



新课标·全解与精练系列

高中数学 教材全解与精练

高三

曹建华 主编



GAOZHONG SHUXUE
JIAOCAI QUANJIE YU JINGLIAN

SHUXUE



上海东亚大学出版社
Shanghai East Asia University Press

新课标·全解与精练系列

高中数学 教材全解与精练

高三

主编 曹建华
编委 陈海兵 陈立强 曹建华
邵昭东 王蕙萱 王国江

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据新课标理念,贯彻新课改精神,按照最新上海二期教材编写.全书分为“教材全解”和“课后精练”两大部分.“教材全解”包括知识结构表解、基础知识详解、典型例题精讲、知识联系与拓展、课后习题解答等.细致、全面、透彻解读教材,分析重点、难点、疑点,突出方法,总结规律,帮助学生提高预习、复习效果.“课后精练”包括每节的精练题和每章的单元检测题.题量适当,题型丰富,帮助学生巩固基础,提高能力,突破思路,应对测试.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教材全解与精练.高三/曹建华主编. —上海:
上海交通大学出版社,2011
(新课标·全解与精练系列)
ISBN 978-7-313-07668-7

I. ①高… II. ①曹… III. ①中学数学课—高中—
教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 159695 号

高中数学教材全解与精练 高三

曹建华 主编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

上海亿顺印务有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787 mm×1092 mm 1/16 印张: 10.25 字数: 321 千字

2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~5030

ISBN 978-7-313-07668-7/G 定价: 25.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话: 021-56889281

前言

2002年8月,上海市教育委员会颁布了《上海市中小学数学课程标准》,在充分总结一期课改的基础上,进一步吸收、借鉴了国内兄弟省市课改的经验,并全面推广使用在《上海市中小学数学课程标准》指导下的二期课改新教材.新教材注重提高学生的数学素养,力求根据学生的不同个性,充分发挥每个学生的聪明才智.特别是教材中增加了大量联系实际的例题和应用题,这极大地引起了学生学习兴趣,同时也给广大师生的教和学带来了新的挑战.

为了满足广大师生的需求,本着促进课改的精神,我们组织了从事新教材第一线教学工作的骨干教师,结合自身的教学经验和研究心得,编写了这套全新视角的《高中数学教材全解与精练》,其内容紧扣教材,注重释疑解难,迁移延伸,第次深入.“教材全解”旨在帮助广大学生能够更好地理解、消化、学好新教材,使同学们可以独立预习、复习,同时也是教师教学的参考教案.

本书以教材中的章节为单位,每一节都配有相应的与教材内容完全匹配的精练题目,每一章设有单元检测试卷,每一份检测试卷都含有“双基训练”、“能力拓展”、“高考透视”等类型试题,以供不同层次水平的学生加以选用.

双基训练题 针对每节基础知识所设计的题目,系统、全面、针对性强,是形成能力的基础,也是考试中占篇幅最大的部分.在接受这方面的训练时,同学们要防止眼高手低,得分不全,不能掉以轻心.

能力拓展题 针对本节重点、难点以及新旧知识的融会贯通所设计的题目,也有与科技发展、生活实际相联系的信息题、材料题,或是学科内或学科间的综合题,题目难度从中等到较高,是形成能力、考试取得高分的关键.

高考透视题 再现本节知识在高考中曾经出现过的考查类型、角度和深度,知道过去曾经考过什么,只有做到心中有数,方能立于不败之地.

答案详解 稍有难度的题目皆提供详细的解题步骤和思路点拨,鼓励一题多解,不但知其然,且知其所以然,能使学生养成良好规范的答题习惯.

本书主要特点是:

(1) 将训练题按难度分层次设计,加强基础训练,逐级提升,注重能力形成.

(2) 题目设计精良,体现实践、综合、创新能力,对高考能力题型设计进行了科学的探索和最新的预测.

前言

(3) 答案规范、详备、精练,有助于读者养成良好的答题习惯,使之在考试中从容应对,万无一失.

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见,使本书更具有科学性、实用性、指导性,使它能够跟踪你的学习进程,成为你的良师益友.

