

前言

本书根据教育部普通高中《数学课程标准》要求,与人教版(A版)《数学选修2-1》同步。全书每节包括以下栏目:

探究目标指每节内容的知识与能力目标;过程与方法目标;情感、态度与价值观目标。对教材中的重点、难点作了明确的阐述,使同学们在学习过程中,心中有数、有的放矢。

探究指导分为三部分:数学宫殿、综合探究、应用建模。

数学宫殿中的“知识回顾”将每节知识、解题方法进行整合和归纳,用明晰的语言梳理出每节知识的知识网络、方法体系,结合形象的图表帮助同学们理解,一看就懂,一学就会;“示例点拨”侧重每节知识相应的基本题型,每一题都有解题的思路与技巧以分析此类题目的常规思路及涉及的知识点与方法技巧;详细的解答给学生规范解题以正确指引;而后的评析侧重分析该题为什么这样做,这类题的解法、捷径及误区。通过例题的学习达到以一当十、事半功倍的效果。

综合探究中以生活中的数学、科技中的数学为素材,通过简单问题的探究使同学们在探究中体验科学的过程,在探究中领悟科学的方法,受到科学价值观的熏陶。在探究过程中体验成功与失败,从而感悟数学,领悟自然、社会和人生的奥妙。

应用建模通过同学们身边的数学、社会生活中的数学问题的分析、转化,建立起数学模型,利用数学的思想、方法,去解决这些问题。使同学们分析问题的思路更开阔,解决问题的方法更合理,对数学的认识进一步加深,提高同学们的应用意识,增强学习数学的兴趣。

探究综合训练帮助同学们通过“练一练,你会了吗?”巩固知识与技能目标;通过“想一想,如何探究?”强化过程与方法目标;通过“试一试,经历这些活动”进一步丰富情感、态度与价值观目标。

每章后的本章检测题立意新颖、设问巧妙。题目注重基础题、联想题、设计题、开放题和应用题的合理搭配与设置,体现探究和创新。各部分练习均给出了答案,一些应用问题还给出了多种方案。

全书最后还包括课后习题解答,对课本习题作详细的解答,帮助同学们排忧解难,打好基础。

本书由周映平主编,翁之英副主编,参与编写工作的还有孟冬宏、先开萍、侯士群。

如果对本书有什么好的意见和建议,恳请致函 sdyccs@163.com,不胜感谢。

编者

2006年8月

目 录

► ► 第一章 常用逻辑用语	(1)
1.1 命题及其关系	(1)
1.2 充分条件与必要条件	(5)
1.3 简单的逻辑联结词	(8)
1.4 全称量词与存在量词	(11)
本章小结	(15)
第一章测试题	(16)
► ► 第二章 圆锥曲线与方程	(18)
2.1 椭圆	(18)
2.1.1 椭圆及其标准方程	(18)
2.1.2 椭圆的简单几何性质	(23)
2.2 双曲线	(28)
2.2.1 双曲线及其标准方程	(28)
2.2.2 双曲线的简单几何性质	(33)
2.3 抛物线	(39)
2.3.1 抛物线及其标准方程	(39)
2.3.2 抛物线的简单几何性质	(44)
2.4 直线与圆锥曲线的位置关系(一)	(50)
2.4 直线与圆锥曲线的位置关系(二)	(56)
2.5 曲线与方程	(61)
2.5.1 曲线与方程	(61)
2.5.2 求曲线的方程	(65)
本章小结	(71)
第二章测试题	(75)

▶▶	第三章 空间向量与立体几何	(78)
	3.1 空间向量及其运算	(78)
	3.1.1 空间向量及其加减运算	(78)
	3.1.2 空间向量的数乘运算	(82)
	3.1.3 空间向量的数量积运算	(82)
	3.1.4 空间向量的正交分解及其坐标表示	(82)
	3.1.5 空间向量运算的坐标表示	(82)
	3.2 立体几何中的向量方法	(88)
	本章小结	(98)
	第三章测试题	(103)
▶▶	模块结业测试题(一)	(105)
▶▶	模块结业测试题(二)	(107)
▶▶	参考答案及提示	(109)
▶▶	课本习题解答	(135)



第一章 常用逻辑用语



1.1 命题及其关系

探究目标

什么是命题？命题的真假如何判断？命题的一般形式是什么？

从一个命题的条件和结论出发，可构造出与之相关的哪些命题？它们之间具有怎样的相互关系？

研究命题之间的相互关系，意义何在？

这些问题将成为本节要与同学们一起探究的主要问题。

探究指导



数学宫殿

知识回顾

1. 命题的有关概念

命题：用语言、符号或式子表达的可以判断真假的陈述句。

命题分为真命题与假命题两类，判断为真的语句叫真命题，判断为假的语句叫假命题。一个命题要是真，要是假，但不能既真又假，也不能模棱两可，无法判断其真假。要注意的是，并不是任何语句都是命题，只有那些能够判断真假的语句才是命题。

