

《高中二轮复习指导与训练》丛书

编委会

顾问 桑新华 高峰

丛书主编 阚兆成 尹燕云

本册主编 赵水祥 李炳奎 展黎明

本册编者 赵水祥 董付忠 常培琪

李炳奎 孙浩 夏凡军

武甲旺 赵剑锋 周德存

安士海 杨宏伟 丁秀明

袁承衍 展黎明 张波

目 录

第一编 主干知识系统训练

(1)函数的概念与性质	(1)
(2)函数的图象与应用	(3)
(3)函数综合	(5)
(4)导数及其应用(一)	(7)
(5)导数及其应用(二)	(8)
(6)三角函数	(10)
(7)三角恒等变换	(11)
(8)解三角形	(12)
(9)平面向量	(13)
(10)等差、等比数列的基本问题	(14)
(11)等差、等比数列的综合应用	(15)
(12)数列的实际应用	(16)
(13)不等式解法	(18)
(14)推理与证明(一)	(19)
(15)推理与证明(二)	(20)
(16)直线与圆	(21)
(17)圆锥曲线(一)	(22)
(18)圆锥曲线(二)	(24)
(19)圆锥曲线(三)	(26)
(20)空间几何体	(28)
(21)点、直线、平面之间的位置关系(一)	(30)
(22)点、直线、平面之间的位置关系(二)	(32)
(23)立体几何中的向量方法(理)(一)	(34)
(24)立体几何中的向量方法(理)(二)	(36)
(25)排列、组合与二项式定理	(38)
(26)统计与概率、随机变量(理)	(39)
(27)概率与统计(文)	(41)
(28)算法初步	(42)

第二编 回扣练习

(1)集合与简易逻辑	(44)
(2)函数(一)	(44)
(3)函数(二)	(45)
(4)导数及其应用(一)	(46)
(5)导数及其应用(二)	(47)
(6)三角函数(一)	(47)
(7)三角函数(二)	(48)
(8)平面向量	(49)
(9)数列(一)	(50)
(10)数列(二)	(50)
(11)不等式解法	(51)
(12)推理与证明	(52)
(13)直线与圆	(53)
(14)圆锥曲线(一)	(53)
(15)圆锥曲线(二)	(54)
(16)圆锥曲线(三)	(55)
(17)空间几何体	(55)
(18)点、直线、平面间的位置关系	(56)
(19)立体几何中的向量方法(理)	(57)
(20)排列、组合与二项式定理	(58)
(21)概率与统计(理)	(59)
(22)概率与统计(文)	(60)
(23)算法初步	(61)
(24)复数	(62)

第一编 主干知识系统训练

(1)函数的概念与性质

编写人 :许兴堂

一、选择题

- 下列函数中既是奇函数 ,又在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减的是().
A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = -|x+1|$
C. $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ D. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$
- 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2, \\ \log_3(x^2 - 1), & x \geq 2. \end{cases}$ 则 $f(f(2))$ 的值为().
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 函数 $y = \sqrt{x^2 + 1} + 1 (x < 0)$ 的反函数是().
A. $y = \sqrt{x^2 - 2x} (x < 0)$ B. $y = -\sqrt{x^2 - 2x} (x < 0)$
C. $y = \sqrt{x^2 - 2x} (x > 2)$ D. $y = -\sqrt{x^2 - 2x} (x > 2)$
- 已知 $f(x^5) = \lg x$ 则 $f(2) =$ ().
A. $\lg 2$ B. $\lg 32$ C. $\lg \frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{5} \lg 2$
- 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数 ,则 a 的值范围是().
A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1]$
C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
- 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ 则 $f(6)$ 的值为().
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $g(x) = \log_2 x (x > 0)$ 的图像关于原点对称 ,则 $f(x)$ 的表达式为().
A. $f(x) = \log_2 x (x > 0)$ B. $f(x) = \log_2(-x) (x < 0)$
C. $f(x) = -\log_2 x (x > 0)$ D. $f(x) = -\log_2(-x) (x < 0)$
- 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$ 则 $f(x)$ 的值域是().
A. $[-1, 1]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ C. $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$
- 已知函数 $f(x) = a \sin x - b \cos x$ (a, b 为常数 , $a \neq 0, x \in R$) 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 ,则函数 $y = f(\frac{3\pi}{4} - x)$ 是().

- A. 偶函数且它的图像关于点 $(\pi, 0)$ 对称
B. 偶函数且它的图像关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称
C. 奇函数且它的图像关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称
D. 奇函数且它的图像关于点 $(\pi, 0)$ 对称

10. 在下列四个函数中 ,满足性质 :“对于区间 $(1, 2)$ 上的任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ 恒成立 ”的只有().

- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = |x|$ C. $f(x) = 2$ D. $f(x) = x^2$

11. 如果函数 $y = a^x(a^x - 3a^2 - 1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数 ,那么实数 a 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{2}{3}]$ B. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ C. $(0, \sqrt{3}]$ D. $[\frac{3}{2}, +\infty)$

12. $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0 \\ e^{x-1}, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(1) + f(a) = 2$ 则 a 的所有可能值为().

- A. 1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

13. 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是_____.
14. 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 3 ,则 $a =$ _____.
15. 若函数 $f(x) = a^{|x-b|+2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数 ,则实数 a, b 的取值范围是_____.
16. 若 $f(x) = a \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 是偶函数 ,则 $a =$ _____.

三、解答题

17. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的函数 ,对于任意 x 满足 $f(x) = f(x+5)$,函数 $y = f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是奇函数 ,又知 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一次函数 ,在 $[1, 4]$ 上是二次函数 ,且在 $x = 2$ 时 ,函数取得最小值 ,最小值为 -5.

- (1)证明 $f(1) + f(4) = 0$;
(2)试求 $y = f(x)$ $x \in [1, 4]$ 的解析式 ;

18. 已知函数 $f(x) = |x - a|$, $g(x) = x^2 + 2ax + 1$ (a 为正常数) ,且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴上的截距相等.

(1) 求 a 的值 ;

(2) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

19. 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 是奇函数.

(1) 求 a, b 的值 ;

(2) 若对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立 , 求 k 的取值范围.

20. 对于函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 2$ ($a \neq 0$) , 若存在实数 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$ 成立 , 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

(1) 当 $a = 2$, $b = -2$ 时 , 求 $f(x)$ 的不动点 ;

(2) 若对于任何实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两相异的不动点 , 求实数 a 的取值范围 ;

(3) 在 (2) 的条件下 , 若 $y = f(x)$ 的图象上 A, B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点 , 且直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 是线段 AB 的垂直平分线 , 求实数 b 的取值范围.

21. 设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ ($a > 0$) ,

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的单调性 ;

(2) 求 a 的取值范围 , 使函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

22. 已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下性质 : 如果常数 $a > 0$, 那么该函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数 , 在

$[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数.

(1) 如果函数 $y = x + \frac{2^b}{x}$ ($x > 0$) 在 $(0, 4]$ 上是减函数 , 在 $[4, +\infty)$ 上是增函数 , 求 b 的值 ;

(2) 设常数 $c \in [1, 4]$, 求函数 $f(x) = x + \frac{c}{x}$ ($1 \leq x \leq 2$) 的最大值和最小值 ;

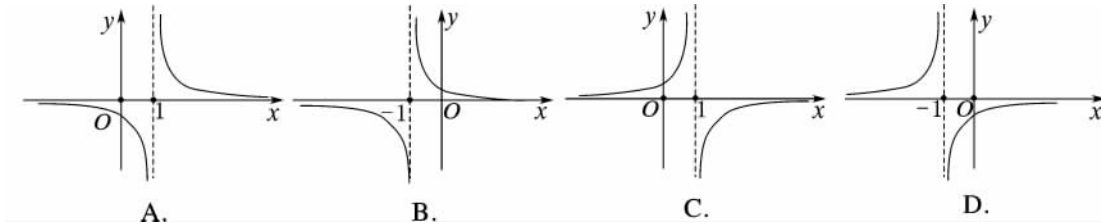
(3) 当 n 是正整数时 , 研究函数 $g(x) = x^n + \frac{c}{x^n}$ ($c > 0$) 的单调性 , 并说明理由.