编者

目 录

第 14 章 空间直线与平面	1
14.1 平面及其基本性质	1
14.2 空间直线与直线的位置关系	7
14.3 空间直线与平面的位置关系	17
14.4 空间平面与平面的位置关系	27
第 14 章单元检测	40
第 15 章 多面体及旋转体	42
15.1 多面体的概念	42
15.2 多面体的直观图	47
15.3 旋转体的概念	51
15.4 几何体的表面积	53
15.5 几何体的体积	57
15.6 球面距离	61
第 15 章单元检测	66
第 16 章 排列组合和二项式定理	68
16.1 计数原理 I ——乘法原理	68
16.2 排列	71
16.3 计数原理 II ——加法原理	78
16.4 组合	84
16.5 二项式定理	91
第 16 章单元检测	100
第 17 章 概率	102
17.1 概率初步	102
17.2 频率与概率	109
第 17 章单元检测	115
第 18 章 基本统计方法	117
18.1 总体和个体	117

目 录

18.2 抽样技术	123
18.3 统计估计	129
18.4 实例分析	134
第 18 章单元检测	143
参考答案	144

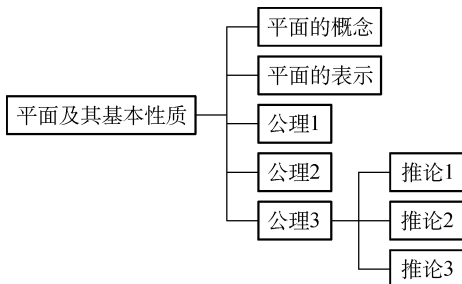
第14章 空间直线与平面

综合解说

平面的概念和平面的性质是立体几何全部理论的基础. 平面, 是现实世界存在着的客观事物形态的数学抽象, 在立体几何中是只描述而不定义的原始概念, 但平面是把三维空间图形转化为二维平面图形的主要媒介, 在立体几何问题平面化的过程中具有重要的桥梁作用.

14.1 平面及其基本性质

知识结构框图表解



基础知识详解与要点点拨

在立体几何中, “平面”是一个不定义的原始概念, 就像集合论中的“集合”的概念一样只能进行描述性的解释.

1. 平面的两个特征

- (1) 无限延展;
- (2) 平的(没有厚度).

2. 平面的表示

- (1) 用一个大写的英文字母或一个小写的希腊字母 α, β, γ 等表示, 如平面 M , 平面 N , 平面 α , 平面 β ;
- (2) 用表示平行四边形的两个相对顶点的字母表示, 如图 14-1 中平面 AC .

当一个平面水平放置时, 通常把它画成一个内角为 45° 的平行四边形, 其中的一边画成水平方向, 使另一边的长度等于它的一半.

空间的直线和平面都可看作点的集合, 点与它们的关系可用集合的语言表示, 例如:

点 A 在直线 l 上, 或直线 l 经过点 A , 记作 $A \in l$; 点 B 不在直线 l 上, 记作 $B \notin l$. 如图 14-2.

点 A 在平面 α 上, 或平面 α 经过点 A , 记作 $A \in \alpha$; 点 B 不在平面 α 上, 记作 $B \notin \alpha$. 如图 14-3.

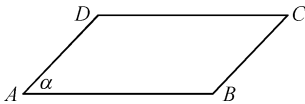


图 14-1

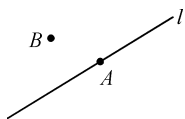


图 14-2

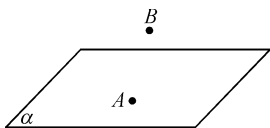


图 14-3

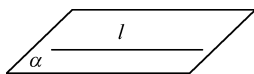
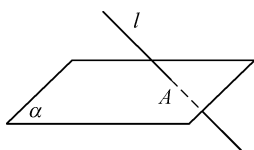


图 14-4

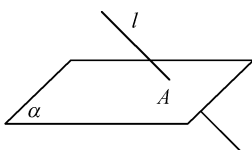
如果直线 l 上的所有点都在平面 α 上,那么称直线 l 在平面 α 上(或平面 α 经过直线 l),记作 $l \subseteq \alpha$. 如图 14-4.

公理 1 如果一条直线 l 上有两点在一个平面 α 上,那么这条直线 l 在这个平面 α 上. 此时我们说直线在平面内,或者说平面经过直线.

如果直线 l 与平面 α 只有一个公共点 A ,那么称直线 l 与平面 α 相交于点 A ,或称 A 是直线 l 与平面 α 的交点,记作 $l \cap \alpha = A$. 如图 14-5.



(a)



(b)

图 14-5

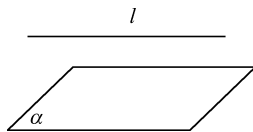


图 14-6

如果直线 l 与平面 α 没有公共点,那么称直线 l 与平面 α 平行,记作 $l \cap \alpha = \emptyset$ 或 $l \parallel \alpha$. 如图 14-6. 直线与平面相交,把被遮住部分的线段画成虚线或不画.

3. 两个相交平面

公理 2 如果不同的两个平面 α, β 有一个公共点 A ,那么 α, β 的交集是过点 A 的直线 l .

一条直线 l 既在平面 α 内,又在平面 β 内,即 α 和 β 有一条公共的直线 l ,则称 α 与 β 相交,交线是 l ,记做 $\alpha \cap \beta = l$. 如图 14-7.

