

目录

第一章 算法初步	(1)
1.1 算法与程序框图	(1)
1.1.1 算法的概念	(1)
1.1.2 程序框图	(5)
1.1.3 算法的三种基本逻辑结构和框图表示	(5)
1.2 基本算法语句	(17)
1.2.1 赋值、输入和输出语句	(17)
1.2.2 条件语句	(23)
1.2.3 循环语句	(31)
1.3 中国古代数学中的算法案例	(42)
第二章 统计	(47)
2.1 随机抽样	(47)
2.2 用样本估计总体	(54)
2.3 变量的相关性	(61)
第三章 概 率	(66)
3.1 事件与概率	(66)
3.2 古典概型	(77)
3.3 随机数的含义与应用	(87)
3.4 概率的应用	(92)
本章测试题	(99)
期中测试题 A 卷	(102)
期中测试题 B 卷	(105)
参考答案与提示	(107)
课后习题解答	(140)



第一章 算法初步



1.1 算法与程序框图

1.1.1 算法的概念

探究目标

1. 知识与技能

- (1) 体会算法的思想,了解算法的意义,能说明解决简单问题的算法步骤;
- (2) 学习有条理地、清晰地表达解决问题的步骤,提高逻辑思维能力.

2. 过程与方法

通过实例,发展对解决具体问题的过程与步骤进行分析的能力.

3. 情感、态度与价值观

- (1) 通过具体实例,感受和体会算法思想在解决具体问题中的意义,认识算法思想的重要性;
- (2) 感受并认识现代信息技术在解决数学问题中的重要作用和威力,形成自觉地将数学理论和现代信息技术结合的思想.

探究指导



数学宫殿

1. 算法的概念

算法:算法可以理解为由基本运算及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤,或看成按要求设计好的有限的确切的计算序列,并且这样的步骤或序列能够解决一类问题.概括起来,算法有如下两点要求:

- (1) 写出的算法,必须能解决一类问题,并且能重复使用;
- (2) 算法过程要能一步一步执行,每一步执行的操作必须确切,而且在有限步骤后能得出结果.

【例 1】 已知直角坐标系中的两点 $A(2,3)$, $B(4,-2)$,设计求直线 AB 的方程的一种算法.

思路与技巧 对于能够运用公式解决的问题,可以套用公式求值得到算法,事实上,我们学过的许多数学公式都是算法,加减乘除运算法则以及多项式运算法则也是算法.

解答 第一步:取 $x_1=2, y_1=3, x_2=4, y_2=-2$;

第二步:将以上数据代入公式:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \text{计算得到 } \frac{y-3}{-2-3} = \frac{x-2}{4-2} \quad (*)$$

第三步:将式(*)整理可得到: $5x+2y-16=0$.

【例2】 给出求解下列方程组的一个算法：

$$\begin{cases} 2x+y=5 & ① \\ 4x+5y=11 & ② \end{cases}$$

思路与技巧 高斯消去法和公式法均是解决二元一次方程的常用方法，可以依此设计算法。

解法一（高斯消去法）。

第一步：① $\times(-2)+②$ ，得到 $3y=1$ ③

第二步：解方程③得到 $y=\frac{1}{3}$ ；

第三步：将 $y=\frac{1}{3}$ 代入①式得到 $x=\frac{7}{3}$ 。所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ 。

解法二（公式法）

第一步：计算 $D=2\times5-4\times1=6$ ；

第二步：因为 $D=6\neq0$ ，所以 $x=\frac{5\times5-11\times1}{6}=\frac{7}{3}$ ， $y=\frac{11\times2-5\times4}{6}=\frac{1}{3}$ ；

第三步：得到 $x=\frac{7}{3}$ ， $y=\frac{1}{3}$ 。

【例3】 写出以下问题的一个算法：

- (1) 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c ，求其面积；
- (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c ，求 $\triangle ABC$ 的周长；
- (3) 求任意四个数 a, b, c, d 的平均值。

思路与技巧 对于问题(1)，已知三边，求面积可利用海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 求出，其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$ ；对于问题(2)与问题(3)有明确的公式，只要按顺序写出便是一个算法。

解答 (1)第一步：输入 a, b, c ；第二步：求出 $p=\frac{a+b+c}{2}$ ；第三步： $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ；第四步：输出 S 。

(2)第一步：输入 a, b, c ；第二步：计算 $L=a+b+c$ ；第三步：输出 L 。

(3)第一步：输入 a, b, c, d ；第二步：求和 $S=a+b+c+d$ ；第三步：求平均值 $\text{aver}=S/4$ ；第四步：输出 aver 。

2. 算法的五个特征

现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤。这些程序或步骤所满足的条件，概括起来就是算法的五个特征：能行性、有穷性、确定性、通用性和有输出。

(1) 能行性：算法的能行性指的算法中每一步运算和操作必须是相当基本的，从而是能实现的，但是，所谓基本和能实现都是相对而言的。

(2) 有穷性：算法的有穷性是十分重要的，是成功完成任务的必要条件，有穷性指的是一个算法必须能够在有限个步骤之内把问题解决，不能无限地执行下去。

(3) 确定性：算法的每一个步骤必须是确切定义的。

(4) 通用性：一个算法应该适用于求某一类问题的解，而不是只用来解决一个具体的问题。

(5) 有输出：算法必须将所得结果输出。

【例4】 一个老头带一只狼、一只羊和一筐青菜准备过河，但因船小，过河时每次只能带一样东西。然而老头不在时，狼会把羊吃掉，羊也会把菜吃掉，问老头怎样过河才能使所带的东西全部达到彼岸？试设计算法。

思路与技巧 只要明确算法是做一件事的方法和步骤，那么将解决问题的方法或步骤写出，然后分步即可，同时注意每步应满足算法的特征。此题可有两种方案，即知有两种算法。从而我们可以看出算法

的不惟一,但设计算法时应本着简洁方便的原则.

