0$, 求 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的值.



走近高考

- 2004 辽宁高考** 若 $\cos \theta > 0$, 且 $\sin 2\theta < 0$, 则角 θ 的终边所在的象限是 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
- (经典回放)** 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第 _____ 象限.



轻轻告诉你

不经风雨，长不成大树；不受百炼，难以成钢。——雷锋

1.2.2 同角三角函数的基本关系



温故知新



新知预习

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$ _____.

2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$ _____.



知识回顾

前面我们学过在单位圆中讨论任意角的三角函数， $\sin \alpha = y$ ， $\cos \alpha = x$ ， $\tan \alpha =$

$\frac{y}{x}$.



互动课堂



疏导引路

同角三角函数基本关系

如图 1-2-6 中，以正弦线 MP ，余弦线 OM 和半径 OP 三者的长构成直角三角形，而且 $OP=1$ ，由勾股定理有 $OM^2 + MP^2 = 1$ ，即 $x^2 + y^2 = 1$ ，所以 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 。

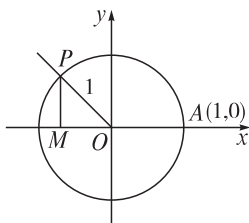


图 1-2-6

根据三角函数的定义，当 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时，有

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

疑难疏引 把 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的两边同除以 $\cos^2 \alpha$ 得 $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ 。

由 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 变形得 $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$ 。



活学巧用

① 已知 $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ，求 $\sin \alpha$ ， $\tan \alpha$ 的值。

解析： $\because \cos \alpha < 0$ ，且 $\cos \alpha \neq -1$ ，
 $\therefore \alpha$ 是第二或第三象限角。

如果 α 是第二象限角，那么 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$
 $\sqrt{1 - (-\frac{8}{17})^2} = \frac{15}{17}$ ，

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{15}{17} \times (-\frac{17}{8}) = -\frac{15}{8}.$$

如果 α 是第三象限角，那么 $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ ， $\tan \alpha = \frac{15}{8}$ 。

答案： $\sin \alpha = \pm \frac{15}{17}$ ， $\tan \alpha = \pm \frac{15}{8}$ 。

② 已知 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$ ，且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值是 _____。

解析： $\because \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \cos \alpha - \sin \alpha > 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{又 } (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 1 - 2 \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}, \therefore \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

答案： $\frac{1}{2}$





主动成长



夯基达标

- 1 下列函数式同时成立的是 ()

A. $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{2}$
 B. $\sin\theta = 0.35, \cos\theta = 0.65$
 C. $\cos\theta = 0, \sin\theta = -1$
 D. $\sin\theta = \cos\theta = 1$

- 2 若 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 ()

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\pm\frac{3}{4}$ D. $\pm\frac{4}{3}$

- 3 已知 $\alpha \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, 且 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $\sin\alpha - \cos\alpha$ 的值是 ()

A. $\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$
 C. $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

- 4 若 $\tan\alpha = t (t \neq 0)$, 且 $\sin\alpha = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}$, 则 α 在 ()

A. 第一、二象限 B. 第二、三象限
 C. 第三、四象限 D. 第一、四象限

- 5 若 $\frac{1+\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

- 6 设 $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 等于 ()

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\pm\frac{4}{3}$ D. $\pm\frac{3}{4}$

- 7 已知 $\cos\theta = \frac{4}{5}$, 且 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, 那么 $\frac{1}{\tan\theta}$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

- 8 如果 $\tan\theta = 2$, 那么 $1 + \sin\theta\cos\theta$ 的值为 ()

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{7}{5}$ D. $\frac{7}{3}$

- 9 化简 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 的结果是 ()

A. 89 B. $\frac{89}{2}$ C. 45 D. $\frac{45}{2}$

- 10 若 $\tan\theta = -1$, 则 $\sin\theta - \cos\theta =$

- 11 求证: $\frac{3 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{2\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha + \sin^2\alpha$.