(2)函数的图象与应用

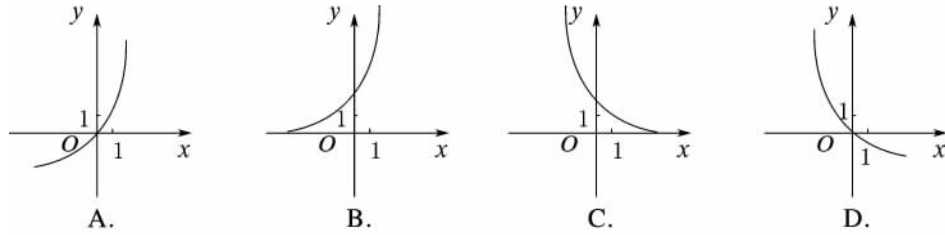
编写人 :许兴堂

一、选择题

1. 函数 $y = \frac{1-x}{x}$ ($x \neq 0$) 的反函数图像大致是().



2. 已知函数 $y = \log_2 x$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(1-x)$ 的图象是().



3. 《中华人民共和国个人所得税法》规定 ,公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税 ,超过 800 元的部分为全月应纳税所得额. 此项税款按下表分段累进计算. 某人一月份应交纳此项税款 26.78 元 ,则他的当月工资、薪金所得介于().

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

A. 800 ~ 900 元 B. 900 ~ 1200 元 C. 1200 ~ 1500 元 D. 1500 ~ 2800 元

4. 设函数 $y = f(x)$ 定义在实数集上 ,则函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$ 的图象关于().

A. 直线 $y=0$ 对称 B. 直线 $x=0$ 对称
C. 直线 $y=1$ 对称 D. 直线 $x=1$ 对称

5. 农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元 ,其他收入为 1350 元) ,预计该地区自 2004 年起的 5 年内 ,农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长 ,其他收入每年增加 160 元. 根据以上数据 ,2008 年该地区农民人均收入介于().

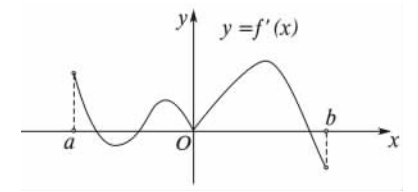
A. 4200 ~ 4400 元 B. 4400 ~ 4600 元
C. 4600 ~ 4800 元 D. 4800 ~ 5000 元

6. 设点 P 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图像 C 的一个对称中心 ,若点 P 到图像 C 的对称轴上的距离的最小值为 $\frac{\pi}{4}$,则 $f(x)$ 的最小正周期是().

A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

7. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) ,导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图像如右图所示 ,则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有极小值点().

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



8. 设 $3^x = \frac{1}{7}$,则().

A. $-2 < x < -1$ B. $-3 < x < -2$ C. $-1 < x < 0$ D. $0 < x < 1$

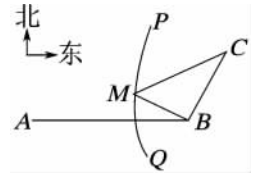
9. 已知变量 x, y 满足约束条件 $1 \leq x+y \leq 4$, $-2 \leq x-y \leq 2$. 若目标函数 $z = ax + y$ (其中 $a > 0$) 仅在点 $(3, 1)$ 处取得最大值 ,则 a 的取值范围是().

A. $a > 1$ B. $0 \leq a \leq 1$ C. $a \geq 1$ D. $1 < a < 2$

10. 某厂生产甲产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_1, b_1 千克 ,生产乙产品每千克需用原料 A 和原料 B 分别为 a_2, b_2 千克. 甲、乙产品每千克可获利润分别为 d_1, d_2 元. 月初一次性购进本月用原料 A、B 各 c_1, c_2 千克. 要计划本月生产甲、乙两种产品各多少千克才能使月利润总额达到最大. 在这个问题中 ,设全月生产甲、乙两种产品分别为 x 千克、 y 千克 ,月利润总额为 z 元 ,那么 ,用于求使总利润 $z = d_1x + d_2y$ 最大的数学模型中 ,约束条件为().

A. $\begin{cases} a_1x + a_2y \geq c_1, \\ b_1x + b_2y \geq c_2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1, \\ a_2x + b_2y \leq c_2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a_1x + a_2y \leq c_1, \\ b_1x + b_2y \leq c_2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1, \\ b_1x + b_2y = c_2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$

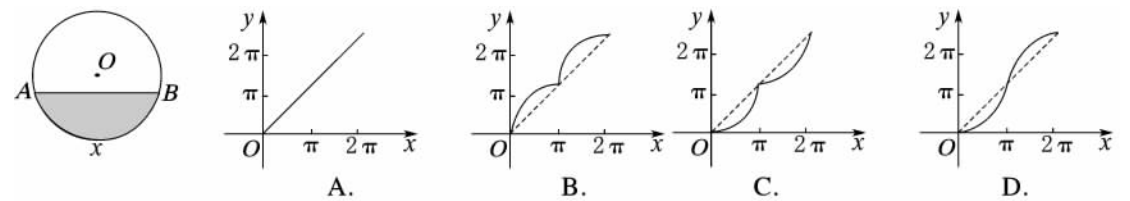
11. 如图 ,B 地在 A 地的正东方向 4km 处 ,C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2km 处 ,河流的沿岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2km ,现要在曲线 PQ 上任意选一处 M 建一座码头 ,向 B、C 两地转运货物 ,经测算 ,从 M 到 B、C 两地修建公路的费用都是 a 万元 /km ,那么修建这两条公路的总费用最低是().



A. $(\sqrt{7} + 1)a$ 万元 B. $(2\sqrt{7} - 2)a$ 万元

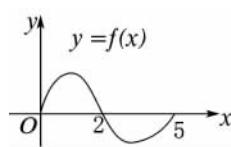
C. $2\sqrt{7}a$ 万元 D. $(\sqrt{7} - 1)a$ 万元

12. 如图所示 ,单位圆中弧 AB 的长为 x , $f(x)$ 表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍 ,则函数 $y = f(x)$ 的图像是().



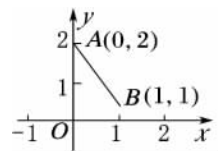
二、填空题

13. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如右图, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解是_____.



14. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国民生产总值) 4035 亿元. 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%. 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需_____年. (按 1999 年本市常住人口总数约 1300 万)

15. 设函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0, 1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1, 2]$ 上 $f(x) =$ _____.



16. 对 $a, b \in \mathbb{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$, 函数 $f(x) = \max\{|x+1|, |x-2|\}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最小值是_____.

三、解答题

17. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元.

- (1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?
- (2) 设一次订购量为 x 个, 零件的实际出厂单价为 P 元, 写出函数 $P = f(x)$ 的表达式;
- (3) 当销售商一次订购多少件时, 该厂获得的利润为 6000 元? (工厂售出一个零件的利润 = 实际出厂单价 - 成本)

18. 某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某种产品分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件, 为了估测以后每个月的产量, 以这三个月的产品数据为依据. 用一个函数模拟产品的月产量 y 与月份数 x 的关系. 模拟函数可选二次函数或函数 $y = a \cdot b^x + c$ (其中 a, b, c 为常数), 已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件, 请问用以上哪个函数作为模拟函数好? 说明理由.

19. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第 n 年 (今年为第一年) 的利润为 $500(1 + \frac{1}{2^n})$ 万元 (n 为正整数).

- (1) 设从今年起的前 n 年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元, 进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元 (须扣除技术改造资金), 求 A_n, B_n 的表达式;
- (2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进

行技术改造的累计纯利润?

20. 某段铁路线上依次有 A、B、C 三站, $AB = 5\text{km}$, $BC = 3\text{km}$. 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从 A 站发车, 8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行中, 假设列车从 A 站正点发车, 在 B 站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度 $v\text{km/h}$ 匀速行驶, 列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

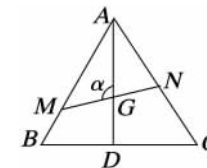
- (1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差;
- (2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求 v 的取值范围.

21. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为 $1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量}}$) 为 0.8, 要求清洗完后的清洁度为 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 分两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a ($1 \leq a \leq 3$). 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}$ ($x > a-1$), 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$, 其中 c ($0.8 < c < 0.99$) 是该物体初次清洗后的清洁度.

- (1) 分别求出方案甲以及 $c = 0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;
- (2) 若采用方案乙, 当 a 为某固定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最小? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

22. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, M、N 分别是边 AB、AC 上的点, 线段 MN 经过 $\triangle ABC$ 的中心 G, 设 $\angle MGA = \alpha$ ($\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$).

- (1) 试将 $\triangle AGM$ 、 $\triangle AGN$ 的面积 (分别记为 S_1 和 S_2) 表示为 α 的函数;
- (2) 求 $y = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ 的最大值与最小值.



