

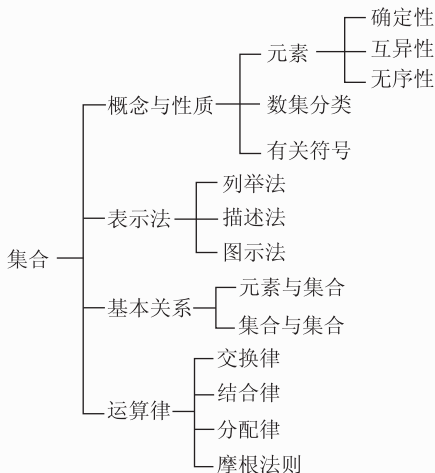
高中数学公式定理手册

数 学

一 集合与简易逻辑

(一)集合

知识网络



概念精讲

【集合】 某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.

【元素】 集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

【集合中元素的性质】

1. 确定性:对于一个给定的集合,其元素是确定的,即对于一个给定的对象 a 和一个给定的集合 M ,或者 a 属于集合 M (记作 $a \in M$),或者 a 不属于集合 M (记作 $a \notin M$ 或 $a \in \bar{M}$),两者必居其一.

2. 互异性:一个由多个元素所构成的集合中,无重复的元素出现.

3. 无序性:一个由多个元素所构成的集合中,不存在元素的书写顺序问题.

【集合的元素个数】 有限集合 A 的元素个数记作 $\text{card}(A)$. 例如, $A = \{a, b, c, d\}$, 则 $\text{card}(A) = 4$. 对任意两个有限集合 A 与 B , 有: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

【集合的表示方法】

1. 列举法:把集合中的所有元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法. 例如小于 5 的自然数的集合可表示为: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. 描述法: 用集合所含元素的共同特征表示集合的方法. 例如不等式 $x-2 \leq 0$ 的解集可以表示为: $\{x \in \mathbf{R} | x-2 \leq 0\}$ (有时也可以用冒号或分号代替竖线, 写成 $\{x \in \mathbf{R}; x-2 \leq 0\}$ 或 $\{x \in \mathbf{R}; x-2 \leq 0\}$). 又如所有双曲线的集合, 可以表示为: $\{x | x \text{ 是双曲线}\}$.

【全集】 如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看做一个全集. 全集通常用 U 表示.

【子集】 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 则集合 A 是集合 B 的子集. 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 任何一个集合是它本身的子集.

【真子集】 对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 我们就说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

【空集】 不含有任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$. 空集是任何集合的子集.

【交集】 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$.

$$1. A \cap A = A \quad 2. A \cap \emptyset = \emptyset \quad 3. A \cap B = B \cap A \quad 4. A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

【并集】 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

$$1. A \cup A = A \quad 2. A \cup \emptyset = A \quad 3. A \cup B \supseteq B (\text{或 } A) \quad 4. A \cup B = B \cup A$$

【补集】 一般地, 设 U 是一个全集, A 是 U 的一个子集 (即 $A \subseteq U$), 由全集 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合, 叫做子集 A 在全集 U 中的补集 (或余集), 记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$.

$$1. A \cup \complement_U A = U \quad 2. A \cap \complement_U A = \emptyset \quad 3. \complement_U (\complement_U A) = A \quad 4. \complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$$

$$5. \complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$$

【相等集合】 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A \subseteq B$), 且集合 B 是集合 A 的子集 ($B \subseteq A$), 此时, 集合 A 与集合 B 中的元素是一样的, 因此, 集合 A 和集合 B 相等, 记作 $A = B$.

【常用数集及记法】

$\mathbf{N}^*$ —— 正整数集 $\mathbf{C}$ —— 复数集 $\mathbf{N}$ —— 自然数集
 $\mathbf{Z}$ —— 整数集 $\mathbf{Q}$ —— 有理数集 $\mathbf{R}$ —— 实数集



典型例题

【例】 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ().