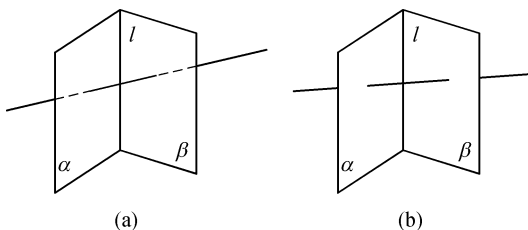
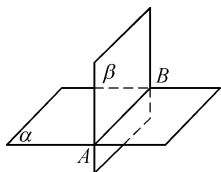
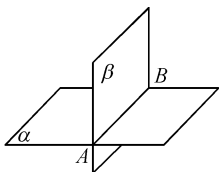


图 14-7

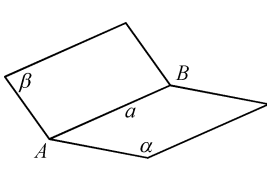
画两个相交平面时,若一个平面的一部分被另一个平面遮住,应把被遮住部分的线段画成虚线或不画. 如图 14-8.



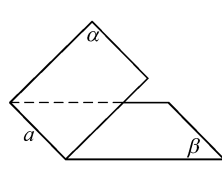
(a)



(b)



(c)



(d)

图 14-8

公理 3 不在同一条直线上的三个点,确定一个平面(这里“确定一个平面”的含义是“有且只有一个平面”).

推论 1 一条直线和直线外的一点确定一个平面. 如图 14-9.

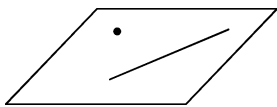


图 14-9

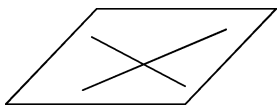


图 14-10

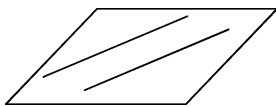


图 14-11

推论 2 两条相交的直线确定一个平面. 如图 14-10.

推论 3 两条平行的直线确定一个平面. 如图 14-11.

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

例 1 如图 14-12, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, 直线 AB, BC, AD, DC 分别与平面 α 相交于点 E, G, H, F . 求证: E, F, G, H 四点必定共线.

解题策略 对于点共线问题的证明, 只要证明这些点都是某两个平面的公共点即可.

解 $\because AB \parallel CD, \therefore AB, CD$ 确定一个平面 β .

又 $\because AB \cap \alpha = E, AB \subset \beta, \therefore E \in \alpha, E \in \beta$,

即 E 为平面 α 与 β 的一个公共点.

同理可证 F, G, H 均为平面 α 与 β 的公共点.

$\therefore$ 两个平面有公共点, 它们有且只有一条通过公共点的公共直线,

$\therefore E, F, G, H$ 四点必定共线.

注意 多点共线问题均可采用证明点在两个平面的交线上的方法.

例 2 点 $A \notin$ 平面 BCD , E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点, 若 EH 与 FG 交于 P (这样的四边形 $ABCD$ 就叫做空间四边形). 如图 14-13.

求证: P 在直线 BD 上.

解题策略 对于线共点问题的证明, 一般的是先证明某两条直线相交, 然后再证明这个交点在其余直线上或者证明其余直线过这个交点.

证明 $\because EH \cap FG = P, \therefore P \in EH, P \in FG$,

$\because E, H$ 分别属于直线 AB, AD ,

$\therefore EH \subset$ 平面 $ABD, \therefore P \in$ 平面 ABD ,

同理: $P \in$ 平面 BCD ,

又 $\because$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

所以, P 在直线 BD 上.

注意 三个平面两两相交形成三条交线, 那么这三条交线是平行或相交于一点的关系. 这个结论在作图时要注意应用.

例 3 已知: a, b, c, d 是不共点且两两相交的四条直线, 求证: a, b, c, d 共面.

解题策略 证明若干条线(或若干个)共面可按照如下步骤进行:

(1) 由题给条件中的部分线(或点)确定一个平面;

(2) 根据公理 1 证明其余的线(或点)均在这个平面内.

证明 1° 若当四条直线中有三条相交于一点, 不妨设 a, b, c 相交于一点 A , 但 $A \notin d$, 如图 14-14.

$\therefore$ 直线 d 和 A 确定一个平面 α .

又设直线 d 与 a, b, c 分别相交于 E, F, G ,

则 $A, E, F, G \in \alpha$.

$\because A, E \in \alpha, A, E \in a, \therefore a \subset \alpha$.

同理可证 $b \subset \alpha, c \subset \alpha$.

$\therefore a, b, c, d$ 在同一平面 α 内.