(3)函数综合

编写人 :许兴堂

一、选择题

1. 函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 满足 $f(f(x)) = f(x)$, 则这样的函数个数共有().
A. 1 个 B. 4 个 C. 8 个 D. 10 个
2. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4})$ 等于().
A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. 4 D. $\frac{5}{2}$
3. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 R 上的函数, 且方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是().
A. $x^2 + x - \frac{1}{5}$ B. $x^2 + x + \frac{1}{5}$ C. $x^2 - \frac{1}{5}$ D. $x^2 + \frac{1}{5}$
4. 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x | f(x) < 0\}$, $P = \{x | f'(x) > 0\}$, 若 $M \subset P$, 则实数 a 的取值范围是().
A. $(-\infty, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
5. 设函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 且 $y = f(2x-1)$ 的图像过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 则 $y = f^{-1}(x)$ 的图像必过().
A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(1, \frac{1}{2})$ C. $(1, 0)$ D. $(0, 1)$
6. 用长度分别为 2、3、4、5、6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为().
A. $8\sqrt{5} \text{cm}^2$ B. $6\sqrt{10} \text{cm}^2$ C. $3\sqrt{55} \text{cm}^2$ D. 20cm^2
7. 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{19} |x-n|$ 的最小值为().
A. 190 B. 171 C. 90 D. 45
8. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4 (0 < a < 3)$, 若 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 1 - a$, 则().
A. $f(x_1) > f(x_2)$ B. $f(x_1) < f(x_2)$
C. $f(x_1) = f(x_2)$ D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定
9. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 当 $x \in [3, 4]$ 时, $f(x) = x-2$, 则().
A. $f(\sin \frac{1}{2}) < f(\cos \frac{1}{2})$ B. $f(\sin \frac{\pi}{3}) > f(\cos \frac{\pi}{3})$
C. $f(\sin 1) < f(\cos 1)$ D. $f(\sin \frac{3}{2}) > f(\cos \frac{3}{2})$
10. 若 $a, b, c > 0$ 且 $a(a+b+c) + bc = 4 - 2\sqrt{3}$, 则 $2a+b+c$ 的最小值为().
A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $2\sqrt{3} + 2$ D. $2\sqrt{3} - 2$

11. 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \lg x$. 设 $a = f(\frac{6}{5})$, $b = f(\frac{3}{2})$, $c = f(\frac{5}{2})$, 则().

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

12. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 记 $g(x) = f(x)[f(x) + 2f(2) - 1]$. 若 $y = g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是().

A. $[2, +\infty)$ B. $(0, 1) \cup (1, 2)$ C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

二、填空题

13. 在函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $f(0) = -4$, 则 $f(x)$ 有最_____值 (填“大”或“小”), 且该值为_____.

14. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x , 满足条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$, 若 $f(1) = -5$, 则 $f(f(5)) =$ _____.

15. 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$ _____.

16. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x =$ _____吨.

三、解答题

17. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 其图像关于直线 $x = 1$ 对称. 对任意 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

(1) 求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$;

(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数.

18. 函数 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 上, 满足 $f(x) = 2f(\frac{x}{2})$ 且 $f(1) = 1$, 在每个区间 $(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$ ($i = 1, 2, \dots$) 上, $y = f(x)$ 的图象都是平行于 x 轴的直线的一部分.

(1) 求 $f(0)$ 及 $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{4})$ 的值, 并归纳出 $f(\frac{1}{2^i})$ ($i = 1, 2, \dots$) 的表达式;

(2) 设直线 $x = \frac{1}{2^i}, x = \frac{1}{2^{i-1}}$, x 轴及 $y = f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i ($i = 1, 2, \dots$), 求 a_1, a_2 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 的值.

19. 已知 $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) 在区间 $[-1, 1]$ 上是增函数.

(1) 求实数 a 的值组成的集合 A ;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1, x_2 . 试问: 是否存在实数 m , 使得不等式 $m^2 + tm + 1 \geq |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1, 1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

20. 设 $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 若 $a + b + c = 0, f(0)f(1) > 0$, 求证:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 有实根;

(2) $-2 < \frac{a}{b} < -1$;

(3) 设 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个实根, 则 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq |x_1 - x_2| < \frac{2}{3}$.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + a \ln x$ ($x > 0$), $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$. 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 , 证明:

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1 + x_2}{2})$;

(2) 当 $a \leq 4$ 时, $|f'(x_1) - f'(x_2)| > |x_1 - x_2|$.

22. 设 a 为实数, 设函数 $f(x) = a\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1) 设 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, 求 t 的取值范围, 并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$;

(2) 求 $g(a)$;

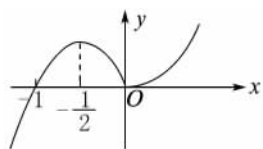
(3) 试求满足 $g(a) = g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a .

(4)导数及其应用(一)

编写人:许东平

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ 集合 $M = \{x | f(x) < 0\}$, $P = \{x | f(x) > 0\}$ 若 $M \subseteq P$ 则实数 a 的取值范围是().
A. $(-1, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
2. 对任意 x , 有 $f'(x) = 4x^3$, $f(1) = -1$ 则此函数为().
A. $f(x) = x^4$ B. $f(x) = x^4 - 2$ C. $f(x) = x^4 + 1$ D. $f(x) = x^4 + 2$
3. 若函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x) = -\sin x$ 则函数图象在点 $(4, f(4))$ 处的切线的倾斜角为().
A. 90° B. 0° C. 锐角 D. 钝角
4. 函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$ 在区间()内是增函数.
A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ B. $(\pi, 2\pi)$ C. $(2\pi, 3\pi)$ D. $(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$
5. 函数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值、最小值分别是().
A. 4, 14 B. 4, -16 C. -4, -15 D. 5, -16
6. 点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上任意一点 则点 P 到直线 $y = x - 2$ 的最小距离为().
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{3}$
7. 关于函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ 下列说法正确的是().
A. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x)$ 是增函数
B. 在区间 $(0, 2)$ 内 $f(x)$ 是减函数
C. 在区间 $(2, +\infty)$ 内 $f(x)$ 是增函数
D. 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 内 $f(x)$ 是增函数
8. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 上切线平行于 x 轴的点的坐标是().
A. $(-1, 2)$ B. $(1, -2)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$
9. 方程 $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ 的实根个数是().
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
10. 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图象如图所示 则函数 $g(x) = f(\log_{\frac{1}{2}} x)$ 的单调减区间是().
A. $[1, \sqrt{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$
C. $(0, 1]$ 和 $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, +1]$ 和 $[\sqrt{2}, +\infty)$
11. 已知 $y = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + (b+2)x + 3$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调增函数 则 b 的取值是().
A. $b < -1$ 或 $b > 2$ B. $b \leq -2$ 或 $b \geq 2$ C. $-1 < b < 2$ D. $-1 \leq b \leq 2$



12. 已知对数函数 $f(x) = \ln x$ 二次函数 $g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + 2x$ 若 $h(x) = f(x) - g(x)$ 存在单调递减区间 则 a 的取值范围是().
A. $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

二、填空题

13. 经过点 $(2, 0)$ 且与曲线 $y = \frac{1}{4x}$ 相切的直线方程为_____.
14. 函数 $f(x) = x^3 - px^2 - qx$ 的图象与 x 轴切于点 $(1, 0)$ 则 $f(x)$ 的极大值为_____ 极小值为_____.
15. 若函数 $g(x) = x^3 - ax^2 + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上是单调递减函数 则实数 a 的取值范围是_____.
16. 已知函数 $g(x) = \sin x + 5x$, $x \in (-1, 1)$ 如果 $g(1-a) + g(1-a^2) < 0$ 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 一艘轮船在航行中的燃料费和它的速度的立方成正比 已知速度为每小时 10 千米时的燃料费是每小时 6 元 而其他与速度无关的费用是每小时 96 元 问此轮船以何种速度航行时 能使行驶中每千米的费用总和最小?
18. 是否存在这样的 k 值 使函数 $f(x) = k^2x^4 - \frac{2}{3}x^3 - kx^2 + 2x + \frac{1}{2}$ 在 $(1, 2)$ 上递减 在 $(2, +\infty)$ 上递增?
19. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线 l 不过第四象限且斜率为 3 又坐标原点到切线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 若 $x = \frac{2}{3}$ 时 $y = f(x)$ 有极值.
(1) 求 a, b, c 的值;
(2) 求 $y = f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值和最小值.
20. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, $g(x) = ax^2 + x - 8$,
(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
(2) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 都有 $f(x) \geq g(x)$ 求实数 a 的取值范围.
21. 已知函数 $f(x) = kx^3 - 3(k+1)x - k^2 + 1$ ($k > 0$).
(1) 若 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 4)$ 求 k 的值;
(2) 在 (1) 的条件 当 $x > k$ 时 求证 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.
22. 在平面直角坐标系 xOy 中 有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C 动点 P 在 C 上 C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B 且向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 求:
(1) 点 M 的轨迹方程;(2) $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