一个命题，一般可以用一个小写英文字母表示，如： $p, q, r, \dots$ 。

2. 命题的一般形式

命题具有“若 p 则 q ”的形式，其中 p 叫命题的条件， q 叫命题的结论。

3. 四种命题

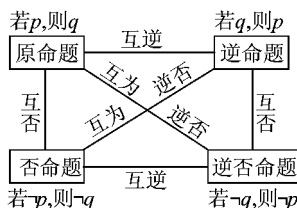
原命题：若 p 则 q 。

逆命题：若 q 则 p 。

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$ 。

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$ 。

4. 四种命题的相互关系



5. 四种命题的真假关系表(有且只有四种情况)：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

故四种命题的真假性之间有如下关系：

①两个命题若互为逆否命题，则它们有相同的真假性；

②两个命题若为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系。

6. 等价命题法

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，所以我们在直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，来间接地证明原命题为真命题，即将对命题“若 p ，则 q ”的证明可转化为证明与之等价的逆否命题“若 $\neg q$ ，则 $\neg p$ ”。

示例点拨

【例 1】下列语句中是命题的有_____（写出序号）。其中是真命题的有_____（写出序号）。

- ①等边三角形一定是等腰三角形；
- ②垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？
- ③一个数不是正数就是负数；
- ④大角所对的边大于小角所对的边；
- ⑤ $x+y$ 为有理数，则 x, y 也都是有理数；
- ⑥作 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

思路与技巧 根据命题的概念，判断是否是命题，若是，再判断真假。

解答 ①陈述句，是真命题。

②疑问句，没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断，不是命题。

- ③是假命题. 数 0 既不是正数也不是负数.
 ④是假命题. 没有考虑在同一个三角形中.
 ⑤是假命题. 如 $x=\sqrt{3}, y=-\sqrt{3}$.
 ⑥祈使句. 不是命题.

答案 ①③④⑤; ①

评析 判断一个语句是否是命题, 关键在于能否判断其真假, 一般地, 陈述句“ π 是有理数”是命题; 而祈使句“求证 $\sqrt{2}$ 是无理数”, 疑问句“ π 是无理数吗?”, 感叹句“向抗洪英雄学习!”就不是命题.

【例 2】 判断下列命题的真假:

- (1) 0 不能作除数;
 (2) 没有一个无理数不是实数;
 (3) 如果两直线不相交, 则这两条直线平行;
 (4) 集合 A 是集合 $A \cap B$ 的子集;
 (5) 集合 A 是集合 $A \cup B$ 的子集;
 (6) 空集是任何集合的子集.

思路与技巧 分清命题的条件与结论, 在此基础上进行判断.

解答 (1) 真命题;

(2) 实数分为有理数和无理数两类. 真命题;

(3) 假命题. 在空间不相交的两直线还可能异面;

(4) 假命题. 如存在 $A=\{1, 2, 3\}, B=\{2, 4\}$, 使 $A \cap B = \{2\}, A \not\subseteq A \cap B$;

(5) 真命题;

(6) 真命题.

评析 判断命题的真假, 必须概念要清楚.

【例 3】 把下列命题写成“若 p 则 q ”的形式, 并判断其真假:

- (1) 实数的平方是非负数;
 (2) 等底等高的两个三角形是全等三角形;
 (3) 能被 6 整除的数既能被 3 整除也能被 2 整除;
 (4) 弦的垂直平分线经过圆心, 并平分弦所对的弧.

思路与技巧 在整体理解命题的基础上, 分清条件与结论.

解答 (1) 原命题可以写成: 若一个数是实数, 则它的平方是非负数. 这个命题是真命题.

(2) 原命题可以写成: 若两个三角形等底等高, 则这两个三角形是全等三角形. 这个命题是假命题.

(3) 原命题可以写成: 若一个数能被 6 整除, 则它既能被 3 整除也能被 2 整除. 这个命题是真命题.

(4) 原命题可以写成: 若一条直线是弦的垂直平分线, 则这条直线经过圆心且平分弦所对的弧. 这个命题是真命题.

评析 “若 p 则 q ”形式的命题也是复合命题, 改写时, 一定要注意找出命题的条件和结论, 同时要注意所

叙述条件和结论的完整性.

【例 4】 (2002 年天津市塘沽区模拟题改编) 命题: “已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a=b, c=d$, 则 $a+c=b+d$.” 写出逆命题、否命题、逆否命题.

思路与技巧 由定义分别写出, 要注意否定词的应用.