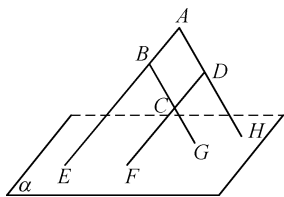


图 14-12

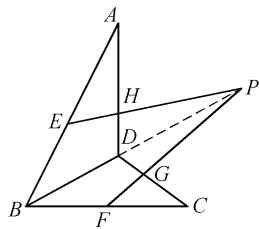


图 14-13

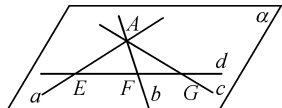


图 14-14

2° 当四条直线中任何三条都不共点时,如图 14-15.

∵ 这四条直线两两相交,则设相交直线 a, b 确定一个平面 α .

设直线 c 与 a, b 分别交于点 H, K ,则 $H, K \in \alpha$.

又 $H, K \in c$, $\therefore c \subseteq \alpha$.

同理可证 $d \subseteq \alpha$.

∴ a, b, c, d 四条直线在同一平面 α 内.

注意 本题最容易忽视“三线共点”这一情况.因此,在分析题意时,应仔细推敲问题中每一句话的含义.

例 4 在空间四边形 $ABCD$ 中, M, N 分别为 AD, BC 中点, 求证: $AB + CD > 2MN$. 如图 14-16(a).

解题策略 要证明的结论中的三条线段不在同一平面上,利用平面把三维空间图形转化为二维平面图形,再利用三角形中三边的不等关系来证明.

证明 取 AC 中点 E , 连接 ME, NE , 如图 14-16(b).

在 $\triangle ACD$ 中, M, E 为中点, $\therefore ME$ 为中位线,

$$\therefore ME = \frac{1}{2}CD.$$

同理,在 $\triangle ABC$ 中, $NE = \frac{1}{2}AB$.

在 $\triangle MNE$ 中, $ME + NE > MN$,

$$\therefore \frac{1}{2}(AB + CD) > MN,$$

$$\therefore AB + CD > 2MN.$$

注意 立体几何中很多具体的计算、关系等会比较多地应用初中平面几何的性质.

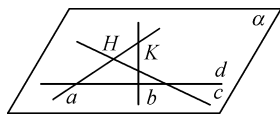


图 14-15

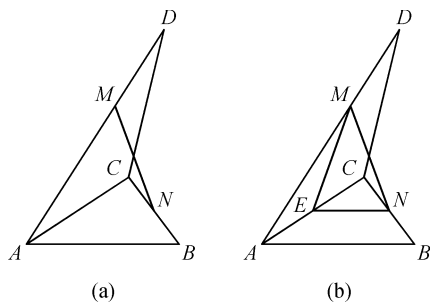


图 14-16

知识联系与拓展

例 5 已知 n 条互相平行的直线 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 分别与直线 l 相交于点 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 求证: $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 与 l 共面.

解题策略 证明多条直线(三条或三条以上)共面,先由两条确定一个平面,再证其他直线在这个平面内,或者分别由两条直线确定几个平面,再证这些平面重合.

证法一 因为 $l_1 \cap l = A_1$, 所以 l_1 与 l 确定平面 α , 设 l_k 是与 l_1 平行的直线中的任一条直线, 且 $l_k \cap l = A_k$, 则 $l_1 \subseteq \alpha, A_k \in \alpha$.

∵ $l_k \parallel l_1$, 设 l_k 与 l_1 确定平面 β , 则 $l_1 \subseteq \beta, A_k \in \beta$, 因此 l_1 与 A_k 既在平面 α 内又在平面 β 内, 根据公理的推论 1 知, 过 l_1 和其外一点的平面有且只有一个, 所以 α 和 β 重合, 从而由 l_k 的任意性知 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 共面.

证法二 ∵ $l_1 \parallel l_2, l_1 \parallel l_3$ ∴ 直线 l_1 和 l_2 及直线 l_1 和 l_3 分别确定一个平面 α 和 β .

∵ $l_1 \cap l = A_1, l_2 \cap l = A_2, l_3 \cap l = A_3$,

∴ $A_1, A_2 \in \alpha, A_2, A_3 \in \beta, l \subseteq \alpha$, 且 $l \subseteq \beta$,

α 和 β 都是过相交直线 l_1 和 l 的平面, 而过两相交直线的平面有且只有一个.

∴ l_1, l_2, l_3, l 共面, 同理可证 $l_4, l_5, \dots, l_n$ 都在由直线 l_1 和 l 所确定的平面内.

注意 多条直线的共面问题是常见的证明类型, 要熟练掌握, 并能进行应用.

课后习题解答

练习 14.1(1)

1. (1) $A \in \alpha$. (2) $B \notin \beta$. (3) $AC \subseteq \alpha$. (4) $BC \cap \alpha = C$. (5) $BD \parallel \beta$. 2. 证明: 因为 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 由公理 1 知 $AB \subseteq \alpha$, 同理可知, $AC \subseteq \alpha, BC \subseteq \alpha$, 所以 $\triangle ABC$ 的三条边所在的直线都在平面 α 上.