(5)导数及其应用(二)

编写人 :许东平

一 选择题

- 下列说法正确的是().
 - 函数在闭区间上的极大值一定比极小值大
 - 函数在闭区间上的最大值一定是极大值
 - 函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的可导函数 ,则 $f'(x)>0$ 是函数 $y=f(x)$ 是增函数的充要条件
 - 对于 $f(x)=x^3+px^2+2x+1$,若 $|p|<\sqrt{6}$,则 $f(x)$ 无极值
- 如果函数 $f(x)=a^x(a^x-3a^2-1)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数 ,那么实数 a 的取值范围是().
 - $(0, \frac{2}{3}]$
 - $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
 - $(1, \sqrt{3})$
 - $(\frac{2}{3}, +\infty)$
- 已知一直线 $x-y+\frac{1}{3}=0$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}$ 相交于 A, B 两点 , O 是坐标原点 ,点 P 在抛物线的弧 $\widehat{AOB}$ 上 ,当 $S_{\triangle APB}$ 的面积取得最大值时 ,点 P 的坐标为().
 - $(1, \sqrt{2})$
 - $(\frac{1}{2}, 1)$
 - $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
 - $(2, 2)$
- $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = ()$.
 - $\ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x$
 - $\frac{2}{e} - 1$
 - $\frac{3}{2}$
 - $\frac{1}{2}$
- 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则 $f'(x)=0$ 有().
 - 分别位于区间 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 内三个根
 - 四个实根 $x_i=i (i=1, 2, 3, 4)$
 - 分别位于区间 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 内四个根
 - 分别位于区间 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 内三个根
- 设 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的恒大于零的可导函数 ,且满足 $f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) > 0$,则当 $a < x < b$ 时有().
 - $f(x) \cdot g(x) > f(b) \cdot g(b)$
 - $f(x) \cdot g(a) > f(a) \cdot g(x)$
 - $f(x) \cdot g(b) > f(b) \cdot g(x)$
 - $f(x) \cdot g(x) > f(a) \cdot g(a)$
- 一辆汽车以速度 $v=3t^2$ 的速度行驶 ,这辆汽车从 $t=0$ 到 $t=3$ 这段时间内所行驶的路程为().
 - $\frac{1}{3}$
 - 1
 - 3
 - 27
- 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \end{cases}$, 则 $\int_0^2 f(x) dx = ()$.

高三数学第一编第 15 页

- $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{5}{6}$
- 不存在

- a, b, c 成等比数列是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴无交点的().
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- $\int_0^1 (\sqrt{1-(x-1)^2} - x) dx = ()$.
 - $\frac{\pi-2}{4}$
 - $\frac{\pi}{2} - 1$
 - $\frac{\pi-1}{4}$
 - $\frac{\pi-1}{2}$
- 可导函数 $f(x), g(x)$,当 $x \in [0, 1]$ 时 ,恒有 $f'(x)g(x) < f(x)g'(x)$,若已知 α, β 是一锐角三角形的两个内角 ,且 $\alpha \neq \beta$,记 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$,则下列不等式正确的是().
 - $F(\cos \alpha) > F(\cos \beta)$
 - $F(\sin \alpha) > F(\sin \beta)$
 - $F(\sin \alpha) < F(\cos \beta)$
 - $F(\cos \alpha) < F(\sin \beta)$
- 一物体在变力 $F(x)=5-x^2$ (力单位 :N ,位移单位 :m)作用下 ,沿与 $F(x)$ 成 30° 方向作直线运动 ,则由 $x=1$ 运动到 $x=2$ 时 $F(x)$ 做的功为().
 - $\sqrt{3}J$
 - $\frac{2\sqrt{3}}{3}J$
 - $\frac{4}{3}\sqrt{3}J$
 - $2\sqrt{3}J$

二、填空题

- 函数 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ax$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递减函数 ,则 a 的取值范围是_____.
- 若 1N 的力使弹簧伸长 2cm ,要使弹簧伸长 10cm ,需要做_____焦耳的功.
- 已知函数 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}$,则过点 $P(2, 4)$ 的切线方程为_____.
- 质点运动的速度为 $v = (18t - 3t^2)$ (m/s) ,质点由开始运动到停止时所通过的路程为_____.

三、解答题

- 直线上的一点从时刻 $t=0(s)$ 开始以速度 $v=t^2-4t+3(m/s)$ 运动 ,求该点 :
 - 在 $t=4s$ 时的位置 ;
 - 前 4s 运动的路程 .

高三数学第一编第 16 页

18. 某银行准备新设一种定期存款业务 ,经预测 ,存款量与存款利率成正比 ,比例系数为 k ($k > 0$) ,贷款的利率为 4.8% ,假设银行吸收的存款能全部放贷出去.

(1)若存款利率为 x ($x \in (0, 0.048)$) ,试写出存款量 $g(x)$ 及银行应支付给储户的利息 $h(x)$ 与存款利率 x 之间的关系式 ;

(2)问存款利率为多少时 ,银行可获得最大收益 ?

19. 设函数 $f(x)$ 是三次函数 , $g(x)$ 是一次函数 , $f(x) - \frac{1}{2}g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x + 7$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极值 2 ,

(1)求 $f(x)$ 的解析式 ;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间.

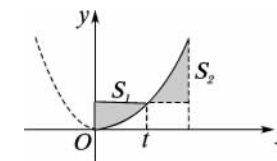
20. 设函数 $f(x) = (1+x)^2 - 2\ln(1+x)$,

(1)求 $f(x)$ 的单调区间 ;

(2)若当 $x \in [\frac{1}{e} - 1, e - 1]$ 时 ,不等式 $f(x) < m$ 恒成立 ,求实数 m 的取值范围 ;

(3)若关于 x 的方程 $f(x) = x^2 + x + a$ 在区间 $[0, 2]$ 上恰好有两个相异的实根 ,求实数 a 的取值范围.

21. 在区间 $[0, 1]$ 上 ,给定曲线 $y = x^2$,试在此区间内确定 t 的值 ,使图中的阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和最小.



22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx + d$,其中 a, b, c 是以 d 为公差的等差数列 ,且 $a > 0$,

$d > 0$. 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点 ,在 $[1 - \frac{2b}{a}, 0]$ 上 $f'(x)$ 在 x_1 处取得最大值 ,在 x_2 处取得最小值 ,将点 $(x_0, f(x_0))$ 、 $(x_1, f'(x_1))$ 、 $(x_2, f'(x_2))$ 依次记为 A, B, C .

(1)求 x_0 的值 ;

(2)若 $\triangle ABC$ 有一边平行于 x 轴 ,且面积为 $2 + \sqrt{3}$,求 a, d 的值.