解答 逆命题: 已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a+c=b+d$, 则 $a=b, c=d$;

否命题: 已知 a, b, c, d 是实数, 若 a 与 b, c 与 d 都不相等, 则 $a+c \neq b+d$;

逆否命题: 已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a+c \neq b+d$, 则 a 与 b, c 与 d 都不相等.

评析 在写四种命题时, 一定要记清条件 p, q 位置的变化和是否已被否定.

【例 5】 把下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式, 并写出它的否命题和逆否命题.

(1) $ac > bc \Rightarrow a > b$;

(2) 已知 x, y 为正整数, 当 $y=x+1$ 时, $y=3, x=2$;

(3) 当 $m > \frac{1}{4}$ 时, $mx^2 - x + 1 = 0$ 无实根;

(4) 当 $abc=0$ 时, $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$;

(5) 若 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 则 $x=3$ 或 $x=-1$.

思路与技巧 注意否命题的制作, 尤其对含有“且”与“或”命题如何制作否命题要认真体会.

解答 (1) 原命题: 若 $ac > bc$, 则 $a > b$.

否命题: 若 $ac \leq bc$, 则 $a \leq b$.

逆否命题: 若 $a \leq b$, 则 $ac \leq bc$.

(2) 原命题: 已知 x, y 为正整数, 若 $y=x+1$, 则 $y=3$ 且 $x=2$.

否命题: 已知 x, y 为正整数, 若 $y \neq x+1$, 则 $y \neq 3$ 或 $x \neq 2$.

逆否命题: 已知 x, y 为正整数, 若 $y \neq 3$ 或 $x \neq 2$, 则 $y \neq x+1$.

(3) 原命题: 若 $m > \frac{1}{4}$, 则 $mx^2 - x + 1 = 0$ 无实根.

否命题: 若 $m \leq \frac{1}{4}$, 则 $mx^2 - x + 1 = 0$ 有实根.

逆否命题: 若 $mx^2 - x + 1 = 0$ 有实根, 则 $m \leq \frac{1}{4}$.

(4) 原命题: 若 $abc=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$.

否命题: 若 $abc \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$.

逆否命题: 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$, 则 $abc \neq 0$.

(5) 原命题: 若 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 则 $x=3$ 或 $x=-1$.

否命题: 若 $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, 则 $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$.

逆否命题: 若 $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$, 则 $x^2 - 2x - 3 \neq 0$.

评析 对“或”命题的否定是“且”, 而对“且”命题

的否定是“或”。

【例 6】 (2002 年江西省五校联考) 在下列命题中, 真命题是 ()

- A. 命题“若 $ac > bc$, 则 $a > b$ ”
 B. 命题“若 $b = 3$, 则 $b^2 = 9$ ”的逆命题
 C. 命题“当 $x = 2$ 时, $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的否命题
 D. 命题“相似三角形的对应角相等”的逆否命题

思路与技巧 对 A, 因为 c 的正负未知, 因而 a 与 b 的大小不定, 所以 A 假; 对 B, 逆命题是“若 $b^2 = 9$, 则 $b = 3$ ”, 它未必成立, 因为 b 可能等于 -3 , 所以 B 假; 对 C, 否命题为“当 $x \neq 2$ 时, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”为假, 因为 $x \neq 2$, 但可以为 1, 使 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 成立; 对 D, 其逆否命题为“两个三角形的对应角不相等, 则这两个三角形不相似”为真, 因为原命题与逆否命题为等价命题, 原命题为真。

答案 D

评析 注意原命题与其逆否命题是等价命题。

【例 7】 证明: 对任意非正数 c , 若有 $a \leq b + c$ 成立, 则 $a \leq b$ 。

思路与技巧 将“对任意非正数 c , 若有 $a \leq b + c$ 成立, 则 $a \leq b$ ”视为原命题。要证明原命题为真命题, 可以考虑证明它的逆否命题“对任意非正数 c , 若 $a > b$, 则有 $a > b + c$ 成立”为真命题。

证明 若 $a > b$, 则由 $c \leq 0$ 知 $b \geq b + c$, $\therefore a > b + c$ 。

$\therefore$ 原命题的逆否命题为真命题, 从而原命题为真命题。

即对任意 $c \leq 0$, 若有 $a \leq b + c$ 成立, 则 $a \leq b$ 。

变式引申 证明: 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $a, b \in \mathbf{R}$ 。若 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$, 则 $a + b \geq 0$ 。

证明 原命题逆否命题为“若 $a + b < 0$, 则 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$ ”。

若 $a + b < 0$, 则 $a < -b, b < -a$,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(a) < f(-b), f(b) < f(-a)$ 。