解法一 第一步:把羊运到对岸;第二步:回来接狼,把狼带到对岸时,把羊带回;第三步:把羊放在原地,把菜运到对岸;第四步:回来接羊.

解法二 第一步:把羊运到对岸;第二步:回来接菜,把菜带到对岸时,把羊带回;第三步:把羊放在原地,把狼运到对岸;第四步:回来接羊.

评析 算法应有某种通用性,可以解决一类问题,比如高斯消去法可解任意的二元一次方程组,于此问题也适用于由四个存在一定制约关系的元素构成的集合的运算问题.

【例 5】 应用 Scilab 指令解方程组

$$\begin{cases} 3x-2y=14 \\ x+y=-2 \end{cases}$$

在 Scilab 界面中的输入方式应为_____.

A. $A=[3,-2;1,1], B=[14,-2]$

B. $A=[3,-2;1,1], B=[14;-2]$

C. $A=[3,-2,1,1], B=[14,-2]$

D. $A=[3,-2,1,1], B=[14;-2]$

思路与技巧 算法可以看成是一个程序的核心和灵魂,到底一个应用程序的威力如何,因此只有实践——上机才知晓,上机时操作要仔细认真,注意格式,否则差之毫厘,谬以千里.

解答 B

评析 在实践应用中,应注意动手能力的培养,现代科技非常注意实践能力,只有多动手动脑,才能掌握先进技术,在上机时注意调试程序能力的培养.

3. 算法思想

一些问题的解决常常需要设计出一系列可操作的步骤,只要按顺序执行这些步骤,就能完成任务,通常把这种解决问题的思想称为程序化思想或算法思想.程序化思想或算法思想的过程如图 1-1-1 所示.

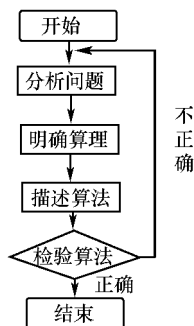


图 1-1-1



探究体验

【提出问题】 下面的故事中是否蕴含算法思想,能否写出它的算法.

【探究准备】 韩信是汉高祖刘邦手下的大将,他英勇善战,智谋超群,为建立汉朝立下了汗马功劳.据说他在点兵的时候,为了保证军事机密,不让敌人知道自己部队的实力,采用下述点兵方法:先令士兵从 1~3 报数,结果最后一个士兵报 2;再令士兵从 1~5 报数,结果最后一个士兵报 3;又令士兵从 1~7 报数,结果最后一个士兵报 4. 这样,韩信很快就算出了自己部队士兵的总数.

【探究过程】 同学们可以分组讨论,看一看求出土兵总数是否符合算法的特征.

【探究评析】 故事中蕴含算法的思想.

快乐套餐



练一练,你会了吗?

1. 以下给出算法的若干说法,其中正确的说法是

()

- A. 算法就是某一个问题的解题方法
- B. 两个算法可以不产生确定的结果
- C. 对于给定的一个问题,其算法不一定是惟一的
- D. 算法的步骤可以无限地执行下去不停止

2. 算法的有穷性是指 ()
- A. 算法最后必须包含输出 B. 算法的步骤必须有限
- C. 算法中每个操作步骤都是可执行的 D. 以上说法都不正确
3. 下列的结论正确的是 ()
- A. 一个算法步骤是可逆的 B. 一个算法可以无止境地运行下去
- C. 完成一件事情的算法有且只有一种 D. 设计算法要本着简单方便的原则
4. 给出 $1+2+3+4+\cdots+100$ 的一个算法.
5. 已知点 $P(2, -1)$, 写出得到点 P 到直线 $x+y-10=0$ 的距离的一个算法.
6. 写出解方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个算法.
7. 写出能找出 a, b, c, d 四个数中最小值的一个算法.
8. 写出在下列的数字中搜索到 23 的一个算法:
42, 51, 29, 20, 45, 23, 46, 35, 29.



想一想 如何探究?

9. 试描述解三元一次方程组
$$\begin{cases} x+y+z=12 & ① \\ 3x-3y-z=16 & ② \\ x-y-z=-2 & ③ \end{cases}$$
 的一个算法.



试一试 经历这些活动

10. 在李咏主持的“幸运 52”中, 要求竞猜者在规定的时间内猜出某种商品的价格, 就可获得该件商品. 现有一商品, 价格在 $0 \sim 4000$ 元之间, 采取怎样的策略才能在较短的时间内说出正确的答案呢? 试设计一种算法.

11. 利用二分法设计求方程 $f(x) = x^3 + x^2 - 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上的近似解的算法(精确度 0.001).