(6)三角函数

编写人 袁成衍

一、选择题

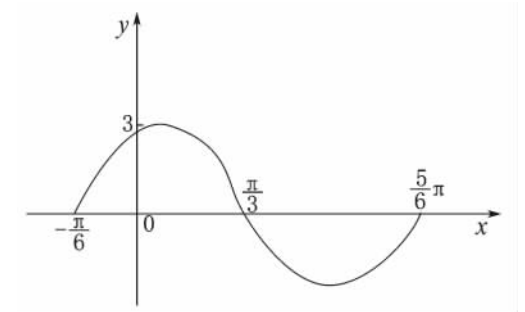
- $\cos(-690^\circ) + \tan 480^\circ$ 的值为().
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- 质点 M 从 A(1, 0) 出发沿圆 $x^2 + y^2 = 1$ 逆时针方向运动, 每秒转过的角度为 θ ($0 < \theta < \pi$) 过 3s 到达第四象限, 过 14s 又回到出发点, 则 θ 的值为().
A. $\frac{4\pi}{7}$ B. $\frac{2\pi}{7}$ C. $\frac{\pi}{7}$ D. $\frac{8\pi}{7}$
- 已知扇形的周长是 6cm, 面积是 2cm^2 , 则此扇形的中心角的弧度数是().
A. 1 B. 4 C. 1 或 4 D. 2 或 4
- 若角 α, β 终边落在直线 $y = 2x$ 上, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ ().
A. $\frac{2}{5}$ B. $\pm \frac{2}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\pm \frac{4}{5}$
- 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上是减函数, $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则下列不等式成立的是().
A. $f(\sin A) < f(\cos B)$ B. $f(\sin A) > f(\sin B)$ C. $f(\cos A) < f(\cos B)$ D. $f(\sin A) > f(\cos B)$
- 若角 $\alpha = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6}$, 则下列各式成立的是().
A. $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$ B. $\sin \alpha + \cos \alpha < 1$ C. $0 < \sin \alpha + \cos \alpha < 1$ D. $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$
- 已知 θ 是第三象限角, 则 $\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta}$ 可化简为().
A. $\sin \theta \cdot \cos \theta$ B. $2\sin \theta \cdot \cos \theta$ C. $-\sin \theta \cdot \cos \theta$ D. $-2\sin \theta \cdot \cos \theta$
- 已知函数 $f(x) = a\sin x - b\cos x$ (a, b 为常数, $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$) 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处取得最小值, 则函数 $y = f(\frac{3\pi}{4} - x)$ 是().
A. 偶函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称 B. 偶函数且它的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称
C. 奇函数且它的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称 D. 奇函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
- 已知 $\sin \alpha > \sin \beta$, 则下列命题正确的是().
A. 若 α, β 在第一象限, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$ B. 若 α, β 在第二象限, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$
C. 若 α, β 在第三象限, 则 $\cos \alpha > \cos \beta$ D. 若 α, β 在第四象限, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$
- 设点 P 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象 C 的一个对称中心, 若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值 $\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是().
A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$
- 若函数 $y = 2\sin \omega x$ ($1 < \omega < 3$) 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上最大值为 $\sqrt{3}$, 则 $\omega =$ ().
A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 设 $a > 0$, 对于函数 $f(x) = \frac{\sin x + a}{\sin x}$ ($0 < x < \pi$), 下列结论正确的是().
A. 有最大值而无最小值 B. 有最小值而无最大值

C. 有最大值且有最小值

D. 既无最大值又无最小值

二、填空题

- 设函数 $f(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$), 若 $f(x) + f'(x)$ 是奇函数, 则 $\varphi =$ _____.
- 已知 $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\tan \theta =$ _____.
- 如图是 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图像, 则其解析式为 _____.



- 下列命题:
(1) $y = \cos x$ 在第一象限为单调递减函数;
(2) 函数 $y = \tan|x|$ 的最小正周期是 π ;
(3) $y = \sin \frac{1}{2}x$ 的图象可由 $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ 的图象右移 $\frac{10\pi}{3}$ 得到;
- 点 $(-\frac{7\pi}{12}, 0)$ 是函数 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{4})$ 图像的一个对称中心.

以上正确命题的序号为(把正确命题的序号都填上) _____.

三、解答题

- 已知 $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2}{3}\pi$, $\sin(\alpha - \frac{2}{3}\pi) = m$, 求 $\tan(\frac{4}{3}\pi - \alpha)$ 的值.
- 已知 $f(x) = x^2 \cos x - x \sin x + \sqrt{2}$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\theta \in (0, \pi)$,
(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 求 $f(x)$ 的最值;
(2) 求 θ 范围使 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 上是单调函数.
- 若函数 $g(x) = 2a\sin 2x$ (a 是不为零的常数) 的图象向左平移 $\frac{\theta}{2}$ ($0 < \theta < \pi$) 个单位后得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 而函数 $y = f(x)$ 在实数集上的值域为 $[-2, 2]$, 且在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上是单调递减函数.
(1) 求 α 和 θ 的值;
(2) 若角 α 和 β 的终边不共线, $f(\alpha) + g(\alpha) = f(\beta) + g(\beta)$, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.
- 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 ($\omega > 0, \pi < \varphi < 2\pi$), 它的一条对称轴方程为 $x = \frac{3\pi}{4}$, 且函数在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数, 试求函数的解析式.
- 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x + a\sin x \cos x$, $f(\frac{\pi}{6}) = 0$.
(1) 求实数 a ;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调增区间;
(3) 若函数 $f(x)$ 的图像按向量 $m = [\frac{\pi}{6}, -1]$ 平移后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的解析式.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 解 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$.
(1) 求角 B 的大小;
(2) 设 $m = (\sin A, \cos 2A)$, $n = (-6, -1)$, 求 $m \cdot n$ 的最小值.

(7)三角恒等变换

编写人 袁成衍

一、选择题

1. $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$ 的值为().
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
2. 若 $\tan A \cdot \tan B = \tan A + \tan B + 1$ 则 $\cos(A+B)$ 为().
A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
3. 已知 $\sin(x - \frac{3}{4}\pi)\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$ 则 $\cos 4x$ 为().
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $y = \cos^2 x + \cos x \sin x$ 的值域为().
A. $[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}]$ B. $[-2, 2]$ C. $[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 2]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
5. 使函数 $y = \sqrt{3}\sin(2x + \varphi) + \cos(2x + \varphi)$ 为偶函数 则在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上是减函数的 φ 的一个值为().
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{4}{3}\pi$
6. 若关于 x 的方程 $x^2 - x\cos A\cos B + 1 - \cos C = 0$ 的两根满足条件 $x_1 + x_2 = \frac{x_1 x_2}{2}$ 则以 A, B, C 为角的 $\triangle ABC$ 的形状是().
A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等腰直角三角形 D. 既不是直角三角形也不是等腰三角形
7. 发电厂发出的电是三相交流电, 它的三根导线上的电流强度分别是关于时间 t 的函数: $I_A = I \cdot \sin \omega t$, $I_B = I \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$, $I_C = I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, 且 $I_A + I_B + I_C = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), 则 φ 等于().
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$
8. 若 $y = a\sin \theta - b\cos \theta = -\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi)$, ($a \cdot b \neq 0$) 则 $\tan \varphi =$ ().
A. $-\frac{a}{b}$ B. $-\frac{b}{a}$ C. $\frac{b}{a}$ D. $\frac{a}{b}$
9. 将函数 $y = \sin x \cdot f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 再作关于 y 轴的对称变换 得到 $y = \cos 2x$ 的图像 则 $f(x)$ 可以是().
A. $2\sin x$ B. $2\cos x$ C. $-2\sin x$ D. $-2\cos x$
10. 设 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 则函数 $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x - \sin^2 x}$ 的最小值是().

高三数学第一编第 21 页

- A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{4}$

11. 已知 θ 是三角形中的一个最小内角, 且 $a\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} - a\sin^2 \frac{\theta}{2} = a + 1$, 则 a 的取值范围是().
A. $a < -1$ B. $a < -2$ C. $a \leq -3$ D. $a \geq -3$

12. 已知 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{3}$ 则 $\cos(\alpha + \beta) =$ ().

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

二、填空题

13. 若点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 在直线 $y = -2x$ 上 则 $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha$ 的值是_____.
14. $\cos 20^\circ + \cos 140^\circ =$ _____.
15. 若 $f(x) = 2\cos^2 x - 1 + \cos 2x \tan 2x$ 也可以写成 $f(x) = a\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ($a > 0$), 则 $a =$ _____.
16. 若 α 为第四象限角, 且 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$ 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

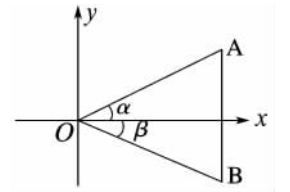
三、解答题

17. 若 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\cos \beta = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 求 $2\alpha + \beta$ 的值.

18. 已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, $\vec{m} = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{n} = (\sin A, \cos A)$, $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1$,
(1) 求 $\angle A$ 的度数;

- (2) 若 $\frac{1 + \sin 2B}{\sin^2 B - \cos^2 B} = 3$ 求 $\tan B$ 的值.

19. 如图, α 终边经过点 $A(1 + \cos x, \sin x)$, β 的终边过点 $B(1 - \cos x, -\sin x)$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $x \in (0, \pi)$.



- (1) 用 x 表示 α, β ;
(2) 证明 $\angle AOB$ 的定值;
(3) 当 x 取何值时, $\triangle AOB$ 面积最大, 最大值为多少?
20. 已知 $f(x) = \sin^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + 3\cos^2 \omega x$ ($\omega > 0$)
(1) 若 $f(x + \theta)$ 是周期为 π 的偶函数, 求 ω, θ 的值;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 上是增函数, 求 ω 的最大值.

21. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - a\sin(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{a}{4}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 的最大值为 2, 求实数 a 的值.