A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

【解析】 解法一: 列举法

$$M = \left\{ \dots, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \dots \right\},$$

$$\therefore N = \left\{ \dots, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \dots \right\}, \therefore M \subsetneq N. \text{ 故选 B.}$$

解法二: 比较法

$$M = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\},$$

$$N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$\because 2k+1$ 为奇数, 而 $k+2$ 为整数, $\therefore M \subsetneq N$. 故选 B.

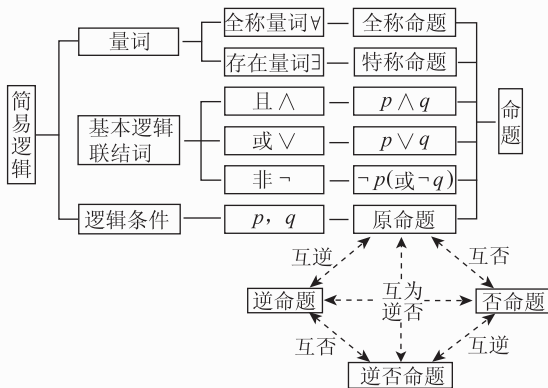
【答案】B

【集合的运算律】

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2. 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
3. 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. 摩根法则: $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$ $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$

(二) 简易逻辑

知识网络



概念精讲

【命题】 可以判断真假的语句叫做命题.

【命题的分类】 命题可分为真命题和假命题.

真命题: 如果由命题的条件 p 通过推理一定可以得出命题的结论 q , 那么这样的命题叫做真命题.

假命题: 如果由命题的条件 p 通过推理不一定可以得出命题的结论 q , 那么这样的命题叫做假命题.



点拨

数学命题真假的判定方法:

(1) 数学中判定一个命题是真命题, 要经过证明.

(2) 数学中判定一个命题是假命题, 只需举一个反例即可.

【逻辑联结词】 “或”“且”“非”这些词叫做逻辑联结词.

或: 两个简单命题至少一个成立.

且: 两个简单命题都成立.

非: 对一个命题的否定.

【简单命题与复合命题】 不含逻辑联结词的命题叫做简单命题; 由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

命题常用小写的拉丁字母 $p, q, r, s, \dots$ 表示, 常见的复合命题有三类:

1. p 或 q 2. p 且 q 3. 非 p

【真值表】 表示命题真假的表叫真值表.

1. 当 p, q 至少有一个为真时, p 或 q 为真.

当 p, q 都为假时, p 或 q 为假.

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

2. 当 p, q 都为真时, p 且 q 为真.

当 p, q 中至少有一个为假时, p 且 q 为假.

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

3. 当 p 为真时, 非 p 为假.

当 p 为假时, 非 p 为真.

p	非 p
真	假
假	真

【四种命题及其表示形式和相互关系】 在两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而且第一个命题的结论是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题; 如果把其中一个命题叫做原命题, 那么另一个命题叫做原命题的逆命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定, 这样的两个命题叫做互否命题; 如果把其中一个命题叫做原命题, 另一个命题就叫做原命题的否命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定, 这样的两个

命题叫做互为逆否命题;如果把其中一个命题叫做原命题,另一个命题就叫做原命题的逆否命题.

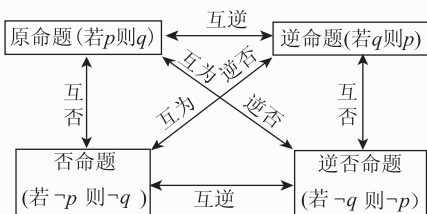
一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

原命题:若 p 则 q ;

逆命题:若 q 则 p ;

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$.



【量词】 表示个体常项或变项之间数量关系的词为量词. 量词可分两种:一类是全称量词,另一类是存在量词.

【全称量词】 短语“一切的”“所有的”“每一个”“任意的”“凡”“都”等词在逻辑中通常叫做全称量词,用符号“ $\forall$ ”表示.