$\therefore f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$,

即逆否命题为真命题。

$\therefore$ 原命题为真命题。

评析 在证明时, 一定要正确写出已知命题的逆否命题。



综合探究

【案例】 用反证法证明: 钝角三角形最大边上的

中线小于该边长的一半。

已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A > 90^\circ$, D 是 BC 边上的中点, 求证: $AD < \frac{1}{2} BC$ (如图 1.1-1 所示)。

思路与技巧 依据题意, 写出已知、求证, 再用反证法, 即否定结论, 把假设和已知条件结合起来去推出矛盾。

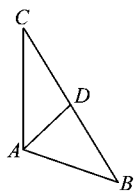


图 1.1-1

证明 假设 $AD \geq \frac{1}{2} BC$ 。

① 若 $AD = \frac{1}{2} BC$, 由平面几何中定理“若三角形一边上的中线等于该边长的一半, 那么这条边所对的角为直角”知, $\angle A = 90^\circ$, 与题设矛盾。

所以 $AD \neq \frac{1}{2} BC$ 。

② 若 $AD > \frac{1}{2} BC$, 因为 $BD = DC = \frac{1}{2} BC$, 所以, 在 $\triangle ABD$ 中, $AD > BD$, 从而 $\angle B > \angle BAD$; 同理 $\angle C > \angle CAD$ 。

所以 $\angle B + \angle C > \angle BAD + \angle CAD$,

即 $\angle B + \angle C > \angle A$ 。

因为 $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$, 所以 $180^\circ - \angle A > \angle A$, 则 $\angle A < 90^\circ$, 与题设矛盾。

由①②知 $AD < \frac{1}{2} BC$ 。

评析 正确地作出反设 (即否定结论) 是正确运用反证法的前提, 要注意一些常用的“结论否定形式”。另外, 需注意作出的反设必须包括与结论相反的所有情况, 也只有证明了与结论相反的所有情况都不成立, 才能保证原来的结论一定成立。如本题假设 AD 不大于 $\frac{1}{2} BC$ 应是 $AD \leq \frac{1}{2} BC$, 而不是 $AD < \frac{1}{2} BC$ 。

探究训练



练一练, 你会了吗?

1. 给出下列句子或式子:

① 明天会下雨吗? ② 地球是太阳的行星;

③ $20 - 5 \times 3 = 5$; ④ 在 2020 年前, 将有人登上火星。

其中是命题的为 ()

A. ②③

B. ②③④

C. ③④

D. ①②③④

2. 有下列命题: ① $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程; ② 空集是任何集合的真子集; ③ 若 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 > 0$;

- ④若 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab > 0$, 则 $a > 0$ 且 $b > 0$. 其中真命题的个数是 ()
- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4
3. 命题“若 $x \in A$, 则 $y \in A$ ”的逆否命题为 ()
- A. 若 $y \in A$, 则 $x \in A$ B. 若 $x \notin A$, 则 $y \notin A$
C. 若 $y \notin A$, 则 $x \notin A$ D. 若 $y \in A$, 则 $x \in A$
4. 逆否命题是“平行四边形的对角线相等”的原命题是 ()
- A. 对角线相等的四边形是平行四边形
B. 不是平行四边形, 对角线不相等
C. 对角线不相等的四边形不是平行四边形
D. 平行四边形的对角线不相等
5. 命题“不等式 $x^2 + x - 6 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$ ”的逆否命题是_____.
6. 将下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式, 并写出其逆命题、否命题、逆否命题.
- (1) 正数 a 的平方根不等于 0;
(2) 两条对角线不相等的平行四边形不是矩形.

4. 命题“若 a, b 是奇数, 则 $a + b$ 是偶数”的逆否命题是_____.
5. 命题“若 $x^2 - 4x + 3 = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 3$ ”的逆命题为_____.
6. 将下述命题改写成“若 p 则 q ”的形式, 写出其否命题, 并判断它们的真假.
- (1) 正偶数不是质数;
(2) 当两圆相切时, 连心线经过两圆的切点.
7. 若 $p > 0, q > 0, p^3 + q^3 = 2$. 试用反证法证明 $p + q \leq 2$.



试一试, 经历这些活动

1. 有下列四个命题:
- ①“若 $xy = 1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题;
②“相似三角形的周长相等”的否命题;
③“若 $b \leq 0$, 则关于 x 的方程 $x^2 - 2bx + b^2 + b = 0$ 有实根”的逆否命题;
④“ $A \cup B = B$, 则 $A \supseteq B$ ”的逆否命题.
- 其中真命题的个数是 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
2. 有下列四个命题:
- ①“若 $x + y = 0$, 则 x, y 互为相反数”的逆命题;
②“全等三角形的面积相等”的否命题;
③“若 $q \leq 1$, 则关于 x 的方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根”的逆否命题;
④“不等边三角形的三个内角相等”的逆命题.
- 其中的真命题是 ()
- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ③④
3. 命题“若 $ab = 0$, 则 a, b 中至少有一个为零”的逆否命题是_____.