22. 已知函数 $f(x) = 2\cos x \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\sin^2 x - \cos x \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

- (1) 写出函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调区间;

- (2) 设 $\omega > 0$ 为常数, 若函数 $y = f(\omega x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, 求 ω 的取值范围.

- (3) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 试比较 $2x + \sqrt{3}$ 与 $f(x)$ 的大小.

高三数学第一编第 22 页

(8)解三角形

编写人:袁成衍

一、选择题

1. $\triangle ABC$ 中,已知 $a=4$ $b=4\sqrt{2}$ $B=45^\circ$ 则 A ().
A. 30° B. 120° C. 60° D. 30° 或 120°
2. $\triangle ABC$ 中 $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 它的对角为 15° 则 $\triangle ABC$ 外接圆直径().
A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\sqrt{3}+1$
3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a^2+b^2=c^2+\sqrt{2}ba$ 则 $C=($).
A. 30° B. 150° C. 45° D. 135°
4. $\triangle ABC$ 为钝角三角形 $a=3$ $b=4$ $c=x$ c 为钝角 则有().
A. $5 < x < 7$ B. $x < 5$ C. $1 < x < 5$ D. $1 < x < 7$
5. $\triangle ABC$ 中 $A=30^\circ$ $a=5$ $b=\sqrt{113}$ 解此三角形 解的个数为().
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
6. 已知 在 $\triangle ABC$ 中 $\frac{c}{b}=\frac{\cos C}{\cos B}$ 则此三角形为().
A. 直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 等腰三角形 D. 等腰或直角三角形
7. 直角三角形的斜边长为 1 则其内切圆半径的最大值为().
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}-1$
8. 在 $\triangle ABC$ 中 角 A B 的对边分别为 a b 且 $A=2B$ 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是().
A. $(0, \sqrt{3})$ B. $(1, 2)$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, 2)$
9. 在 $\triangle ABC$ 中 $b=1$ $B=45^\circ$ 若此三角形有两解 则 a 的取值范围是().
A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(1, \sqrt{2}]$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1]$
10. 在 $\triangle ABC$ 中 角 A B C 所对三边长分别为 a b c 已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$ 则 $\cos B$ 等于().
A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{11}{14}$ C. $\frac{9}{11}$ D. $\frac{7}{8}$
11. 在 $\triangle ABC$ 中 a 、 b 、 c 分别为角 A B C 所对的边. 如果 $2b=a+c$ $B=30^\circ$ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ 那么 $b=($).
A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $1+\sqrt{3}$ C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. $2+\sqrt{3}$

12. $\triangle ABC$ 中 $a=4\sin 10^\circ$ $b=2\sin 50^\circ$ $\angle C=70^\circ$ 则 $S_{\triangle ABC}=($).

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{5}$

二、填空题

13. $\triangle ABC$ 中 $a=1$ $b=2$ $c=60^\circ$ 则 $C=$ _____.
14. $\triangle ABC$ 中 $A=120^\circ$ $B=30^\circ$ $a=8$ $c=$ _____.
15. $\triangle ABC$ 中 若 $b=ac\cos C$ 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.
16. 已知 A B 是锐角三角形的两个内角 有下列不等式 :① $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$;② $\sin A + \cos A = 1$;③ $\sin(A+B) > \cos(A+B)$;④ $\cos A + \sin B < 1$. 其中正确的序号是_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中 角 A B C 所对三边长分别为 a 、 b 、 c . 已知 $c=10$ $\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ 求 a 、 b 及 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径.

18. $\triangle ABC$ 中 $b-c=2a\cos(60^\circ+C)$ 求 A .

19. 某观测站 C 在城 A 的南 20° 西的方向 向 A 城出发有一条公路 走向是南 40° 东 由 C 处测得距点 C 为 31 公里的公路上的 B 处 有一人正沿公路向 A 城走去 走了 20 公里后到达 D 处 此时 CD 间距离为 21 公里 问这人还走多少公里到达 A 城?

20. 在 $\triangle ABC$ 中 A B C 所对边的边长分别为 a 、 b 、 c $A > B > C$ 且 $A=2C$ $b=4$ $a+c=8$ 求边长 a 、 c .

21. 在 $\triangle ABC$ 中 a 、 b 、 c 是角 A B C 所对的边 且 $\cos 2B + 2\cos B = 2\cos^2(A+C)$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}$ 求 $a+c$ 的最小值.

22. 在 $\triangle ABC$ 中 角 A B C 的对边分别为 a 、 b 、 c 且满足 $(2a-c)\cos B = b\cos C$.

(1)求角 B 的大小;

(2)设 $m=(\sin A, \cos 2A)$ $n=(4k, 1)$ ($k > 1$) $m \cdot n$ 的最大值为 5 求 k 的值.

(9)平面向量

编写人 :许兴堂

一、选择题

1. 化简 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} =$ ().
A. 0 B. 0 C. $\overrightarrow{AD}$ D. $\overrightarrow{CB}$
2. 在四边形 ABCD 中 $\overrightarrow{AB} = a + 2b$ $\overrightarrow{BC} = -4a - b$ $\overrightarrow{CD} = -5a - 3b$ 其中 a、b 不共线 则四边形 ABCD 为().
A. 平行四边形 B. 矩形 C. 梯形 D. 菱形
3. 已知 $a = (-2, 5)$ $|b| = 2|a|$ 若 a 与 b 反向 则 $b =$ ().
A. $(-4, 10)$ B. $(4, -10)$ C. $(-1, \frac{5}{2})$ D. $(1, -\frac{5}{2})$
4. 已知 $|a| = 8$ e 为单位向量 它们之间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 则 a 在 e 方向上的投影为().
A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $4\sqrt{2}$ D. $8 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 已知正方形 ABCD 的边长为 1 设 $\overrightarrow{AB} = a$ $\overrightarrow{BC} = b$ $\overrightarrow{AC} = c$ 则向量 $2a + 3b + c$ 的模等于 ().
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
6. 已知点 A(x, 2) B(5, 1) C(-4, 2x) 在同一条直线上 那么 x 等于().
A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 2 或 3 C. $\frac{7}{2}$ D. 2 或 $\frac{7}{2}$
7. 已知 $|a| = 2$ $|b| = 4$ a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 以 a、b 为邻边作平行四边形 则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为().
A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{17}$ D. $3\sqrt{2}$
8. 已知 $a + b + c = 0$ $|a| = 1$ $|b| = 2$ $|c| = \sqrt{2}$ 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ 的值为().
A. 7 B. $\frac{7}{2}$ C. -7 D. $-\frac{7}{2}$
9. 平面上不共线的 4 个点 A、B、C、D 若 $(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -6$ 则 $\triangle ABC$ 是 ().
A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 钝角三角形 D. 等边三角形
10. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心 平面上一点 P 使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 则 P 是 $\triangle ABC$ 的().
A. 外心 B. 内心 C. 垂心 D. 重心
11. 已知 $\overrightarrow{OP} = (2, 1)$ $\overrightarrow{OA} = (1, 7)$ $\overrightarrow{OB} = (5, 1)$ 设 M 为直线 OP 上一点 则当 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 有最大值时 $\cos \angle AMB$ 的值为().
A. $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$ B. $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ C. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

12. 已知直线 $y = 2x$ 上一点 P 的横坐标为 a 有两个点 A(-1, 1) B(3, 3) 那么使向量 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 的夹角为钝角的一个充分但不必要的条件是().

- A. $-1 < a < 2$ B. $0 < a < 1$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $0 < a < 2$

二、填空题

13. 在 $\square ABCD$ 中 $\overrightarrow{AB} = a$ $\overrightarrow{AD} = b$ $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$ M 为 BC 的中点 则 $\overrightarrow{MN} =$ _____.
14. 若三点 A(2, 2) B(a, 0) C(0, b) ($ab \neq 0$) 共线 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值等于 _____.
15. 已知向量 $a = (1, \sin \theta)$ $b = (1, \cos \theta)$ 则 $|a - b|$ 的最大值为 _____.
16. 在直角坐标系 xOy 中 已知点 A(0, 1) 和点 B(-3, 4) 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $|\overrightarrow{OC}| = 2$ 则 $\overrightarrow{OC} =$ _____.