练习 14.1(2)

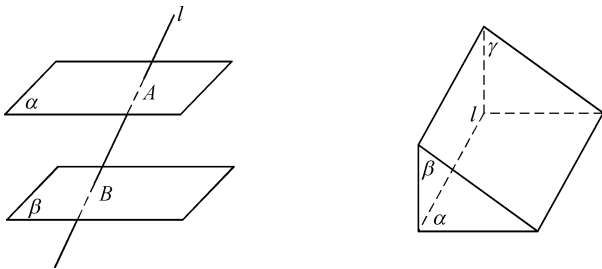
1. 证明: 因为直线 c 与 a, b 都相交, 所以可设 $a \cap c = A, b \cap c = B$, 又已知 $a \parallel b$, 由推论 3 可知 a, b 可确定一个平面, 设该平面是 α , 因为 $a \subseteq \alpha, b \subseteq \alpha$, 所以 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 所以由公理 1 知 $c \subseteq \alpha$. 所以 a, b, c 在同一平面内. 2. 证明: 因为 $D \notin l$, 由推论 1 知点 D 与直线 l 可确定一个平面 α , 即 $D \in \alpha, l \subseteq \alpha$. 因为 A, B ,

C 在直线 l 上, 所以 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$. 因为 $A \in \alpha, D \in \alpha$, 由公理 1 知 $AD \subseteq \alpha$, 同理可知 $BD \subseteq \alpha, CD \subseteq \alpha$. 3. 证明: 设 $l_1 \cap l_2 = P$, 取 l_1 上异于 P 的一点 A , 取 l_2 上异于 P 的一点 B , 则 A, B, P 不在同一直线上, 由公理 3 知 A, B, P 三点可确定一个平面 α . 因为 $A \in \alpha, P \in \alpha$, 由公理 1 知 $AP \subseteq \alpha$, 即 $l_1 \subseteq \alpha$, 同理知 $BP \subseteq \alpha$, 即 $l_2 \subseteq \alpha$, 所以 l_1, l_2 确定平面 α .

习题 14.1

A 组

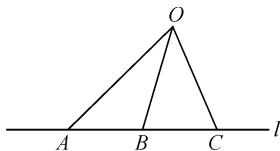
1. (1) $M \in l$ 且 $\alpha \cap \beta = l$, 图略. (2) $\alpha \cap \beta = \emptyset$ (或 $\alpha \parallel \beta$), 且 $l \cap \alpha = A, l \cap \beta = B$. (3) $\alpha \cap \beta = l$ 且 $l \parallel \gamma$.



(第 1(2)、(3)题)

2. $\because A \in l, B \in l, O \notin l, \therefore A, B, O$ 确定一个平面 $\alpha, \therefore l \subseteq \alpha$.
 $\because C \in l, \therefore C \in \alpha, \therefore OC \subseteq \alpha. \therefore OA, OB, OC$ 在同一平面上.

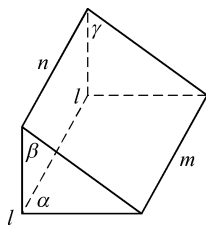
3. (1) $\times$. (2) $\times$. (3) $\times$. (4) $\times$. 4. 6 个. 5. 把两根拉紧的线分别固定在对脚, 如果两直线能够相交, 则说明四条腿的底端是在同一平面内. 由推论 2 得: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.



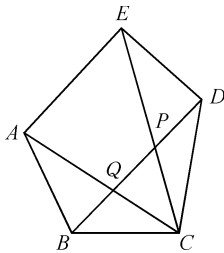
(第 2 题)

B 组

1. 如果 $\alpha \cap \beta = l, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, 且 $l \parallel m$, 那么 $l \parallel m, l \parallel n$ 且 $m \parallel n$. 2. 三个平面最多把空间分割成 8 个部分. 图略. 3. 设 $AC \cap BD = Q, CE \cap BD = P, \because CE \cap BD = P, \therefore BD, CE$ 确定一平面 $\beta, \because Q \in BD, \therefore Q \in \beta, \because C \in \beta, \therefore CQ \subseteq \beta. \because A \in AC, \therefore A \in \beta. \therefore A, B, C, D, E$ 在同一平面上.