- 12 一束光线以 45° 的入射角穿过折射率为 1.5, 厚度为 1 cm 的一块玻璃, 那么光线在玻璃内的行程是多少? (折射率 $= \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, 其中 α 为入射角, β 为折射角)



走近高考

- 13 2006 重庆高考 已知 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 $\tan\alpha =$

- 14 2005 湖北高考 若 $\sin\alpha + \cos\alpha = \tan\alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 α 属于 ()

A. $(0, \frac{\pi}{6})$ B. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$
 C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

- 15 2006 福州质检 已知 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} (\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$, 则 $\tan\alpha =$

- 16 2006 武汉模拟 已知 $\tan\alpha = 3$, 则 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$





轻轻告诉你 失败本身包含着胜利。——恩格斯

1.3 三角函数的诱导公式



温故知新



新知预习

诱导公式	公式(2)	$\sin(\pi+\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos(\pi+\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\tan(\pi+\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$
	公式(3)	$\sin(-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos(-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\tan(-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$
	公式(4)	$\sin(\pi-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos(\pi-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\tan(\pi-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$
	公式(5)	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$
	公式(6)	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$



知识回顾

1. 在任意角的三角函数中, 我们学过公式一:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \sin\alpha, \\ \cos(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \cos\alpha, \\ \tan(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \tan\alpha, \\ \text{其中 } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2. 在初中, 我们知道一些锐角的三角函数值.

$$\begin{aligned}\text{例如: } \sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \\ \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ \tan 60^\circ &= \sqrt{3} \text{ 等}.\end{aligned}$$



互动课堂



疏导引导

1. 角 α 与 $\pi+\alpha$ 的三角函数关系

如图 1-3-1, 设任意角 α 的终边与单位圆的交点坐标为 $P_1(x, y)$, 由于角 $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于原点对称, 角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P_2 与点 P_1 关于原点 O 对称, 因此 P_2 的坐标是 $(-x, -y)$, 由三角函数的定义得

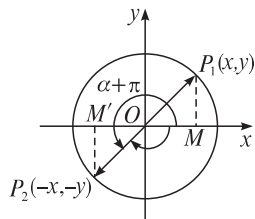


图 1-3-3



活学巧用

① 求下列各三角函数值.

$$(1) \sin(-\frac{19\pi}{3}); (2) \cos(-\frac{37\pi}{6}); (3) \tan(-405^\circ).$$

解析: 可先利用公式(二)把负角的三角函数转化成正角的三角函数, 再利用公式(一)把绝对值大于 2π (或 360°) 的角的三角函数转化成绝对值小于 2π (或 360°) 的角的三角函数去求值.

$$(1) \text{方法一: } \sin(-\frac{19\pi}{3}) = -\sin \frac{19\pi}{3} = -\sin(\frac{\pi}{3} + 6\pi) =$$



$$\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -y, \cos(\pi + \alpha) = -x, \tan(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}.$$

从而得公式(二)

$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$$

2. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数关系

如图 1-3-2, 设单位圆与角 α , 角 $(-\alpha)$ 的终边的交点分别为 P_1 和 P_2 , 容易看出点 P_1 和 P_2 关于 x 轴对称, 已知点 P_1 的坐标为 (x, y) , 则 P_2 的坐标为 $(x, -y)$. 由三角函数的定义得 $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x}, \sin(-\alpha) = -y,$

$$\sin(-\alpha) = -y, \tan(-\alpha) = -\frac{y}{x}.$$

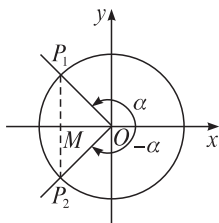


图 1-3-2

∴ 公式(三)

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \end{cases}$$

3. 角 α 与 $\pi - \alpha$ 的三角函数关系

如图 1-3-3, 设单位圆与角 α , 角 $\pi - \alpha$ 的终边的交点分别为 P_1 和 P_2 , 则 P_1, P_2 关于 y 轴对称, 已知 $P_1(x, y)$, 则 P_2 的坐标为 $(-x, y)$, 由三角函数的定义得 $\sin(\pi - \alpha) = y, \cos(\pi - \alpha) = -x, \tan(\pi - \alpha) = -\frac{y}{x}.$