【存在量词】 短语“存在一个”“有一个”“有的”“至少有一个”等词在逻辑中通常叫做存在量词,用符号“ $\exists$ ”表示.

【含有量词的命题】 通常包括单称命题、特称命题和全称命题三种.

单称命题:其公式为“(这个) S 是 P ”.

全称命题:其公式为“所有 S 是 P ”.

特称命题:其公式为“有的 S 是 P ”.

【全称命题、特称命题的否定】 一般地,全称命题 $p: \forall x \in M, \text{有 } p(x) \text{ 成立}$,其否定命题 $\neg p$ 为: $\exists x \in M, \text{使 } p(x) \text{ 不成立}$. 特称命题 $p: \exists x \in M, \text{使 } p(x) \text{ 成立}$,其否定命题 $\neg p$ 为: $\forall x \in M, p(x) \text{ 不成立}$. 用符号语言表示为: $p: \forall x \in M, p(x)$, 否定为 $\neg p: \exists x \in M, \neg p(x)$.

$p: \exists x \in M, p(x)$, 否定为 $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$.



点拨

全称命题的否定是特称命题,特称命题的否定是全称命题.

【逻辑条件】

- 充分条件:若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件.
- 必要条件:若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要条件.
- 充分不必要条件:若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.
- 必要不充分条件:若 $q \Rightarrow p$ 且 $p \not\Rightarrow q$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.
- 充分且必要条件:若 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 是 q 的充分且必要条件,简称充要条件.

【充分条件、必要条件、充要条件的判定】

- 定义法——运用充要条件的定义判断.
- 判断的关键是:正确运用定义(见下页表).

条 件	定 义	注 意
充分条件	若 A 成立, 则 B 就成立 (即 $A \Rightarrow B$), 就称条件 A 为结论 B 的充分条件	充分条件 A 能保证结论 B 成立, 但结论 B 成立时, 并不是非有条件 A 不可
必要条件	若 B 成立, 则 A 就成立 (即 $B \Rightarrow A$), 就称条件 A 为结论 B 的必要条件	必要条件 A 不能保证结论 B 成立, 但欲使结论 B 成立, 非有条件 A 不可
充要条件	若 A 成立, 则 B 成立, 同时又有若 B 成立, 则 A 成立 (即 $A \Leftrightarrow B$), 就称条件 A 为结论 B 的充要条件	即命题 A 与命题 B 为等价命题

2. 命题法——运用数学命题的条件与四种命题的内在联系进行分析判断。
判断的关键是: 掌握四种命题的关系 (见下表)。

命 题	条 件
原命题成立而逆命题不成立	充分非必要条件
原命题不成立而逆命题成立	必要非充分条件
原命题、逆命题都成立	充要条件
原命题、逆命题都不成立	既非充分又非必要条件

3. 集合法——运用集合的包含关系进行判断 (见下表)。

图 示			
集 合	$A \subseteq B$	$B \subseteq A$	$A = B$
命 题	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
条 件	A 是 B 的充分条件	A 是 B 的必要条件	A 是 B 的充要条件



典型例题

【例】已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件. 现有下列命题:

① s 是 q 的充要条件; ② p 是 q 的充分条件而不是必要条件; ③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件; ④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件; ⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件. 则正确命题的序号是 ().