读一读, 你有何收获?

12. 现在有三个油瓶, 分别能装 8 kg、5 kg、3 kg 的油, 当 8 kg 的瓶子装满油时, 设计一个用这三个瓶子倒油的算法, 使这些油被平分到三个瓶子里, 并且要求倒油的次数最少.

1.1.2 程序框图

1.1.3 算法的三种基本逻辑结构和框图表示

探究目标

1. 知识与技能

- (1) 理解程序框图的顺序结构、条件分支结构和循环结构这三种基本逻辑结构;
- (2) 能识别和理解简单的框图的功能;
- (3) 能运用三种基本逻辑结构设计程序框图以解决简单的问题.

2. 过程与方法

通过模仿、操作、探索经历设计算法、设计框图以解决具体问题的过程, 发展应用算法的能力.

3. 情感、态度与价值观

通过实例理解和掌握算法的三种逻辑结构框图的意义, 遇到具体问题认真分析, 选择合适的框图来描述算法.

探究指导



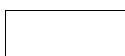
数学宫殿

1. 程序框图

通常用一些通用符号构成一张图来表示算法, 这种图称做程序框图(简称框图), 用框图表示算法直观、形象、容易理解, 即用框图能够清楚地展现算法的逻辑结构.

框图中有许多图形符号和连接线, 这些符号表示特定的含义被普遍采用.

【例 1】完成下面的表格：

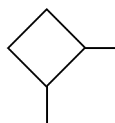
图形符号	名称	符号表示的意义
(1)	起、止框	框图的开始或结束
	(2)	数据的输入或结果的输出
	(3)	赋值执行计算语句、结果的传递
(4)	判断框	根据给定条件判断
	(5)	流程进行的方向
	(6)	连接另一页或另一部分的框图
	(7)	帮助理解框图

思路与技巧 程序框图的图形符号的使用具有普遍性,具体的图形符号都被认可或规定包含有一定的意义.

解答 (1)



; (2) 输入、输出框; (3) 处理框; (4)



; (5) 流程线; (6) 连接点;

(7) 注释框

评析 起、止框是任何流程不可少的,表明程序开始和结束;输入和输出可用在算法中任何需要输入、输出的位置;算法中间要处理数据或计算,可分别写在不同的处理框内;当算法要求对两个不同的结果进行判断时,写在判断框内;一个算法步骤到另一个算法步骤用流程线连接;如果一个框图需要分开来画,要在断开处画上连接点,并标出连接的号码.

【例 2】画出计算 $1+2+3+4+5+6$ 的程序框图.

思路与技巧 计算 $1+2+3+4+5+6$, 可以理解为先计算 $1+2$ 得值 3; 然后再计算 $3+3$, 得值 6; 然后再计算 $6+4$, 得值 10; 进一步计算 $10+5$, 得值 15; 最后计算 $15+6$, 得值 21. 由计算过程可知, 整个运算过程就是求两个数的和, 并且发现重复的特点和循环进行的特点. 故可用 S 代换两个数的和.

解答 程序框图如图 1-1-2 所示.

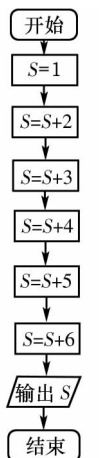


图 1-1-2

【例 3】 利用海伦公式设计一个算法,求三角形面积,画出算法的程序框图(已知三边长分别为 4, 5, 6).

思路与技巧 已知三边 a, b, c , 利用海伦公式求面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

解答 **算法:** S1: 取 $a = 4, b = 5, c = 6$; S2: 求出 $p = \frac{a+b+c}{2}$; S3: 将 p 的值代入海伦公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; S4: 输出 S .

程序框图如图 1-1-3 所示.

评析 (1) 由海伦公式: 即若已知三角形三边边长分别为 a, b, c , 则三角形面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 可得此问题的算法.

(2) 在表达形式上, 注意体会此结构的先后次序.

(3) 画程序框图时要遵循一定的规则, 目的是为了使大家彼此之间能够读懂各自画出的框图, 其中常用的规则如下所示: ①使用标准的框图符号; ②框图一般按从上到下、从左到右的方向画; ③除判断框外, 大多数框图符号只有一个进入点和一个退出点. 判断框是具有超过一个退出点的惟一符号; ④一种判断框是“是”与“不是”两分支的判断, 而且有且仅有两个结果; 另一种是多分支判断, 有几种不同的结果; ⑤在图形符号内描述的语言要非常简练清楚.

2. 算法的三种基本逻辑结构和框图表示

(1) 顺序结构: 顺序结构描述的是最简单的算法结构, 语句与语句之间、框与框之间是按从上到下的顺序进行.

【例 4】 用尺规作图, 确定线段 AB 的一个 5 等分点, 写出解决这个问题的程序框图.

思路与技巧 由尺规作图可知, 作已知线段的等分点, 是按照步骤依次执行的.

解答 程序框图如图 1-1-4 所示.