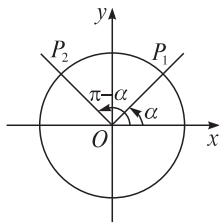


图 1-3-3

∴ 公式(四)

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases}$$

4. 角 α 与 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的三角函数关系

如图 1-3-4, 设任意角 α 与单位圆的交点 $P_1(x, y)$, 由于角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的终边与角 α 的终边关于直线 $y = x$ 对称, 角

$$-\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{方法二: } \sin(-\frac{19\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3} - 6\pi)$$

$$= \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \cos(-\frac{37\pi}{6}) = \cos \frac{37\pi}{6} = \cos(\frac{\pi}{6} + 6\pi) =$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(-\frac{37\pi}{6}) = \cos(-\frac{\pi}{6} - 6\pi) = \cos(-\frac{\pi}{6}) =$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(3) \tan(-405^\circ) = -\tan 405^\circ = -\tan(45^\circ + 360^\circ) = -\tan 45^\circ = -1;$$

$$\tan(-405^\circ) = \tan(-45^\circ - 360^\circ) = \tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1.$$

2 求下列三角函数式的值.

$$(1) \sin 495^\circ \cdot \cos(-675^\circ);$$

$$(2) \sqrt{3} \sin(-1200^\circ) \cdot \tan(-\frac{\pi}{6}) - \cos 585^\circ \cdot \tan(-\frac{37\pi}{4}).$$

解析: (1) $\sin 495^\circ \cdot \cos(-675^\circ)$

$$= \sin(135^\circ + 360^\circ) \cdot \cos 675^\circ$$

$$= \sin 135^\circ \cdot \cos 315^\circ$$

$$= \sin(180^\circ - 45^\circ) \cdot \cos(360^\circ - 45^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \sqrt{3} \sin(-1200^\circ) \cdot \tan(-\frac{\pi}{6}) - \cos 585^\circ \cdot$$

$$\tan(-\frac{37\pi}{4})$$

$$= -\sqrt{3} \sin 120^\circ \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) - \cos(720^\circ - 135^\circ) \cdot$$

$$\tan(-8\pi - \frac{5\pi}{4})$$

$$= \sin(1080^\circ + 120^\circ) - \cos 135^\circ \cdot \tan(-\frac{5\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (-1)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{答案: (1) } \frac{1}{2}; (2) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

3 已知 $\sin \alpha$ 是方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根, 求 $[\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) \cdot$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \tan^2(2\pi - \alpha) \cdot \tan(\pi - \alpha)] \div [\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)] \text{ 的值.}$$



轻轻告诉你 你不走错路,就不会懂得事理。——歌德《浮士德》

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P_2 与 P_1 关于直线 $y=x$ 对称,因此点 P_2 的坐标为 (y, x) , 于是有 $\cos\alpha = x, \sin\alpha = y$,
 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = y, \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = x$.

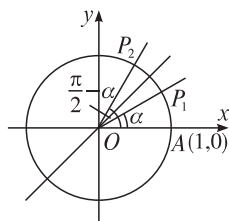


图 1-3-4

∴ 公式(五)

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha \end{cases}$$

由于 $\frac{\pi}{2}+\alpha = \pi - (\frac{\pi}{2}-\alpha)$, 由公式(四)及公式(五)可得
 公式(六)

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

5. 这六组公式必须注意的几个问题

(1) 公式中的角 α 可以是任意角;

(2) 这六组诱导公式可以叙述为:

① $\alpha + k \cdot 2\pi, \pi + \alpha, -\alpha, \pi - \alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值, 前面加上一个把 α 看成锐角是原函数值的符号. 为了便于记忆, 也可简单地说是: “函数名不变, 符号看象限.”