A. ①④⑤

B. ①②④

C. ②③⑤

D. ②④⑤

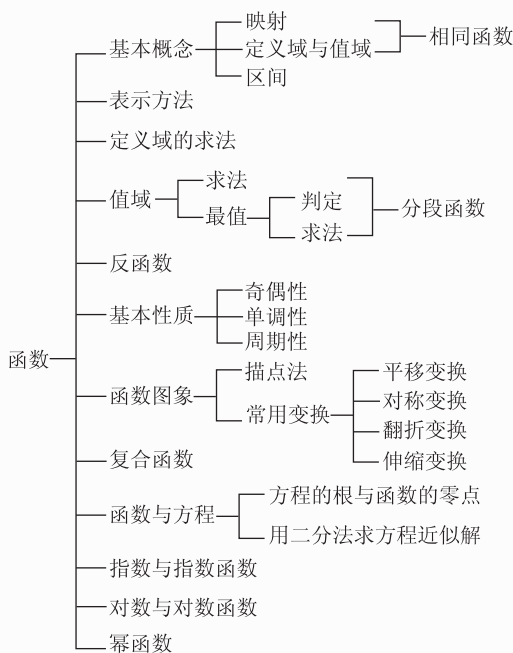
【解析】由已知得 $p \Rightarrow r \Leftarrow q$
 $\downarrow \nearrow$
 s

由上图知①②④正确,③⑤不正确,故选 B.

【答案】B

二 函数

知识网络



(一)映射与函数

概念精讲

【映射】 设 A, B 是两个非空集合, 如果按照某个对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作 $f: A \rightarrow B$.

【象和原象】 如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射, 那么 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象, a 叫做 b 的原象.

【函数】 设 A, B 都是非空的数集, 如果按某个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任

意一个数 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作: $y=f(x)$, 其中 $x \in A, y \in B$. 其中 x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 与 x 的值对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域.

【函数的三要素】

1. 三要素是指定义域、对应法则、值域.
2. 三要素中只要有一个不同, 两个函数就是不同的函数.
3. 三要素都相同的两个函数是同一个函数.

【区间】 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 规定:

1. 闭区间: 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$.
2. 开区间: 满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为 (a, b) .
3. 半开半闭区间: 满足 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$, 这里的实数 a, b 都叫做相应区间的端点.
4. 无穷区间: 满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的集合, 都称为无穷区间, 分别表示为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$. 全体实数也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$.

【函数表示方法】

1. 解析法: 把两个变量的函数关系, 用一个等式表示, 这个等式叫做函数的解析表达式, 简称解析式.
2. 列表法: 把两个变量之间的函数关系, 用列表格来表示的方法叫做列表法.
3. 图象法: 把两个变量之间的函数关系, 用图象来表示的方法叫做图象法.



点拨

(1) 在研究两个或两个以上的函数时, 要用不同的符号表示它们, 除 $f(x)$ 外, 还常用 $g(x), h(x)$ 等符号表示.

(2) 对函数 $f(x)$ 来说, $f(a)$ 表示的是 x 取值为 a 时的函数值, 是一个确定的数, 而不是函数.

(3) 研究函数先要指明函数的定义域, 对于用解析式表示的函数, 如果没有特别限制, 函数的定义域是指使函数表达式有意义的自变量取值的集合.

【函数的定义域】 函数关系中自变量可取值集合叫做函数的定义域. 求用解析式表示的函数的定义域, 就是求使函数各个组成部分有意义的集合的交集, 对实际问题中函数关系的定义域, 还需要考虑实际问题的条件.

【求函数的定义域的方法】 求函数的定义域时, 常有以下几种情况:

1. 如果 $f(x)$ 是整式, 那么函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.
2. 如果 $f(x)$ 是分式, 那么函数的定义域是使分母不等于零的实数的集合.
3. 如果 $f(x)$ 为偶次根式, 那么函数的定义域是使根号内的式子大于或等于零的实数的集合.
4. 如果 $f(x)$ 为对数函数, 要求真数必须大于零.

5. 如果 $f(x)$ 是由几个部分的数学式子构成的, 那么函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数集合.

6. 如果 $f(x)$ 是从实际问题得出的解析式时, 要结合实际考虑函数的定义域.

【函数值】 函数 $y=f(x)$, 当 x 在定义域内取一个确定的值 a 时, 对应的 y 值称为函数值, 记作 $f(a)$. 例如, 二次函数 $f(x)=x^2+x+1$ 在 $x=1$ 时, 函数值为 $f(1)=1^2+1+1=3$.