三、解答题

17. 已知向量 $a = (3, -4)$. 求 : (1) 与 a 平行的单位向量 b ; (2) 与 a 垂直的单位向量 c.
18. 若 $a = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ $b = (\cos \beta, \sin \beta)$ 且 $|ka + b| = \sqrt{3}|a - kb|$ 其中 $k > 0$.
(1) 用 k 表示 $a \cdot b$;
(2) 求 $a \cdot b$ 的最小值 并求出此时 a 与 b 所成的角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 的大小.
19. 某人在静水中游泳 速度为 $4\sqrt{3}$ km/h.
(1) 如果他径直游向河对岸 水的流速为 4 km/h 他实际沿什么方向前进? 速度大小为多少?
(2) 他必须朝哪个方向游才能沿水流垂直的方向前进? 实际前进的速度大小为多少?
20. 已知二次函数 $f(x)$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(1-x) = f(1+x)$ 成立 设向量 $a = (\sin \theta, 2)$, $b = (2\sin \theta, \frac{1}{2})$ $c = (\cos 2\theta, 1)$ $d = (1, 2)$ 当 $\theta \in [0, \pi]$ 时 求不等式 $f(a \cdot b) > f(c \cdot d)$ 的解集.
21. 已知定点 R(0, -3) 点 P 在 x 轴上 $PR \perp PM$ 线段 PM 与 y 轴交于点 Q 且满足 $\overrightarrow{QM} = 2\overrightarrow{PQ}$.
(1) 若点 P 在 x 轴上运动 求点 M 的轨迹 E 的方程 ;
(2) 求轨迹 E 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的切线 l_0 的方程 ;
(3) 若 (2) 中的线段 l_0 与 y 轴交于点 G 过 G 的直线 l 与轨迹 E 交于 A、B 两点 D 点的坐标为 (0, 1) 当 $\angle ADB$ 为钝角时 求直线 l 的斜率的取值范围.
22. 在直角坐标平面中 已知点 $P_1(1, 2)$ 、 $P_2(2, 2^2)$ 、...、 $P_n(n, 2^n)$ $n \in \mathbb{N}^*$. 对平面上任一点 A_0 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点、 A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点、...、 A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.
(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0 A_2}$ 的坐标 ;
(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时 点 A_2 的轨迹是函数 $y = f(x)$ 的图象 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数 且当 $x \in (0, 3]$ $f(x) = \lg x$. 求以曲线 C 为图象的函数在 $(1, 4]$ 上的解析式 ;
(3) 对任意偶数 n 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0 A_n}$ 的坐标.

(10)等差、等比数列的基本问题

编写人 :王 凯

一、选择题

1. 已知数列 $10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, \dots, 10^{\frac{n}{5}}$ 的前 n 项之积不超过 10^3 ,则 n 的最大值为().
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
2. 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 ,且 $S_n = n^2$,则 $\{a_n\}$ 是().
A. 等比数列 ,但不是等差数列 B. 等差数列 ,但不是等比数列
C. 等差数列 ,而且也是等比数列 D. 既非等比数列又非等差数列
3. 已知实数 a, b, c 成等比数列 , x, y 是实数 , a, x, b 和 b, y, c 均成等差数列 ,且 $xy \neq 0$,那么 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y}$ 的值是().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 三个数 $\frac{1}{m}, 1, \frac{1}{n}$ 成等差数列 ,又 $m^2, 1, n^2$ 成等比数列 ,则 $\frac{m^2 + n^2}{m + n}$ 等于().
A. - 3 B. - 3 或 - 1 C. - 1 D. - 3 或 1
5. 数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列 ,且 a_7, a_{10}, a_{15} 是等比数列 $\{b_n\}$ 的连续三项 ,若 $b_1 = 3$,则 $b_n =$ ().
A. $3 \cdot (\frac{5}{3})^{n-1}$ B. $3 \cdot (\frac{5}{8})^{n-1}$ C. $3 \cdot (\frac{3}{5})^{n-1}$ D. $3 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$
6. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列 ,首项 $a_1 > 0$, $a_{2003} + a_{2004} > 0$, $a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$,则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是().
A. 4005 B. 4006 C. 4007 D. 4008
7. 已知 $-1, a_1, a_2, -4$ 成等差数列 , $-1, b_1, b_2, b_3, -4$ 成等比数列 ,则 $\frac{a_2 - a_1}{b_2}$ 等于().
A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$
8. 已知 $x > 0, y > 0$,且 x, a, b, y 成等差数列 , x, c, d, y 成等比数列 , $\alpha = \frac{(a+b)^2}{cd}$,则 α 的取值范围是().
A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 4]$ C. $[4, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
9. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列 ,如果 $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{97} = 50$,那么 $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{99}$ 的值是().
A. - 82 B. - 78 C. - 148 D. - 182
10. 等差数列 $\{a_n\}$ 中 ,前 4 项的和为 40 ,后 4 项的和为 80 ,所有项的和为 210 ,则项数 n 为().
A. 12 B. 14 C. 16 D. 18
11. 一个等比数列前 n 项和 $S_n = ab^n + c$, a, b, c 为常数 ,且 $a \neq 0, b \neq 0$ 且 $b \neq 1$,则 a, b, c 必须满足的条件是().
A. $a + b = 0$ B. $a + c = 0$ C. $b + c = 0$ D. $a + b + c = 0$
12. 一个等差数列共有 10 项 ,其中奇数项之和为 $\frac{25}{2}$,偶数项之和为 15 ,则这个数列的第 6 项

是().

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题

13. 关于数列有下面 4 个判断 :

- ① 若 a, b, c, d 成等比数列 ,则 $a + b, b + c, c + d$ 也成等比数列 ;
② 若数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列也是等比数列 ,则 $\{a_n\}$ 为常数列 ;
③ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_n = a^n - 1 (a \in \mathbb{R})$,则 $\{a_n\}$ 为等差或等比数列 ;
④ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 ,且公差不为零 ,则数列 $\{a_n\}$ 中不会有 $a_m = a_n (m \neq n)$.
其中正确判断的序号是_____ (注 :把你认为是正确判断的序号都填上) .

14. 若数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是等差数列 ,则数列 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 也为等差数

列 ,类比上述性质 ,相应地 ,若数列 $\{c_n\}$ 是等比数列 ,且 $c_n > 0 (n \in \mathbb{N}^*)$,则有数列 _____ ($n \in \mathbb{N}^*$) 也是等比数列 .

15. 定义一种运算 “ $*$ ” 对于自然数 n 满足以下运算性质 :

- ① $1 * 1 = 1$ ② $(n + 1) * 1 = 3(n * 1)$

则 $n * 1$ 用含 n 的代数式表示的是_____ .

16. 设数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$,则它的通项公式 $a_n =$ _____ .

三、解答题

17. 已知四个数的前 3 个成等差 ,后三个成等比 ,中间两数之积为 16 ,前后两数之积为 -128 ,求这四个数 .

18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$,都有 $S_n = 2a_n - 3n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项与递推关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$;

(2) 先阅读下面定理 ,若数列 $\{a_n\}$ 有递推关系 $a_{n+1} = Aa_n + B$,其中 A, B 为常数 ,且 $A \neq 1, B \neq$

0 ,则数列 $\{a_n - \frac{B}{1-A}\}$ 是以 A 为公比的等比数列 ,请你在第 (1) 题的基础上应用本定理 ,求数列

$\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $a_n + 2S_n \cdot S_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

(1) 求证 : $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是等差数列 ;

(2) 求 a_n 的表达式 ;

(3) 若 $b_n = 2(1 - n) \cdot a_n (n \geq 2)$,求证 : $b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 < 1$.

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$,其中 $a_1 = b_1$,且对于某个自然数 n 有 $a_{2n+1} = b_{2n+1}$,试比较 a_{n+1} 与 b_{n+1} 的大小 .

21. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 6, a_2 = b_2 = 4, a_3 = b_3 = 3$,且数列 $\{a_{n+1} - a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是等差数列 ,数列 $\{b_n - 2\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是等比数列 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 是否存在 $k \in \mathbb{N}^*$,使 $a_k - b_k \in (0, \frac{1}{2})$? 若存在 ,求出 k 的值 ,若不存在 ,请说明理由 .

22. 正数数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 :对于任意的自然数 n, a_n, b_n, a_{n+1} 成等差数列 , b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 成等比数列 .