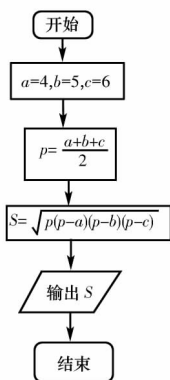


图 1-1-3

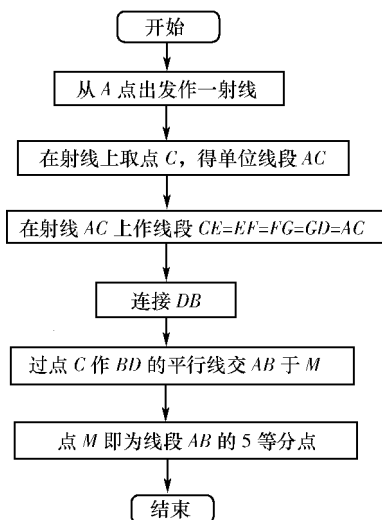


图 1-1-4

评析 顺序结构是一种最简单、最基本的结构, 它描述的是可以按照步骤依次执行的一个算法. 这个结构的各步只能按顺序执行.

【例 5】 三角形的面积公式为 $S = \frac{1}{2}ah$, 用算法描述求 $a = 7.65, h = 13.29$ 时的三角形面积, 并画出算法的程序框图.

思路与技巧 对于套用公式型的问题, 要注意公式中的变量赋值及输出结果.

解答 算法: S1: 取 $a=7.65, h=13.29$; S2: 计算 $S=\frac{1}{2}ah$; S3: 输出 S .

程序框图如图 1-1-5 所示.

【例 6】画出由棱锥的底面积 S 和高 h 求棱锥体积 V 的程序框图.

思路与技巧 由棱锥的体积公式可得 $V=\frac{1}{3}Sh$, 故可按照顺序结构表示此算法.

解答 程序框图如图 1-1-6 所示.

【例 7】已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$, 求点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 l 的距离 d , 分别用数学语言和程序框图描述算法.

思路与技巧 由点到直线距离公式可套用之解决问题, 从而得知可用顺序结构描述此算法.

解答 (1) 用数学语言来描述算法:

S1: 输入点的坐标 (x_0, y_0) , 输入直线方程的系数和常数 A, B, C ;

S2: 计算 $z_1 = Ax_0 + By_0 + C$;

S3: 计算 $z_2 = A^2 + B^2$;

S4: 计算 $d = \frac{|z_1|}{\sqrt{z_2}}$;

S5: 输出 d .

(2) 用程序框图来描述算法, 如图 1-1-7 所示.

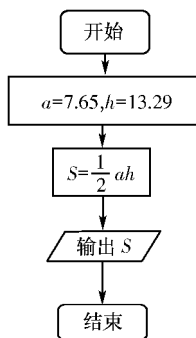


图 1-1-5

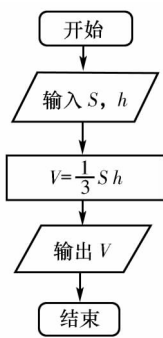


图 1-1-6

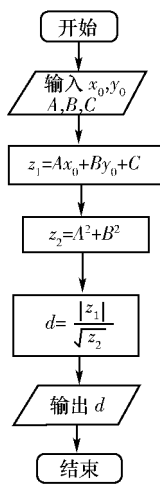


图 1-1-7

(2) 条件分支结构

条件分支结构是指在算法中通过对条件的判断, 根据条件是否成立而选择不同流向的算法结构.

条件分支结构常常用在一些大小比较、正负判断、分段函数求值等问题的算法设计中.

条件分支结构在框图中是用判断框来表示的, 判断框内写上条件, 然后它有两个出口, 分别对应着条件满足和条件不满足时所执行的不同指令.

【例 8】给定任意两个整数, 按从小到大顺序排列, 给出程序框图.

思路与技巧 对于任意两个整数比较大小可以分为两种情况. 例如以 a, b 代替两个整数, 一种情况 $a < b$ 成立; 另一种情况 $a < b$ 不成立, 即 $a \geq b$ 成立. 符合条件分支结构特点, 因此可用条件分支结构表示该程序.

解答 程序框图如图 1-1-8 所示.

评析 通过本题可看出条件分支结构可用来表示比较数的大小算法.

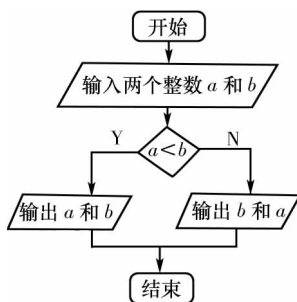


图 1-1-8

【例 9】函数 $y = \begin{cases} -1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$, 写出求该函数函数值的算法及程序框图.

思路与技巧 该函数是一个重要函数符号函数, 在后续课程中地位极其重要, 本质是一个分段函数, 当 x 取不同范围内的值时, 函数表达式不同, 因此当给出一个自变量 x 的值时, 必须先判断 x 的范围, 然后确定利用哪一段的解析式求函数值, 由于函数解析式分了三段, 所以判断框需要两个, 即进行两次判断.

解答 用数学语言描述算法:

S1: 输入 x ;

S2: 如果 $x > 0$, 那么 $y = -1$; 如果 $x = 0$, 那么 $y = 0$; 如果 $x < 0$, 那么 $y = 1$;

S3: 输出函数值 y .

用程序框图描述算法, 如图 1-1-9 所示.