(第 1 题)



(第 3 题)

精练 14.1

1. 看图 14-17 填空:

- (1) $AC \cap BD =$ _____;
- (2) 平面 $AB_1 \cap$ 平面 $A_1C_1 =$ _____;
- (3) 平面 $A_1C_1CA \cap$ 平面 $AC =$ _____;
- (4) 平面 $A_1C_1CA \cap$ 平面 $D_1B_1BD =$ _____;
- (5) 平面 $A_1C_1 \cap$ 平面 $AB_1 \cap$ 平面 $B_1C =$ _____;
- (6) $A_1B_1 \cap B_1B \cap B_1C_1 =$ _____.

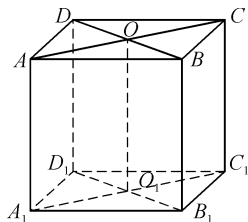


图 14-17

2. 一个西瓜切了 3 刀,最多可切成 a 块,最少可切成 b 块,则 $a-b=$ _____.
3. 三角形、四边形、正六边形、圆,其中一定是平面图形的有 _____ 个.
4. (1) 已知空间四点中无任何三点共线,那么这四点可以确定平面的个数是 _____.
- (2) 不重合的三条直线,若相交于一点,则最多能确定 _____ 个平面;若共有两个交点,最多能确定 _____ 个平面;若共有三个交点,最多能确定 _____ 个平面;
- (3) 设直线 a 上有 6 个点,直线 b 上有 9 个点,则这 15 个点,能确定 _____ 个不同的平面.
- (4) 一条直线和直线外四个不同的点,它们最多能确定平面的个数是 _____ 个.
- 四点不共面,确定 4 个平面;直线与线外一点共确定四个平面.
5. 图 14-18(a)代表未折叠正方体的展开图,将其折叠起来,变成正方体后的图形是图 14-18(b)中的 ()

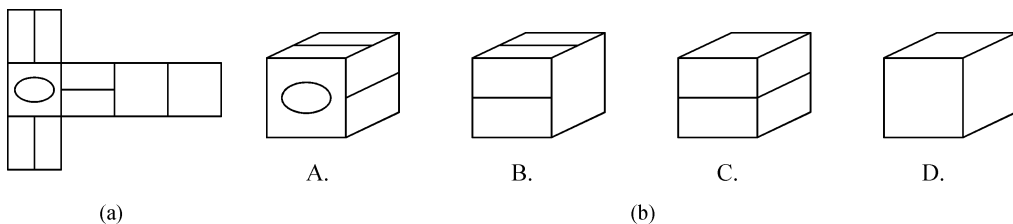


图 14-18

6. 三个互不重合的平面把空间分成六个部分时,它们的交线有 ()
- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 1 条或 2 条
7. 空间四条直线,其中每两条都相交,最多可以确定平面的个数是 ()
- A. 一个 B. 四个 C. 六个 D. 八个
8. 给出下列四个命题,其中正确的是 ()
- (1)空间四点共面,则其中三点必共线;(2)空间四点不共面,则其中任何三点不共线;
- (3)空间四点中有三点共线,此四点必共面;(4)空间四点中任何三点不共线,则此四点不共面.
- A. (2)(3) B. (1)(2)(3) C. (1)(2) D. (2)(3)(4)
9. 若 $\alpha \cap \beta = l$, $A, B \in \alpha$, $C \in \beta$, 试画出平面 ABC 与平面 α, β 的交线.

10. 如图 14-19,已知直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三边 AB, AD, CD 分别交于点 P, Q, R . 求证:四边形 $ABCD$ 为平面图形.

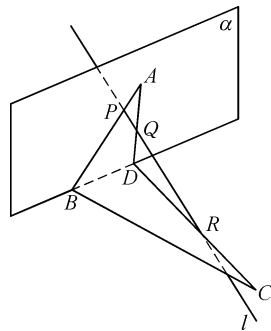


图 14-19

11. 如图 14-20, $AB \cap \alpha = P$, $CD \cap \alpha = P$, A, D 与 B, C 分别在面 α 的两侧, $AC \cap \alpha = Q$, $BD \cap \alpha = R$. 求证: P, Q, R 三点共线.

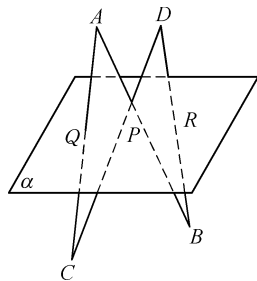


图 14-20

12. 如图 14-21, 已知: $a \parallel b \parallel c$, $a \cap d = A$, $b \cap d = B$, $c \cap d = C$, 求证: a, b, c, d 共面.