(1) 证明 :数列 $\{\sqrt{b_n}\}$ 为等差数列 ;

(2) 若 $a_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = 3$,求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(11)等差、等比数列的综合应用

编写人:王 凯

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_2 + a_8 = 16$ $a_4 = 6$,则公差 d 的值是().
A. 1 B. 2 C. - 1 D. - 2
2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_2 + a_6 + a_{16}$ 为一确定的常数,则下列各个和中,也为确定的常数的
是().
A. S_{13} B. S_{15} C. S_{17} D. S_{19}
3. 若 a 、 b 、 c 是互不相等的实数,且 a 、 b 、 c 成等差数列, c 、 a 、 b 成等比数列,则 $a:b:c$ 等于
().
A. $(-2):1:4$ B. $1:2:3$ C. $2:3:4$ D. $(-1):1:3$
4. 已知一个等差数列的前 9 项的算术平均数为 10,前 10 项的算术平均数为 11,则此等差
数列的公差为().
A. 1 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. 4
5. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列 $a_1 > 0$ $a_6 + a_7 > 0$ $a_6 \cdot a_7 < 0$,则使其前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自
然数 n 是().
A. 11 B. 12 C. 13 D. 14
6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $\frac{a_7}{a_4} = 2$,则 $\frac{S_{13}}{S_7}$ 的值为().
A. $\frac{13}{14}$ B. 2 C. $\frac{7}{13}$ D. $\frac{26}{7}$
7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$ $a_{10} = 3$,则 $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ 等于().
A. 81 B. $27 \sqrt[5]{27}$ C. $\sqrt{3}$ D. 243
8. 如果 - 1、 a 、 b 、 c 、- 9 成等比数列,那么().
A. $b = 3$ $ac = 9$ B. $b = - 3$ $ac = 9$
C. $b = 3$ $ac = - 9$ D. $b = - 3$ $ac = - 9$
9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_n > 0$,且 $a_3 a_7 = 64$,则 a_5 的值为().
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
10. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列 $a_1 + a_3 + a_5 = 9$ $a_6 = 9$,则这个数列的前 6 项和等于().
A. 12 B. 24 C. 36 D. 48
11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2 + a_8 = 8$,则该数列前 9 项和 S_9 等于().
A. 18 B. 27 C. 36 D. 45
12. 已知某等差数列共有 10 项,其奇数项之和为 15,偶数项之和为 30,则其公差为().
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

13. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_4 = 14$ $S_{10} - S_7 = 30$,则 $S_9 =$ _____.

14. 等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 + a_4 + a_{10} + a_{16} + a_{19} = 150$,则 $a_{18} - 2a_{14}$ 的值是_____.

15. 如果一个数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n-1} = h$,其中 h 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,则称数列 $\{a_n\}$ 为等
和数列, h 为公和.已知等和数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$ $h = - 3$,则 $a_{2006} =$ _____.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1$,则 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 =$ _____.

三、解答题(共 74 分)

17. (12 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$,公差 $d = 1$,前 n 项和为 S_n $b_n = \frac{1}{S_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求证 $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 2$.

18. (12 分)已知 $\{a_n\}$ 为等比数列 $a_3 = 2$ $a_2 + a_4 = \frac{20}{3}$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. (12 分)若 S_n 是公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 S_1 、 S_2 、 S_4 成等比数列.

(1)求数列 S_1 、 S_2 、 S_4 的公比;

(2)若 $S_2 = 4$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12 分)记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $S_4 = 1$ $S_8 = 17$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. (12 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = pn^2 - 2n + q$ ($p, q \in \mathbb{R}$) $n \in \mathbb{N}^*$.

(1)求 q 的值;

(2)若 a_1 与 a_5 的等差中项为 18, b_n 满足 $a_n = 2\log_2 b_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

22. (14 分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1)证明:数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

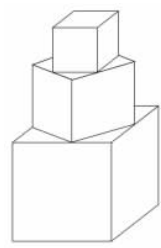
(3)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1} 4^{b_2-1} \dots 4^{b_n-1} = (a_n + 1)b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ,证明: $\{b_n\}$ 是等差数列.

(12)数列的实际应用

编写人:王 凯

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1 = 2$, $a_2 + a_3 = 13$, 则 $a_4 + a_5 + a_6$ 等于().
A. 40 B. 42 C. 43 D. 45
2. 在各项均不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_{n+1} - a_n^2 + a_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, 则 $S_{2n-1} - 4n$ 等于().
A. -2 B. 0 C. 1 D. 2
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2 = 7$, $a_4 = 15$, 则前 10 项和 S_{10} 等于().
A. 100 B. 210 C. 380 D. 400
4. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $S_7 = 35$, 则 $a_4 =$ ().
A. 8 B. 7 C. 6 D. 5
5. 若数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的首项为 14, 前 n 项的和为 S_n , 点 (a_n, a_{n+1}) 在直线 $x - y - 2 = 0$ 上, 那么下列说法正确的是().
A. 当且仅当 $n=1$ 时 S_n 最小
B. 当且仅当 $n=8$ 时 S_n 最大
C. 当且仅当 $n=7$ 或 8 时 S_n 最大
D. S_n 有最小值, 无最大值
6. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, 且 $\frac{a_n a_{n-1}}{a_{n-1} - a_n} = \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$, 则此数列的第 10 项为().
A. $\frac{1}{2^{10}}$ B. $\frac{1}{2^9}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{5}$
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (0 \leq a_n < \frac{1}{2}) \\ 2a_n - 1 & (\frac{1}{2} \leq a_n < 1) \end{cases}$, 若 $a_1 = \frac{6}{7}$, 则 a_{2006} 的值为().
A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{1}{7}$
8. 一张报纸, 其厚度为 a , 面积为 b , 现将报纸对折 (即沿对边中点连线折叠) 7 次, 这时, 报纸的厚度和面积分别为().
A. $8a, \frac{b}{8}$ B. $64a, \frac{b}{256}$ C. $128a, \frac{b}{128}$ D. $256a, \frac{b}{256}$
9. 有一塔形几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边中点, 已知最底层正方体的棱长为 2, 且该塔形的表面积 (含最底层正方体的底面面积) 超过 39, 则该塔形中正方体的个数至少是().
A. 4 B. 5
C. 6 D. 7



10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班 k 名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为 1, 2, ..., k . 规定: 同意按“1”, 不同意 (含弃权) 按“0”.

令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选.} \end{cases}$

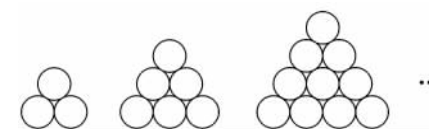
其中 $i = 1, 2, \dots, k$, 且 $j = 1, 2, \dots, k$, 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为().

- A. $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + a_{22} + \dots + a_{2k}$
B. $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{k1} + a_{12} + a_{22} + \dots + a_{k2}$
C. $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{k1}a_{k2}$
D. $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1k}a_{2k}$

11. 农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元 (其中工资性收入为 1800 元, 其他收入为 1350 元). 预计该地区自 2004 年起的 5 年内, 农民的工资性收入将以 6% 的年增长率增长, 其他收入每年增加 160 元. 根据以上数据, 2008 年该地区农民人均收入介于().

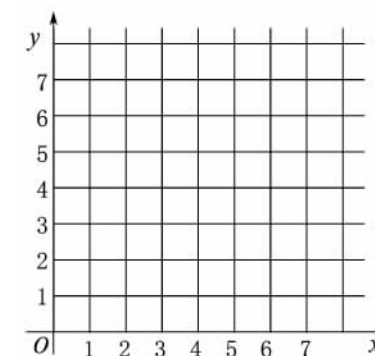
- A. 4200 ~ 4400 元 B. 4400 ~ 4600 元
C. 4600 ~ 4800 元 D. 4800 ~ 5000 元

12. 在德国不来梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品, 其中第 1 堆只有一层, 就一个球, 第 2, 3, 4, ... 堆最底层 (第一层) 分别按图所示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球. 以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数, 则 $f(3) =$ _____, $f(n) =$ _____ (答案用 n 表示).



二、填空题

13. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_n =$ _____.
14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2 (n \geq 1)$, 则该数列的通项 $a_n =$ _____.
15. 一只电子蚂蚁在如图所示的网格线上由原点 $(0, 0)$ 出发, 沿向上或向右方向爬至点 $(m, n) (m, n \in \mathbb{N})$, 记可能的爬行方法总数为 $f(m, n)$, 下列有 4 个结论:
- ① $f(2, 1) = f(1, 2) = 3$;
② $f(2, 2) = 6$;
③ $f(3, 3) = 21$;
④ $f(n, n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,
- 其中所有正确结论的序号是_____.



16. 某工厂在 1999 年底计划使 2005 年底的总产量在 1999 年总产量的基础上翻一番, 则从 1999 年底到 2005 年底的总产量年平均增长率约为 _____ (精确到 0.1%, 参考数据: $\sqrt[6]{6} = 1.12246$).