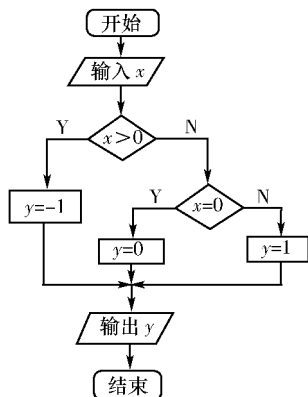


图 1-1-9

评析 求分段函数的函数值的程序框图的画法, 如果是分两段的函数, 只需引入一个判断框, 如果是分三段的函数, 需要引入两个判断框, 分四段的函数要引入三个判断框, 依此类推. 而判断框内的内容是没有顺序的, 比如本题的程序的两个判断框内的内容可以交换, 但对应的下一图框中的内容或操作也必须相应地进行变化, 比如本题的程序框图也可以画成如图 1-1-10 所示形式.

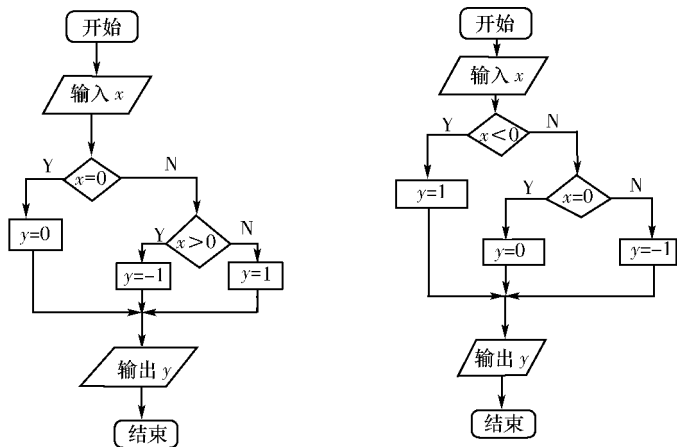


图 1-1-10

或许对于分为三段的分段函数用程序框图表示不易理解. 我们可以先看一个分为两段的分段函数用程序框图如何表示.

【例 10】用数学语言和程序框图描述求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的过程.

思路与技巧 对于一元二次方程是否有根需进行判断, 判断的依据是 Δ 是否大于等于零, 成立, 则有两实根; 否则无实根. 过程中进行了逻辑判断, 符合条件分支结构特点, 因此可用条件分支结构表示程序, 描述算法.

解答 (1) 用数学语言来描述算法:

S1: 计算 $\Delta = b^2 - 4ac$;

S2: 如果 $\Delta < 0$, 则原方程无实数解;

否则 ($\Delta \geq 0$), $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

S3: 输出无实数解信息或解 x_1, x_2 .

(2) 用框图来描述算法,如图 1-1-11 所示.

评析 只要需要逻辑判断,非此即彼,或可以分成几种情况的问题,我们均可以用条件分支结构表示.在此题的基础上作进一步延伸来描述分为两段的分段函数的程序框图.

【例 11】 设汽车托运重量为 $P(\text{kg})$ 的货物时,每千米的费用(单位:元)标准为:

$$y = \begin{cases} 0.2P & P \leq 20 \text{ kg} \\ 0.3 \times 20 + 1.1(P - 20) & P > 20 \text{ kg} \end{cases}$$

画出行李托运费用的程序框图.

思路与技巧 对于分段函数可用条件分支结构描述.两段的分段函数可用一个判断框即可表示.

解答 行李托运费用的程序框图如图 1-1-12 所示.

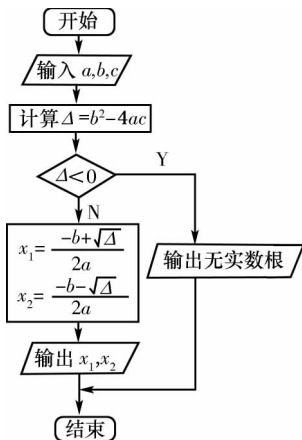


图 1-1-11

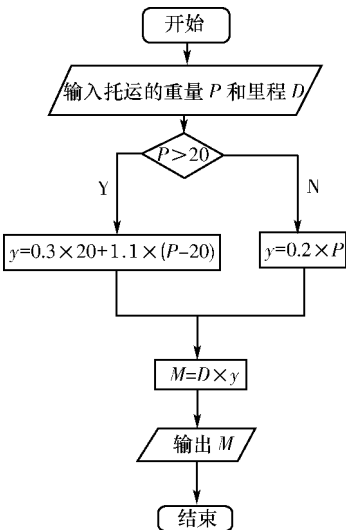


图 1-1-12

评析 分段函数可用条件分支结构描述,这是最简单的一种程序框图.

【例 12】 画出解方程组 $\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$ 的程序框图.

思路与技巧 我们都熟悉二元一次方程组的算法,正确的使用图形符号表示这个过程即可.

解答 程序框图如图 1-1-13 所示.