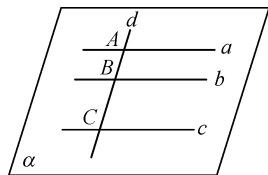
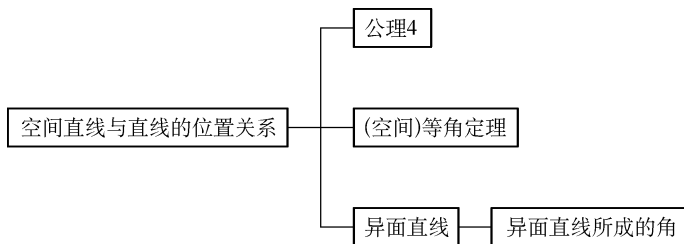


图 14-21

14.2 空间直线与直线的位置关系

知识结构框图表解



基础知识详解与要点点拨

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行, 那么这两个角相等或互补.

我们把不能置于同一平面的两条直线叫做异面直线.

异面直线的画法常用的有如图 14-22 的三种形式:

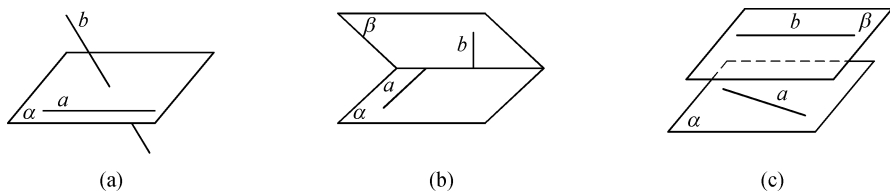


图 14-22

1. 空间两条直线的位置关系

- (1) 相交直线——有且仅有一个公共点；
- (2) 平行直线——在同一平面内，没有公共点；
- (3) 异面直线——不同在任何一个平面内，没有公共点.

相交直线和平行直线也称为共面直线.

定义 直线 a, b 是异面直线，在空间中任取一点 O ，过点 O 分别引 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，则 a', b' 所成的锐角（或直角）叫做两条异面直线所成的角. 如图 14-23.



图 14-23

2. 两条异面直线互相垂直

在异面直线所成的角定义中，两条异面直线所成角的范围是 $(0^\circ, 90^\circ]$ 或 $(0, \frac{\pi}{2}]$ ，若两条异面直线所成的角为直角，我们就说这两条异面直线互相垂直.

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

例 1 如图 14-24， A 是平面 BCD 外的一点， G, H 分别是 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 的重心，求证： $GH \parallel BD$.

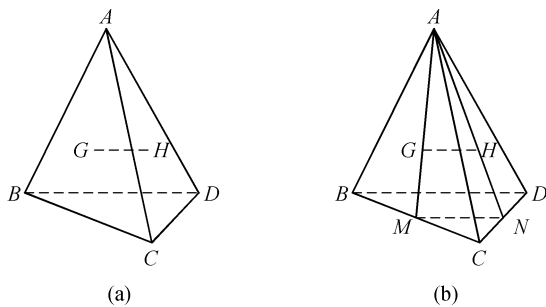


图 14-24

解题策略 空间中的线线平行可以利用公理 4 证明.

证明 连接 AG, AH 并延长交 BC, DC 于 M, N .

$\because G$ 是所在三角形的重心， $\therefore M$ 是 BC 边中点.

同理可得 N 是 CD 边中点，

$\therefore \triangle BCD$ 中, $MN \parallel BD$.
 $\triangle AMN$ 中, $\frac{AG}{AM} = \frac{AH}{AN} = \frac{2}{3}$.
 $\therefore GH \parallel MN$.
 $\therefore GH \parallel BD$.

注意 本题体现了立体几何将空间图形问题化归为平面图形问题的基本思想.

例 2 如图 14-25(a), 已知空间四边形 $ABCD$ 中, E, H 分别是 AB, AD 上的中点, F, G 分别是 BC, CD 的中点, 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形; 若四边形 $EFGH$ 是菱形, 该命题将做如何论述?

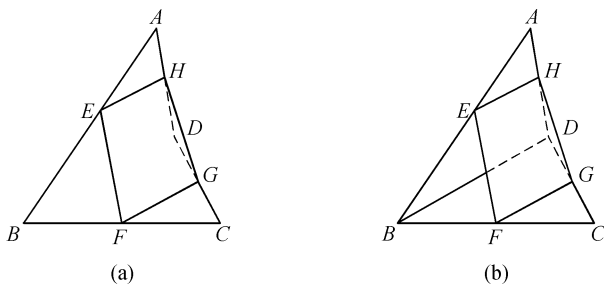


图 14-25

解题策略 中点型条件可以考虑中位线的性质.

证明 连接 BD , 如图 14-25(b).

因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

所以 $EH \parallel BD$, 且 $EH = \frac{1}{2}BD$.

同理, $FG \parallel BD$, 且 $FG = \frac{1}{2}BD$.

因为 $EH \parallel FG$, 且 $EH = FG$.

所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

“已知空间四边形 $ABCD$ 中, E, H 分别是 AB, AD 上的中点, F, G 分别是 BC, CD 的中点, 对角线 $AC = BD$. 求证: 四边形 $EFGH$ 是菱形.”