② $\alpha + \frac{\pi}{2}, -\alpha + \frac{\pi}{2}$ 的三角函数值, 等于 α 的余名三角函数值, 前面加上一个把 α 看成锐角是原函数值的符号, 记忆口诀为: “函数名改变, 符号看象限.”

③ 这两套公式可以推广为: $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbb{Z})$ 的三角函数值, 当 k 为偶数时, 得 α 的同名函数值; 当 k 为奇数时, 得 α 的异名函数值, 然后在前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号. 概括为: “奇变偶不变, 符号看象限.” 这里的奇偶是指 k 的奇偶.

解析: $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的两根为 $x=2$ 或 $x=-\frac{3}{5}$,

$$\therefore \sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \tan\alpha = \pm\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)\tan^2\alpha(-\tan\alpha)}{\sin\alpha(-\sin\alpha)} = \tan\alpha = \pm\frac{3}{4}.$$

答案: $\pm\frac{3}{4}$.

4 若 $f(\sin x) = \cos 17x$, 求 $f(\frac{1}{2})$ 的值.

解析: 此类题目是诱导公式与函数之间的一种混合运算, 在运算的过程中要理解函数表达式的意义, 灵活运用诱导公式.

$$f(\frac{1}{2}) = f(\sin \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} =$$

$$\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

答案: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5 若 $\sin(180^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) = -a$, 则 $\cos(270^\circ - \alpha) + 2\sin(360^\circ - \alpha)$ 的值是 ()

A. $-\frac{2a}{3}$

B. $-\frac{3a}{2}$

C. $\frac{2a}{3}$

D. $\frac{3a}{2}$

解析: $\sin(180^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha - \sin\alpha = -a$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{a}{2}.$$

$$\text{原式} = \cos(180^\circ + 90^\circ - \alpha) + 2\sin(360^\circ - \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha) - 2\sin\alpha$$

$$= -\sin\alpha - 2\sin\alpha = -3\sin\alpha = -3 \times \frac{a}{2} = -\frac{3a}{2}.$$

答案: B



轻轻告诉你 我们从失败中学到的东西要比成功中学到的东西多得多。——斯迈尔斯

1.4 三角函数的图象与性质

1.4.1 正弦函数、余弦函数的图象



温故知新



新知预习

1. 用五点法作正弦函数图象的五个点是 _____、_____、_____、_____、_____.
2. 把正弦函数 $y = \sin x$ 的图象 _____, 就可得到余弦函数 $y = \cos x$ 的图象.
3. 用五点法作余弦函数图象的五个点是 _____、_____、_____、_____、_____.



知识回顾

1. 在初中我们学过用五点法作图, 即经过三个步骤: 列表、描点、连线.
2. 上一节学习的诱导公式 $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$.



互动课堂



疏导引导

1. 正弦函数的图象
 - (1) 用单位圆中的正弦线, 作出函数 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的图象, 步骤如下:
 - ① 在 x 轴上任取一点 O_1 , 以 O_1 为圆心作单位圆;
 - ② 从这个圆与 x 轴交点 A 起把圆分成 12 等份;
 - ③ 过圆上各点作 x 轴的垂线, 可得对应于 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots, 2\pi$ 的正弦线;
 - ④ 相应地, 再把 x 轴上从原点 O 开始, 把 $0 \sim 2\pi$ 这段分成 12 等份;
 - ⑤ 把角的正弦线平移, 使正弦线的起点与 x 轴上对应的点重合;
 - ⑥ 用光滑曲线把这些正弦线的终点连结起来即得, 如图 1-4-1.



活学巧用

- 1 作函数 $y = \tan x \cdot \cos x$ 的图象.

解析: 首先将函数的解析式变形, 化为最简形式, 然后作函数的图象.

当 $\cos x \neq 0$, 即 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时, 有 $y = \tan x \cdot \cos x = \sin x$, 即 $y = \sin x (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

其图象如图 1-4-4.