【函数的值域】 对于定义域内的所有 x 值对应的函数值形成的集合, 叫做函数的值域.

【确定函数值域的原则】

1. 当函数 $y=f(x)$ 用表格给出时, 函数的值域是指表格中实数 y 的集合.
2. 当函数 $y=f(x)$ 用图象给出时, 函数的值域指图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合.
3. 当函数 $y=f(x)$ 用解析式给出时, 函数的值域由函数的定义域及其对应法则确定.

【求函数的值域的方法】

1. 直接法——从自变量 x 的范围出发, 推出 $y=f(x)$ 的取值范围.
2. 分离常数法: 通过恒等变形从分式函数中分离出常数.
3. 配方法——二次函数或可以转化为二次函数的函数, 可用配方法将函数化为带有变量的式子的完全平方与常数的和的形式求值域.
4. 判别式法——运用方程思想, 依据二次方程有实根, 求出 y 的取值范围.
5. 换元法——通过变量代换转化为能求值域的函数, 适用于带有根式的函数.
6. 图象法——当一个函数图象可作时, 通过图象可求其值域.
7. 反解法——通过反解, 用 y 表示 x , 再由 x 的取值范围, 通过解不等式得出 y 的取值范围.

【最值】

1. 判定: 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是集合 M . 若存在 $x_0 \in M$, 对于任意 $x \in M$:
 - (1) 当 $f(x_0) \geq f(x)$ 时, 则称函数值 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.
 - (2) 当 $f(x_0) \leq f(x)$ 时, 则称函数值 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.
2. 求法: 函数的最值和值域是两个不同的概念, 但求最值和值域的方法有相通之处, 方法如下:

- (1) 利用求反函数的定义域.
- (2) 利用实数的性质.
- (3) 转化成求二次函数的最值.
- (4) 利用函数的单调性.
- (5) 判别式法.
- (6) 换元法.
- (7) 利用重要不等式.
- (8) 利用函数的有界性.
- (9) 利用数形结合.



点拨

转化成求二次函数的最值(或值域)求函数的最值(或值域)时必须要注意:(1) x^2 的系数不能等于零;(2)要验证 x^2 的系数为零时,所得 y 值对应的 x 是否存在,以确定该值的取舍;(3)要验证 y 取得最值时,所对应的 x 是否存在,以确定该函数的最值是否存在.

利用重要不等式求函数的最值(或值域)时必须要注意:(1)各项为正;(2)不等号的一端必为常数;(3)当 y 取得最值时,所对应的 x 必须存在.

【分段函数】 函数 $y=f(x)$ 中,对于自变量 x 的不同取值范围有着不同的对应法则,这样的函数通常称为分段函数,如函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in[0,+\infty) \\ -1, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

就是分段函数.分段函数是一个函数,而不是几个函数.

【复合函数】 如果 y 是 u 的函数,而 u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$, $u=g(x)$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$ 叫做函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数, u 叫做中间变量.如函数 $y=a^{x^2+x+1}$ 可以看成是由指数函数 $y=a^u$ 与二次函数 $u=x^2+x+1$ 复合而成的.

【复合函数的定义域】 若函数 $y=f(u)$ 的定义域是 B ,函数 $u=g(x)$ 的定义域是 A ,则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $D=\{x|x\in A, \text{且 } g(x)\in B\}$.

【反函数】 式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数,设它的定义域为 A ,值域为 C .从 $y=f(x)$ 中解出 x ,得到 $x=\varphi(y)$.如果 y 在 C 中的任何一个值,通过式子 $x=\varphi(y)$, x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应,那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数.这样的函数 $x=\varphi(y)$,叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

【反函数存在的条件】 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A ,值域为 C ,且函数所确定的映射是 A 到 C 的一一映射,则该函数存在反函数.