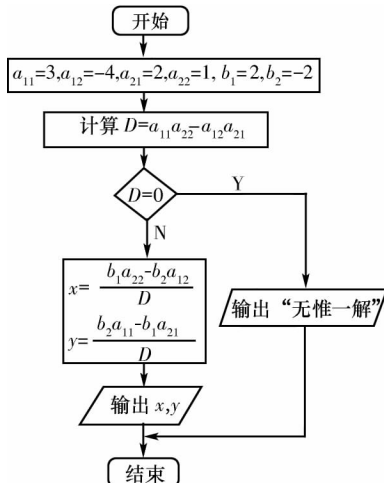


图 1-1-13

评析 顺序结构是解题的一般步骤,只要按步骤顺序画程序框图即可.上述框图就是公式法的一般步骤,其中对 D 的判断利用条件分支结构.

【例 13】 画出解方程 $ax+b=0(a, b \in \mathbf{R})$ 算法的程序框图.

思路与技巧 解方程时要注意讨论 a 是否为 0,还要讨论 b 是否为 0,因此,只需要用条件分支结构框图来描述算法.

解答 程序框图如图 1-1-14 所示.

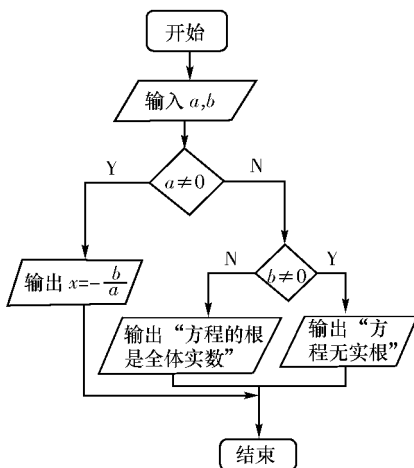


图 1-1-14

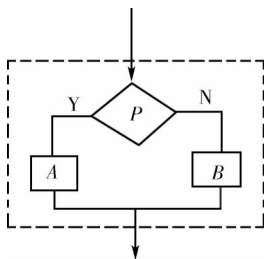


图 1-1-15

评析 在上述过程中的第二步和第三步,我们分别进行了判断,并根据这个判断决定执行哪一种操作.图 1-1-15 虚线框内表示的是常见的选择结构,它包含一个判断框,当条件 P 成立时执行 A ,否则执行 B .

【例 14】 设计算法的程序框图,对任意给定的 x 值,求函数 $f(x) = |x+1| + |3-x|$ 的函数值.

思路与技巧 前面谈到对于分段函数可用条件分支结构画出程序框图;有些问题从形式上看非分段函数,但经过化简可以化为分段函数的问题也可用条件分支结构表示,此题中 $f(x)$ 可化为

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & x < -1 \\ 4 & -1 \leq x < 3 \\ 2x-2 & x \geq 3 \end{cases}$$

解答 程序框图如图 1-1-16 的所示.

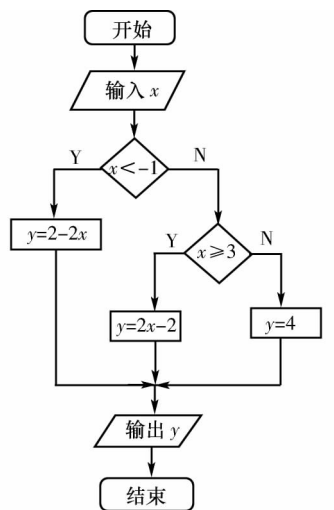


图 1-1-16

评析 通过此题需明白,对于一些不熟悉的问题可将它们转化为熟悉的问题,再画框图将会变得简单.

【例 15】 画出在 a, b, c 三数中找出最大数的程序框图.

思路与技巧 程序框图是架起算法与语句的桥梁.我们有时在画框图时先写此问题的算法,再以此为依据画出程序框图.

求 a, b, c 的最大数可分为如下情况:若 $a > b$, 且 $a > c$, 则 a 是 a, b, c 中的最大值;若 $a > b$ 且 $a > c$ 不同时成立,即 $b > a$ 或 $c > a$ 中至少一个成立,若 $b > c$, 则 b 是最大者,否则 c 为最大.

解答 算法如下:

S1: 输入 a, b, c ;

S2: 若 $a > b$, 且 $a > c$, 则输出 a , 否则, 执行 S3;

S3: 若 $b > c$, 则输出 b , 否则, 执行 S4;

S4: 输出 c .

程序框图如图 1-1-17 所示.

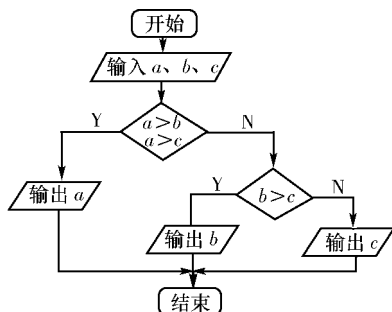


图 1-1-17

【例 16】 某居民区的物业部门每月向居民收取卫生费, 计费方法是: 3 人和 3 人以下的住户, 每户收费 5 元; 超过 3 人的住户, 每超出 1 人加收 1.2 元, 设计一个算法, 根据输入的人数, 计算应收取的卫生费, 并画出程序框图.

思路与技巧 通过分析题目, 明确了计费方法分为两种情况: 3 人和 3 人以下与超过 3 人, 并且可将其转化为我们熟悉的问题, 用分段函数表示, 因此可用条件分支结构表示此程序; 设某户有 x 人, 根据题意, 收取的卫生费 y 应是 x 的分段函数.