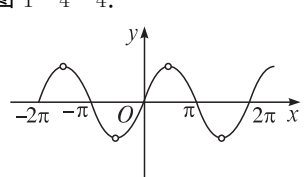


图 1-4-4

点评: 函数 $y = \tan x \cdot \cos x$ 的图象是 $y = \sin x (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$ 的图象, 因此作出 $y = \sin x$ 的图象后, 要把 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 的点挖去.



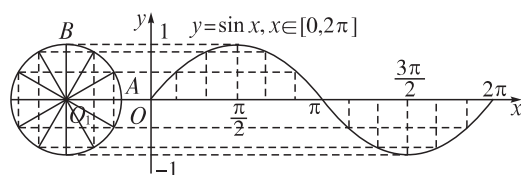


图 1-4-1

(2) 正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 的图象——正弦曲线.

因为 $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x, k \in \mathbf{Z}$, 所以正弦函数 $y = \sin x$ 在 $x \in [-2\pi, 0], x \in [2\pi, 4\pi], x \in [4\pi, 6\pi], \dots$ 时的图象与 $x \in [0, 2\pi]$ 的形状完全一样, 只是位置不同, 因此我们把 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 的图象沿 x 轴平移 $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, 就可得到 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 的图象, 如图 1-4-2.

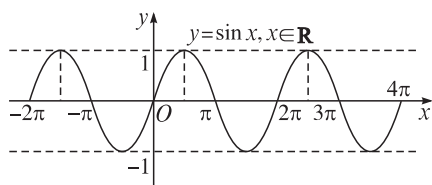


图 1-4-2

2. 作正弦函数简图的方法——五点法

观察正弦函数的图象, 可以看出 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$ 这五点确定图象形状时起着关键作用. 这五点描出后, 正弦函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了. 在精确度要求不高的情况下, 我们常用“五点法”作 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的近似曲线.

3. 余弦函数的图象

把正弦曲线向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就可以得到余弦函数的图象, 余弦函数 $y = \cos x$ 的图象叫做余弦曲线. 如图 1-4-3.

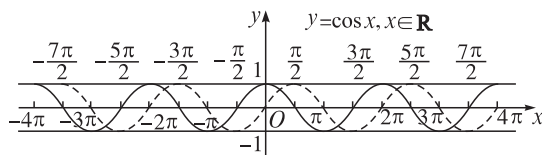


图 1-4-3

从上图可以看出, 余弦曲线上有五个点起关键作用, 这五个点是: $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1)$.

$k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 的这些点去掉.

2 作函数 $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ 的图象.

解析: 同第 2 题, 首先将 $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ 变形, 然后作图.

$$y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \text{ 化为 } y = |\sin x|,$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} \sin x, & 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \\ -\sin x, & 2k\pi + \pi < x < 2k\pi + 2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

其图象如图 1-4-5.

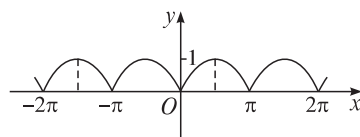


图 1-4-5

3 用“五点法”画函数 $y = -1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的简图.

画法一: 按五个关键点列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-1 + \sin x$	-1	0	-1	-2	-1

利用正弦函数的性质描点画图, 如图 1-4-6.

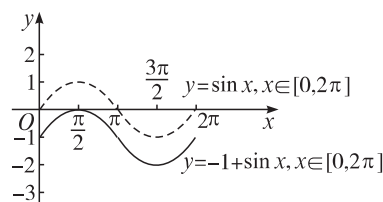


图 1-4-6

画法二: 可先用“五点法”画 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象 (如图中的虚线图), 再将其向下平移 1 个单位也得到 $y = -1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.

4 用五点法画出函数 $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.

解析: 画法一: 按五个点列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点画图, 如图 1-4-6.

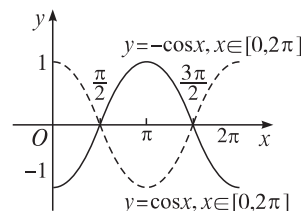


图 1-4-7

画法二: 先用五点法画 $y = \cos x$ 的图象, 再作它关于 x 轴的对称图.