【原函数与反函数的关系】

1. 函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域、定义域.而反函数的定义域必须通过求原函数的值域得到.

2. 一般地,函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

3. 图象间的关系: $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一图象.

【函数的单调性】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A ,如果对于定义域 A 内某个区间 M 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 M 上是增函数;当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 M 上是减函数.

如果一个函数在某个区间 M 上是增函数或减函数,就说这个函数在这个区间 M 上具有单调性(区间 M 称为单调区间).

**点拨**

用定义法求函数单调性的步骤为:

- (1)取值:设 x_1, x_2 是该区间内的任意两个数,且 $x_1 < x_2$,可以确定 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$;
- (2)作差变形:作差 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$,并用因式分解、配方、有理化、通分等方法将差式向有利于判断差的符号的方向变形;
- (3)判号:确定差的符号,当符号不确定时,可以进行分类讨论;
- (4)结论:根据定义作出结论.

即:取值——作差——变形——判号——结论.

【函数单调性的图象特点及判定方法】 函数单调性反映在图象上有:若 $f(x)$ 在区间 I 上为增函数,则图象在 I 上的对应部分从左向右是上升的;若 $f(x)$ 在区间 I 上为减函数,则图象在 I 上的对应部分从左向右是下降的.

函数单调性的判定方法:

1. 利用定义.
2. 利用已知函数的单调性.
3. 利用函数图象.
4. 根据复合函数单调性的有关结论:同增异减.
5. 利用导数.

【函数的奇偶性】

1. 奇函数:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,如果对 D 内的任意一个 x ,都有 $f(-x) = -f(x)$,则这个函数叫做奇函数.

2. 偶函数:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,如果对 D 内的任意一个 x ,都有 $f(-x) = f(x)$,则这个函数叫做偶函数.

**点拨**

判断函数的奇偶性,一般有以下几种方法:

(1)定义法:如果函数的定义域不是关于原点对称的区域,则立即可判断该函数既不是奇函数也不是偶函数;若函数的定义域是关于原点对称的区域,则需再判断 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$,或判断 $f(x) \pm f(-x)$ 是否等于零,或判断 $\frac{f(x)}{f(-x)}$ 是否等于 ± 1 ,等等.

(2)图象法:奇(偶)函数的图象关于原点(y 轴)对称,反之也成立.

(3)性质法:偶函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为偶函数;奇函数的和、差仍为奇函数;奇(偶)数个奇函数的积、商(分母不为零)为奇(偶)函数;一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数.(注:利用上述结论要注意各函数的定义域) $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 为偶函数, $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

【奇偶函数图象的特点】 奇函数的图象关于原点成中心对称图形;反之,如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形,则这个函数是奇函数. 若 $f(x)$ 为奇函

数, $(x, f(x))$ 在其图象上, 则 $(-x, f(-x))$, 即点 $(-x, -f(x))$ 也在其图象上.

偶函数的图象关于 y 轴对称; 反之, 如果一个函数的图象关于 y 轴对称, 则这个函数是偶函数. 若 $f(x)$ 为偶函数, 点 $(x, f(x))$ 在其图象上, 则 $(-x, f(-x))$, 即点 $(-x, f(x))$ 也在其图象上.

【复合函数的单调性】 对于复合函数 $y=f[g(x)]$, 若 $u=g(x)$ 在区间 (a, b) 上是单调函数, 且 $y=f(u)$ 在区间 $(g(a), g(b))$ 或者 $(g(b), g(a))$ 上也是单调函数, 那么函数 $y=f[g(x)]$, 在区间 (a, b) 上的单调性如下表所示, 实施该法则首先应考虑函数的定义域.

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f[g(x)]$
↗	↗	↗
↗	↘	↘
↘	↘	↗
↘	↗	↘

上述规律可概括为“同增异减”.