想一想, 如何探究?

1. 给出下列 4 个命题:
- ①若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 2$;
②若 $-2 \leq x < 3$, 则 $(x + 2)(x - 3) \leq 0$;
③若 $x = y = 0$, 则 $x^2 + y^2 = 0$;
④若 $x, y \in \mathbf{N}_+$, $x + y$ 是奇数, 则 x, y 中一个是奇数, 一个是偶数. 那么 ()
- A. ①的逆命题为真 B. ②的否命题为真
C. ③的逆否命题为假 D. ④的逆命题为假
2. 设三个正实数 a, b, c 满足条件 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. 求证: a, b, c 中至少有两个不小于 1.

1.2 充分条件与必要条件



探究目标

命题“若 p , 则 q ”如果为真, 怎么用数学符号表示? 如果为假呢?

什么是充分条件? 什么是必要条件? 什么是充要条件?

充分条件、必要条件与四种命题的关系怎样?

这些问题是本节要与同学们一起探讨的主要问题.

探究指导



数学宫殿

知识回顾

1. $p \Rightarrow q$ 与 $p \nRightarrow q$ 的符号含义

“若 p , 则 q ”为真, 记作“ $p \Rightarrow q$ ”; “若 p , 则 q ”为假, 记作“ $p \nRightarrow q$ ”.

2. 充分条件、必要条件与充要条件

如果已知 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件.

由于原命题与其逆否命题是等价关系, 即原命题为真, 则其逆否命题也为真, 因此有 $\neg q \Rightarrow \neg p$, 即若不具备 q , 则不具备 p , 故 q 是 p 的必要条件.

如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则称 p 是 q 的充要条件.

3. 充分、必要条件与四种命题的关系

(1) 如果 p 是 q 的充分条件, 则原命题“若 p , 则 q ”以及逆否命题“若 $\neg q$, 则 $\neg p$ ”都是真命题.

(2) 如果 p 是 q 的必要条件, 则原命题“若 q , 则 p ”以及逆否命题“若 $\neg p$, 则 $\neg q$ ”为真命题.

(3) 如果 p 是 q 的充要条件, 则四种命题均为真命题.

4. “若 p , 则 q ”形式的命题, 其条件 p 与结论 q 之间的逻辑关系

(1) 若 $p \Rightarrow q$, 而 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的充分但不必要条件, 而 q 是 p 的必要但不充分条件.

(2) 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件, q 也是

p 的充要条件.

(3) 若 $p \nRightarrow q$, 而 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

示例点拨

【例 1】(2003 年天津市统考题) 下面命题中的真命题是 ()

A. $x > 2$ 且 $y > 3$ 是 $x + y > 5$ 的充要条件

B. $A \cap B \neq \emptyset$ 是 $A \subseteq B$ 的充分条件

C. $b^2 - 4ac < 0$ 是一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件

D. 一个三角形的三边满足勾股定理的充要条件是此三角形为直角三角形

思路与技巧 对于 A, $x > 2$ 且 $y > 3 \Rightarrow x + y > 5$, 但 $x + y > 5$ 未必能推出 $x > 2$ 且 $y > 3$, 如 $x = 0$ 且 $y = 6$ 满足 $x + y > 5$ 但不满足 $x > 2$, 故 A 假.

对于 B, $A \cap B \neq \emptyset$ 未必能推出 $A \subseteq B$, 如 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 故 B 为假.

对于 C, $b^2 - 4ac < 0$ 是一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是假命题, 如一元二次不等式 $-2x^2 + x - 1 > 0$ 的解集为 $\emptyset$, 且满足 $b^2 - 4ac < 0$.

对于 D, 是真命题. 因为由一个三角形的三边满足勾股定理能推出此三角形为直角三角形, 条件不仅是必要的, 也是充分的, 故是充要的.

答案 D

评析 对于充要条件的判断, 要仔细考虑问题的各种情况, 且不可粗心大意, 考虑不全造成失误.

【例 2】 $0 < x < 5$ 是不等式 $|x - 2| < 4$ 成立的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

思路与技巧 由题意, 设 $A = \{x \mid 0 < x < 5\}$, $B = \{x \mid |x - 2| < 4\} = \{x \mid -2 < x < 6\}$, 从而有 $A \subseteq B$, 所以 A 中元素一定是 B 中的元素, 而 B 中存在 A 中没有的元素, 故 $0 < x < 5 \Rightarrow |x - 2| < 4$. 而 $|x - 2| < 4 \nRightarrow 0 < x < 5$, 所以 $0 < x < 5$ 是 $|x - 2| < 4$ 的充分不必要条件.