当 $x \leq 3$ 时, $y = 5$;

当 $x > 3$ 时, $y = 5 + (x - 3) \times 1.2 = 1.2x + 1.4$;

$$\text{即 } y = \begin{cases} 5 & x \leq 3 \\ 1.2x + 1.4 & x > 3 \end{cases}$$

解答 算法:

S1: 输入 x ;

S2: 如果 $x \leq 3$, 则 $y = 5$; 否则, $y = 1.2x + 1.4$;

S3: 输出 y .

程序框图如图 1-1-18 所示.

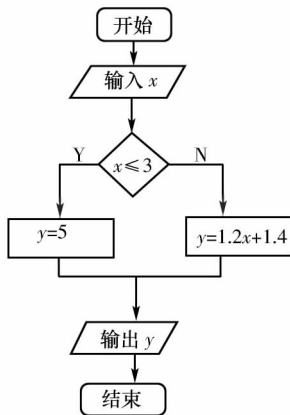


图 1-1-18

评析 本例题考查利用算法和程序框图解决实际问题的能力, 解决应用题一般是先将这个应用题表示的数学模型求出来, 然后写出这个数学问题的算法及相应的程序框图, 从而使问题得以解决. 同时综合分析, 以上有关条件分支结构的题目主要应用条件分支结构的问题多在分段函数、比较数的大小、分情况讨论以及可以转化为分段函数的问题之中.

(3) 循环结构

循环结构是指根据指定条件决定是否重复执行一条或多条指令的控制结构. 它常常用在一些有规律的科学计算中, 如: 累加求和、累乘求积、多次输入等.

【例 17】 设计一个计算 $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100$ 的值的算法, 并画出程序框图.

思路与技巧 循环结构在框图中也是用判断框来表示, 判断框内写上条件, 两个出口分别对应着条件满足和条件不满足时所执行的不同指令, 其中一个要指向循环体, 然后再从循环体回到判断框的入口处. 对于此问题计算小于 100 的正偶数的乘积, 可每次计算两数乘积, 即先计算前两个数乘积, 将结果作为一个数再将结果乘以下一个数, 如此循环下去, 最后求得最终结果. 符合循环结构特点, 故可用其表示.

解答 程序框图如图 1-1-19 所示.

评析 (1)对此问题还可以用另一种循环结构表示;(2)对于用程序框图表示此类问题关键在于确定循环体的内容及循环变量.其中可用先摆后观察再写出循环体及循环变量的方法,即计算可按如下方式进行:

$$A = B \times C$$

$$8 = 2 \times 4$$

$$48 = 8 \times 6$$

$$384 = 48 \times 8$$

⋮

即观察数据可知:对于 A 、 B 、 C 三变量有如下关系:

$A = B \times C$, $B = A$, $C = C + 2$, 此即循环体内容,简记为 $A = A \times C$, $C = C + 2$, A 用 S 代替、 C 用 i 代替,即得 $S = S \times i$, $i = i + 2$.事实上,循环结构表示的算法有此通法,可见下列分析.

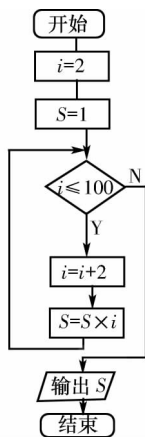


图 1-1-19

【例 18】 北京获得了 2008 年第 29 届奥运会主办权,你知道在申办奥运会的最后阶段,国际奥委会是如何通过投票决定主办权归属的吗?对竞选出的 5 个申办城市进行表决的操作程序是:首先进行第一轮投票,如果有一个城市得票超过总票数的一半,那么该城市就获得主办权;如果所有申办城市得票数都不超过总票数的一半,则将得票最少的城市淘汰,然后重复上述过程,直到选出一个申办城市为止.试画出该过程的程序框图.

思路与技巧 从选举的方法可以看出,应选择循环结构来描述算法.

解答 程序框图如图 1-1-20 所示.

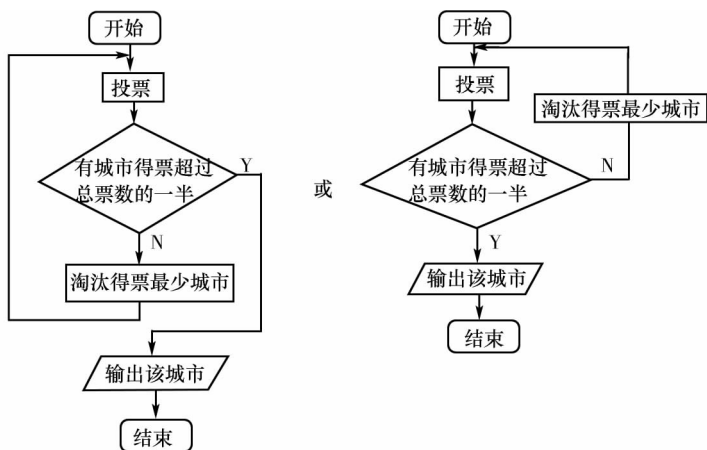


图 1-1-20

评析 循环结构关键是要分析清楚是哪一操作步骤需要循环,图 1-1-21 表示的是常见的一种循环:先执行 A 框,再判断给定的条件 P 是否成立,若不成立,则执行 A ,如此反复,直到条件成立,该循环结束,类似的还可用图 1-1-22 表示.