【复合函数的奇偶性】 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 有公共定义域 A , 且具有奇偶性, 则在公共定义域 A 上有如下结论:

1. 奇 $\times$ 奇 = 偶
2. 奇 $\times$ 偶 = 奇
3. 偶 $\times$ 偶 = 偶
4. 奇 $\pm$ 奇 = 奇
5. 偶 $\pm$ 偶 = 偶

【平移变换】

1. 水平平移: 如 $y=f(x+a)$, 把函数 $y=f(x)$ 的图象, 沿 x 轴方向向左 ($a>0$) 或向右 ($a<0$) 平移 $|a|$ 个单位, 就得到 $y=f(x+a)$ 的函数图象.

2. 竖直平移: 如 $y=f(x)+a$, 把函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上 ($a>0$) 或向下 ($a<0$) 平移 $|a|$ 个单位, 就得到 $y=f(x)+a$ 的函数图象.

【对称变换】

1. 如函数 $y=f(-x)$, 其图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.
2. 如函数 $y=-f(x)$, 其图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称.
3. 如函数 $y=-f(-x)$, 其图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称.
4. 如函数 $y=f^{-1}(x)$, 其图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

【翻折变换】

1. 如 $y=|f(x)|$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方沿 x 轴翻到 x 轴上方, 去掉原 x 轴下方部分, 并保留 $y=f(x)$ 在 x 轴上方部分, 即得函数 $y=|f(x)|$ 的图象.

2. 如 $y=f(|x|)$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴左边沿 y 轴翻折到 y 轴右边部分, 替代原 y 轴左边部分并保留 $y=f(x)$ 在 y 轴右边部分, 即得函数 $y=f(|x|)$ 的图象.

【伸缩变换】

1. 如 $y=af(x)$ ($a>0$), 将函数 $y=f(x)$ 的图象纵坐标(横坐标不变)伸长到原来的 a ($a>1$)倍或压缩到原来的 a ($0<a<1$)得到.

2. 如 $y=f(ax)$ ($a>0$), 将函数 $y=f(x)$ 的图象横坐标(纵坐标不变)缩小到原来的 $\frac{1}{a}$ ($a>1$)或伸长到原来的 $\frac{1}{a}$ ($0<a<1$)倍得到.

(二)函数与方程

【函数的零点】 对于函数 $y=f(x)$, 我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

【函数的零点与方程的根的关系】 方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点

【二分法】 对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断、且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y=f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

【函数零点所在区间的判断】

1. 如果二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在闭区间 $[m, n]$ 上, 满足 $f(m) \cdot f(n) < 0$, 那么方程 $f(x)=0$ 在开区间 (m, n) 内有唯一解, 即存在 $x_1 \in (m, n)$, 使 $f(x_1)=0$; $f(x)=0$ 的另一解 $x_2 \in (-\infty, m) \cup (n, +\infty)$.

2. 如果函数 $f(x)$ 的图象在 $[m, n]$ 上是连续不断的一条曲线, 且满足 $f(m) \cdot f(n) < 0$, 那么方程 $f(x)=0$ 在区间 (m, n) 内至少有一解. 注意这里 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的图象连续的条件必不可少, 否则上述结论不成立.

【函数零点个数的确定】

1. 一元 n 次方程最多有 n 个实根, 一般常用分解因式的方法来解决.
2. 一元二次方程通常用判别式来判断根的个数.
3. 指数函数和对数函数等超越函数的零点个数问题, 我们一般用图象解决.
4. 利用函数的单调性来判断函数零点的个数.

【用二分法求函数 $f(x)$ 零点近似值的步骤】

1. 确定区间 $[a, b]$, 验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. 求区间 (a, b) 的中点 x_1 .
3. 计算 $f(x_1)$.
 - (1) 若 $f(x_1)=0$, 则 x_1 就是函数的零点;
 - (2) 若 $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, 则令 $b=x_1$ (此时零点 $x_0 \in (a, x_1)$);
 - (3) 若 $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, 则令 $a=x_1$ (此时零点 $x_0 \in (x_1, b)$).
4. 判断是否满足要求条件, 否则重复 2~4 步.