答案 A

评析 一般情况下, 若条件甲为 $x \in A$, 条件乙为 $x \in B$.

当且仅当 $A \subseteq B$ 时, 甲为乙的充分条件;

当且仅当 $B \subseteq A$ 时, 甲为乙的必要条件;

当且仅当 $A = B$ 时, 甲为乙的充要条件.

变式引申 设 A, B, C 为三个集合, 为使 $A \subseteq (B \cup$

C), 条件 $A \subseteq B$ 是 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

思路与技巧 可以结合图形分析.

解答 如图 1.2-1 所示,

$\because A \subseteq B$, 而 $B \subseteq (B \cup C)$,

$\therefore A \subseteq (B \cup C)$.

但是当 $B = \mathbf{N}, C = \mathbf{R}, A = \mathbf{Z}$

时, 显然 $A \subseteq (B \cup C)$, 但 $A \subseteq B$

不成立.

综上所述, “ $A \subseteq B$ ” $\Rightarrow$ “ $A \subseteq (B \cup C)$ ” 而 “ $A \subseteq (B \cup C)$ ” $\nRightarrow A \subseteq B$.

答案 A

【例 3】若 $\neg A$ 是 B 的充分不必要条件, 则 A 是 $\neg B$ 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 必要条件
D. 既不充分又不必要条件

思路与技巧 $\because \neg A \Rightarrow B$, 且 $B \nRightarrow \neg A$,

$\therefore \neg B \Rightarrow A$, 且 $A \nRightarrow \neg B$.

$\therefore A$ 是 $\neg B$ 的必要不充分条件.

答案 B

评析 据互为逆否命题的等价性, 可以来判断充要条件, 本题还综合考虑了递推法及定义等.

【例 4】已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件. 那么: (1) s 是 q 的什么条件? (2) r 是 q 的什么条件? (3) p 是 q 的什么条件?

思路与技巧 将已知 r, p, q, s 的关系作一个 “ $\Rightarrow$ ” 图.

解答 (1) 由图 1.2-2 所示知:

$\because q \Rightarrow s, s \Rightarrow r \Rightarrow q$,

$\therefore s$ 是 q 的充要条件.

(2) $\because r \Rightarrow q, q \Rightarrow s \Rightarrow r$,

$\therefore r$ 是 q 的充要条件.

(3) $\because q \Rightarrow s \Rightarrow r \Rightarrow p, \therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

评析 “ $\Rightarrow$ ” 在解决较多条件的问题时经常用到, 要细心体会递推法是理解充要条件的重要方法.

变式引申 已知 p 是 q 的充分条件, q 是 r 的必要条件, 也是 s 的充分条件, r 是 s 的必要条件, 问:

- (1) p 是 r 的什么条件?
(2) s 是 q 的什么条件?
(3) p, q, r, s 中哪几对互为充要条件?

解答 作出 “ $\Rightarrow$ ” 图, 如图 1.2-3 所示, 可知: $p \Rightarrow q$,

$r \Rightarrow q, q \Rightarrow s, r \Leftarrow s$.

(1) $p \Rightarrow q \Rightarrow s \Rightarrow r$, 且 $r \Rightarrow q, q$ 能否推出 p 未知,

$\therefore p$ 是 r 的充分条件.

(2) $\because s \Rightarrow r \Rightarrow q, q \Rightarrow s$,

$\therefore s$ 是 q 的充要条件.

(3) 共有三对充要条件, $q \Leftrightarrow s; s \Leftrightarrow r; r \Leftrightarrow q$.

【例 5】已知两个命题: $A: 2x+3=x^2, B: x\sqrt{3x}=x^2$, 则 A 是 B 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

思路与技巧 注意到本题的两个命题实际上是所表示方程的解集, 因此考虑运用集合的观点来解决.

解答 命题 A 就是 $x \in \{x \mid 2x+3=x^2\} = \{-1, 3\}$;

命题 B 就是 $x \in \{x \mid x\sqrt{3x}=x^2\} = \{0, 3\}$.

由于 $\{-1, 3\} \not\subseteq \{0, 3\}$ 且 $\{0, 3\} \not\subseteq \{-1, 3\}$,

所以 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

答案 D

评析 对于充要条件也可以从集合的观点来认识.

(1) 若 $A \subseteq B$, 但 $B \not\subseteq A$, 则 A 是 B 的充分不必要条件.

(2) 若 $A \supseteq B$, 但 $B \not\supseteq A$, 则 A 是 B 的必要不充分条件.