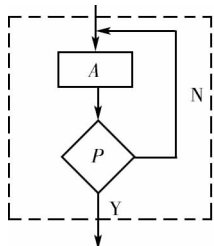


图 1-1-21

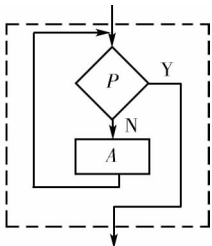


图 1-1-22

【例 19】 试设计函数 $y = \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = n \cdot f(n-1), n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ 的一个算法,任意

输入一个数可得相应结果.

思路与技巧 分析此函数可知,这个函数用两个等式定义,第一个等式首先给出自变量的初始值对应的数值,然后由这个函数值用第二个等式依次递推地计算下一个函数值,这个函数的定义所用运算通常叫递归运算.若要计算当自变量为 n 时对应的函数值,常见方法有从前 n 项中归纳函数解析式,然后代入 n 值可得;或由 $f(1)=1, f(2)=2 \cdot f(1), f(3)=3 \cdot f(2), \dots, f(n)=n \cdot f(n-1), n$ 个式子累乘而得;再就是要机械地、重复地计算 n 次,直接来求.此结构正好可以用循环结构描述.

解答 (1) 算法:

S1: 用 $f(n)$ 来表示当自变量为 n 时对应的函数值,含 $n=1$;

S2: 判断,若 $n < k$ 时,直接得出结果;判断若 $n \geq k$ 时,由 $f(1)=1 \cdot f(0), f(2)=2 \cdot f(1), \dots$, 并重复运算直至 $f(n)=n \cdot f(n-1)$ 得出需要的数值;

S3: 输出结果.

(2) 程序框图如图 1-1-23.

评析 可根据例 17 评析(2)中方法得出循环体中的内容.

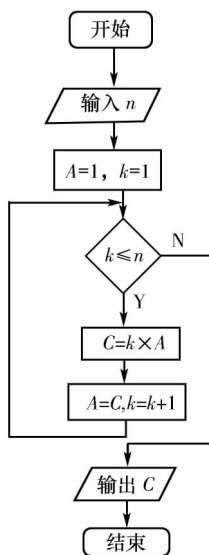


图 1-1-23



探究体验

【提出问题】 传说中的许多故事往往能够给我们一些启发,阅读并分析对于下面的故事,能否用程序框图来表示,并观察它用到了三种基本逻辑结构之中的哪一种结构?

【探究准备】 相传古代印度国王要褒赏他聪明能干的宰相达依尔(国际象棋发明者),问他需要什么,达依尔说:“国王只要在国际象棋的棋盘第一格子上放一粒麦子,第二格子上放二粒,第三格子上放四粒,以后按比例每一格加一倍,一直放到第 64 格(国际象棋棋盘是 $8 \times 8 = 64$ 格),我就感恩不尽,其他什么也不要了.”国王想:“这才有多少,这还不容易!”便让人扛来一袋小麦,但不到一会儿就用完了,再来一袋很快又没有了,结果全印度的粮食都用完还不够,国王很奇怪,怎么也算不清这笔账.

【探究过程】 对于这个问题,同学们思考能否用刚刚学过的程序框图表示呢?通过分析达依尔的话可将此问题转化为数学问题,即求 $1+2+2^2+\dots+2^{63}$ 的和的问题.求 $1+2+2^2+\dots+2^{63}$ 恰好符合用程序框图中的循环结构表示,我们可以引入一个累加变量 S ,一个计数变量 i ,累加 64 次就能求其和.

【探究评析】 古代数学问题中蕴含着算法思想,值得我们重新去思考,也就是旧瓶装新酒.正是这些古代问题成就了中国科学院院士吴文俊的机械化算法等重要成果.

快乐套餐



练一练,你会了吗?

- 已知函数 $y = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, 试输入 x 的值,计算 y 的值,画出程序框图.

2. 画出求任意 3 个数 a, b, c 的最大值的算法的程序框图.
3. 试设计输出 1000 内能被 3 和 5 整除的所有正整数的程序框图.
4. 选择合适的框图结构, 画出求半径为 4 的球的表面积和体积的程序框图.
5. 如果成绩大于或等于 60 分, 则输出“及格”, 否则输出“不及格”. 试用程序框图表示这一算法.
6. 设计计算 $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times 97 \times 99$ 的算法, 并画出相应的程序框图.
7. 设计计算 $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2$ 的流程图.



想一想 如何探究?

8. 设区间 $[a, b]$ 是方程 $f(x)=0$ 的有解区间, 设计一个用二分法求此方程在区间 $[a, b]$ 上的一个近似解的算法, 并且画出流程图(精度为 0.001).



试一试 经历这些活动

9. (1) 设计计算 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 99^3$ 的算法程序, 并画出相应的程序框图;
(2) 观察前面画出的程序框图, 总结一下在画框图时应重点注意哪些问题.



读一读 你有何收获?

10. 百钱百鸡问题. 中国古代数学家张丘建在他的《算经》中提出了著名的“百钱百鸡问题”: 鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一, 百钱买百鸡, 翁、母、雏各几何? 画出这个程序的流程图.

解答 程序框图如图 1-1-24.