注意 对于空间四边形的中点四边形的构造类型要非常熟悉.

任意空间四边形的中点四边形为平行四边形;

对角线相等的空间四边形的中点四边形为菱形;

对角线垂直的空间四边形的中点四边形为矩形;

对角线相等且垂直的空间四边形的中点四边形为正方形.

例 3 如图 14-26, 已知: 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = a$, $b \subset \alpha$, $b \cap a = A$, $c \subset \beta$ 且 $c \parallel a$, 求证: b, c 是异面直线.

解题策略 异面直线的证明一般都采用反证法.

反证法: 若 b 与 c 不是异面直线, 则 $b \parallel c$ 或 b 与 c 相交.

(1) 若 $b \parallel c$, $\because a \parallel c$, $\therefore a \parallel b$, 这与 $a \cap b = A$ 矛盾;

(2) 若 b, c 相交于 B , 则 $B \in \beta$, 又 $a \cap \beta = A$, $\therefore A \in \beta$.

$\therefore AB \subset \beta$, 即 $b \subset \beta$, 这与 $b \cap \beta = A$ 矛盾.

$\therefore b, c$ 是异面直线.

注意 利用反证法时要注意否定的各种情况.

例 4 (1) 已知直线 a, b 是异面直线, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = c$, 则直线 c

A. 一定与 a, b 都相交

B. 至多与 a, b 中的一条相交

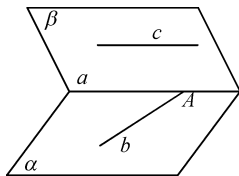


图 14-26

- C. 至少与 a, b 中的一条相交
D. 至少与 a, b 中的一条平行

解 C. 可严格证明.

已知 a, b 是异面直线, 且分别在平面 α, β 内, $\alpha \cap \beta = l$. 求证: a, b 至少有一条与 l 相交.

证明: 假设 a, b 都与 l 不相交.

$\because a \not\subseteq \alpha, l \subseteq \alpha, \therefore a \parallel l$ 同理 $b \parallel l$.

$\therefore a \parallel b$, 这与 a, b 是异面直线矛盾.

$\therefore$ 假设错误, 故 a, b 中至少有一条与 l 相交.

(2) 教室内有一把尺子, 无论怎样放置, 地面上总有这样的直线与该直尺所在直线 ()

- A. 平行 B. 垂直
C. 相交但不垂直 D. 异面

解 B.

注意 在立体几何中垂直不一定相交, 只要所成角为 90° 即可.

(3) 如图 14-27, 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的 12 条棱中能组成异面直线的总对数是 ()

- A. 48 对 B. 24 对
C. 12 对 D. 6 对

解 B.

棱 AA' 有 4 条与之异面, 所以, 所有棱能组成 $4 \times 12 = 48$ 对, 但每一对都重复计算一次, 共有 24 对.

(4) 某种游戏中, 黑、黄两个“电子狗”从棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 出发沿棱向前爬行, 每爬完一条棱称为“爬完一段”. 黑“电子狗”爬行的路线是 $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow \dots$, 黄“电子狗”爬行的路线是 $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow \dots$, 它们都遵循如下规则: 所爬行的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须是异面直线 (其中 i 是正整数). 设黑“电子狗”爬完 2008 段, 黄“电子狗”爬完 2007 段后各自停止在正方体的某个顶点处, 这时黑、黄“电子狗”间的距离是 ()

- A. 0 B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

解 B.

根据条件爬行路线是确定的, 并且是有周期性的.

黑“电子狗”爬行的路线如图 14-28 所示.

黄“电子狗”爬行的路线具有同样的周期特征.

例 5 如图 4-29(a), 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 3$, E, F 分别是 BC, AD 上的点, 并且 $BE:EC = AF:FD = 1:2$, $EF = \sqrt{7}$, 求 AB 和 CD 所成角的大小.

解题策略 利用等角定理转化为平面角来求解.

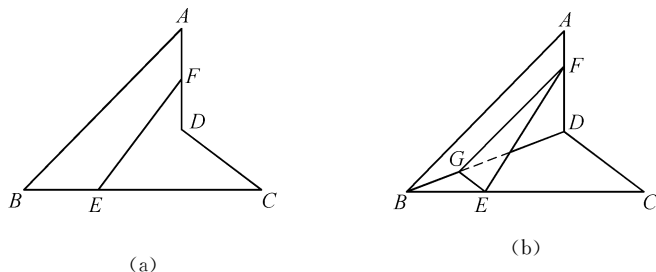


图 14-29

解 连接 BD , 在 BD 上取点 G , 使 $BG:GD = 1:2$, 如图 14-29(b).