(3) 若 $A=B$, 则 A 是 B 的充要条件.

变式引申 若 $p: A \subseteq B \subseteq S, q: (\complement_S B) \subseteq (\complement_S A)$, 则 p 是 q 的什么条件?

解答 利用集合的图示法,

由图 1.2-4 知, $A \subseteq B \subseteq S \Rightarrow (\complement_S B) \subseteq (\complement_S A), (\complement_S B) \subseteq (\complement_S A) \Rightarrow A \subseteq B \subseteq S$, 所以 p 是 q 的充要条件.

评析 本题采用的是从条件直接推结论的方法, 其中突出了数形结合的思想方法(图示法).

【例 6】(2002 年杭州市毕业生联考) 已知 $ab \neq 0$, 求证: $a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

证明 先证必要性.

$\because a+b=1$, 即 $b=1-a$,

$\therefore a^3+b^3+ab-a^2-b^2=a^3+(1-a)^3+a(1-a)-a^2-(1-a)^2=a^3+1-3a+3a^2-a^3+a-a^2-a^2-1+2a-a^2=0$.

再证充分性.

$\because a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$,

即 $(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)=0$,

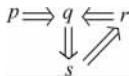


图 1.2-3

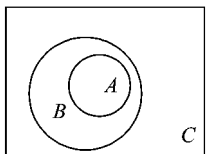


图 1.2-1

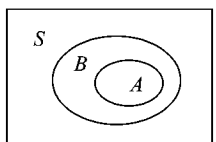


图 1.2-4

$$\therefore (a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0.$$

由于 $ab \neq 0$, 即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$,

$$\therefore a^2-ab+b^2 \neq 0. \text{ 只有 } a+b=1.$$

综上所述, 当 $ab \neq 0$ 时, $a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

评析 证明充要条件, 即证明命题的原命题和逆命题都成立, 但是要分清命题的必要性、充分性是什么.

【例 7】 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0, a \in \mathbf{R}$, 求方程有两个正根的充要条件.

解答 方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个实根的充要条件是 $\begin{cases} 1-a \neq 0, \\ \Delta \geq 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} a \neq 1, \\ (a+2)^2+16(1-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 10, \end{cases}$$

即 $a \geq 10$ 或 $a \leq 2$ 且 $a \neq 1$.

设此时方程的两实根为 x_1, x_2 , 有两个正根的充要

$$\text{条件是 } \begin{cases} a \neq 1, \\ a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 10, \\ x_1+x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 10, \\ \frac{a+2}{a-1} > 0, \\ \frac{4}{a-1} > 0, \end{cases}$$

即 $1 < a \leq 2$ 或 $a \geq 10$ 是方程有两个正根的充要条件.



【案例】 设 α, β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根, 试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是两根 α, β 均大于 1 的什么条件?

思路与技巧 把充要条件和方程中根与系数的关系问题相联系, 解题时需要搞清楚条件 p 与结论 q 分别指什么, 然后再验证是 $p \Rightarrow q$ 还是 $q \Rightarrow p$, 还是 $p \Leftrightarrow q$.

解答 据韦达定理得 $a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta$, 判定的条件是

$$p: \begin{cases} a > 2, \\ b > 1, \end{cases} \text{ 结论是 } q: \begin{cases} \alpha > 1, \\ \beta > 1. \end{cases} \text{ (还要注意条件中需要}$$

满足大前提 $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$).

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} \alpha > 1, \\ \beta > 1, \end{cases} \text{ 得 } a = \alpha + \beta > 2, b = \alpha\beta > 1, \therefore q \Rightarrow p.$$

$$(2) \text{ 为了证明 } p \not\Rightarrow q, \text{ 可以举出反例: 取 } \alpha = 4, \beta = \frac{1}{2},$$

它满足 $a = \alpha + \beta = 4 + \frac{1}{2} > 2, b = \alpha \cdot \beta = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 1$, 且满足 $\Delta > 0$, 但 q 不成立.

由上述讨论可知, $a > 2$ 且 $b > 1$ 是 $\alpha > 1, \beta > 1$ 的必要但不充分条件.

评析 本题中的讨论内容在二次方程的根的分布理论中常被使用.

变式引申 已知 $p: -2 < m < 0, 0 < n < 1, q$: 关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根, 试分析 p 是 q 的什么条件?

解答 若 $x^2+mx+n=0$ 有两根 x_1, x_2 , 则由韦达定理, 有 $x_1+x_2=-m, x_1x_2=n$. 又 $0 < x_1x_2 < 1, 0 < x_1+x_2 < 2$

$$\therefore -2 < m < 0, 0 < n < 1, \text{ 即 } q \Rightarrow p.$$

由 $m = -1, n = \frac{1}{2}$ 时, 方程 $x^2+mx+n=0$, 即 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 无实数根知, $p \not\Rightarrow q$.