(三)指数与指数函数

概念精讲

【根式】 如果 $x^n = a (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根.

$$\sqrt[n]{0} = 0, (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$.

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0). \end{cases}$

【分数指数幂】 正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } n > 1)$. 负分数指数幂的意义是 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } n > 1)$.

【分数指数幂的运算法则】 设 $a > 0, b > 0, \alpha, \beta \in \mathbf{Q}$, 则:

$$1. a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};$$

$$2. a^\alpha \div a^\beta = a^{\alpha-\beta};$$

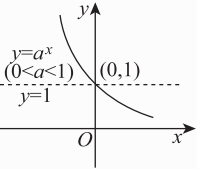
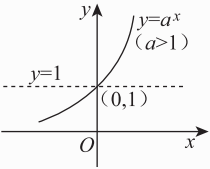
$$3. (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$$

$$4. (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha;$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

【指数函数】 一般地, 函数 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 叫做指数函数, 其中 x 是自变量, 函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

【指数函数的图象及性质】

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象特征		
函数性质	(1) $y = a^x > 0 (x \in \mathbf{R})$, 图象位于 x 轴的上方; (2) $f(0) = a^0 = 1$, 图象过 $(0, 1)$ 点; (3) 当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$; 当 $x < 0$ 时, $y > 1$; (4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	(1) $y = a^x > 0 (x \in \mathbf{R})$, 图象位于 x 轴的上方; (2) $f(0) = a^0 = 1$, 图象过 $(0, 1)$ 点; (3) 当 $x > 0$ 时, $y > 1$; 当 $x < 0$ 时, $0 < y < 1$; (4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

(四)对数与对数函数

概念精讲

【对数】 如果 $a(a>0, a\neq 1)$ 的 b 次幂等于 N , 就是 $a^b=N$, 那么数 b 就叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N=b$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数, 式子 $\log_a N$ 叫做对数式.

【对数的性质】

1. 负数和 0 没有对数.
2. $\log_a 1=0$.
3. 当 $a>1$ 时, 若 $N>1$, 则 $\log_a N>0$; 当 $a>1$ 时, 若 $0<N<1$, 则 $\log_a N<0$.
4. $\log_a a=1$.
5. 当 $a>1$ 时, 若 $N_1>N_2>0$, 则 $\log_a N_1>\log_a N_2$.
6. 如果 $\log_a N_1=\log_a N_2$, 那么 $N_1=N_2$; 如果 $N_1=N_2>0$, 对任意正数 a , 有 $\log_a N_1=\log_a N_2$.

【对数的运算法则】 设 $M>0, N>0, a>0, a\neq 1$, 则:

1. $\log_a (MN)=\log_a M+\log_a N$;
2. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$;
3. $\log_a M^n=n\log_a M (n\in\mathbf{R})$.

【对数恒等式和换底公式】

$$a^{\log_a N}=N (a>0, \text{且 } a\neq 1, N>0)$$

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a} (a>0, \text{且 } a\neq 1, N>0, b>0, \text{且 } b\neq 1)$$

【常用对数】 以 10 为底的对数叫做常用对数. $\log_{10} N$ 通常写作 $\lg N$.

【自然对数】 以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数, 叫做自然对数. $\log_e N$ 通常写作 $\ln N$.

【对数函数】 函数 $y=\log_a x (a>0, \text{且 } a\neq 1)$ 叫做对数函数, 其中 x 是自变量, 函数的定义域是 $(0, +\infty)$. 它是指数函数 $y=a^x (a>0, \text{且 } a\neq 1)$ 的反函数.

【对数函数的图象及性质】

	$a>1$	$0<a<1$
图 象	