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.



应用建模

【问题】 求证: 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

证明 充分性: 若 $b=0$, 则抛物线方程变为 $y=ax^2+c$. 设 $P(x_0, y_0) (x_0 \in \mathbf{R}, y_0 \in \mathbf{R})$ 是抛物线上一点, 则 $y_0=ax_0^2+c$.

又 $\because P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $P'(-x_0, y_0)$,

将 $P'(-x_0, y_0)$ 代入 $y=ax^2+c$ 中,

$$y_0 = a(-x_0)^2 + c = ax_0^2 + c.$$

$$\therefore P'(-x_0, y_0) \text{ 在抛物线 } y^2 = ax^2 + c \text{ 上.}$$

由 P 点的任意性可知, $y=ax^2+c$ 关于 y 轴对称.

必要性: 若 $y=ax^2+bx+c$ 的图象关于 y 轴对称, 则抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0) (x_0 \in \mathbf{R}, y_0 \in \mathbf{R})$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-x_0, y_0)$ 也在抛物线上,

$$\therefore \text{ 对 } x_0 \in \mathbf{R}, ax_0^2+bx_0+c = a(-x_0)^2+b(-x_0)+c \text{ 成立, 即对 } x_0 \text{ 取任意实数 } bx_0=0 \text{ 成立, } \therefore b=0.$$

由上可知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

探究训练



练一练, 你会了吗?

1. 下面命题是真命题的为

()

①“ $x+y=5$ ”是“ $x^2-y^2-3x+7y=10$ ”的充分条件;

②“ $a-b < 0$ ”是“ $a^2-b^2 < 0$ ”的充分条件;

③“ $a-b < 0$ ”是“ $a^2-b^2 < 0$ ”的必要条件;

④“两个三角形全等”是“两边和夹角对应相等”的充

要条件.

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①④
2. “ $a>b$ ”是“ $a^3>b^3$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. “ $a^2>b^2$ ”是“ $|a|>|b|$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 如果 a, b, c 都是实数, 那么 $p: “ac<0”$, 是 $q: “关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根和一个负根”的 ()
 A. 必要不充分条件 B. 充要条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件$
5. “对应角相等”是“两个三角形相似”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. “ $x=y, a=b$ ”是“ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 设集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}, B=\{x|mx+1=0\}$, 则 B 是 A 的真子集的一个充分不必要条件是 _____.
8. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 求证: $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.



试一试, 经历这些活动

1. “ $x>-1$ ”是“ $x>1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. “ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. “ $\log_3 x^2=2$ ”是“ $\log_3 x=1$ ”成立的 ()
 A. 充要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $p: |2x-3|>1, q: \frac{1}{x^2+x-6}>0$, 则 p 是 q 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 p 是 q 的必要条件, r 是 q 的充分条件, p 是 r 的充分条件, 那么 q 是 p 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 设甲是乙的充分不必要条件, 丙是乙的必要非充分条件, 丁是丙的充要条件, 那么丁是甲的 _____ 条件.
7. 若 $p: x \neq 2$ 或 $y \neq 3, q: x+y \neq 5$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
8. 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分条件, 那么 $\neg A$ 是 $\neg B$ 的 _____ 条件.



想一想, 如何探究?

1. $A: x_1, x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的两实数根; $B: x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. 则 A 是 B 的 _____ 条件.
2. (1) 是否存在实数 m , 使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的充分条件?
 (2) 是否存在实数 m , 使得 $2x+m<0$ 是 $x^2-2x-3>0$ 的必要条件?



1.3 简单的逻辑联结词

探究目标

数学中, 有时会使用一些联结词, 如“且”“或”“非”. 它们与生活用语中的“且”“或”“非”的含义与用法完全相同吗?

什么是简单命题? 什么是复合命题? 它们之间有什么关系?

简单命题的真假与复合命题的真假之间有怎样的关系?

集合运算的“交”“并”“补”与逻辑联结词“且”“或”“非”有怎样的关系?

探究指导



数学宫殿

知识回顾

1. 数学中的逻辑联结词

数学中的逻辑联结词“且”“或”“非”与我们日常生活中的含义不尽相同. 这一点, 请同学们认真体会.

2. 简单命题与复合命题

不含逻辑联结词的命题称简单命题.

含有逻辑联结词的命题称复合命题.

“ p 且 q ”记作“ $p \wedge q$ ”, “ p 或 q ”记作“ $p \vee q$ ”, “非 p ”记作“ $\neg p$ ”;

3. 复合命题的真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

4. 集合运算与“且”“或”“非”的关系

设全集 $U = \{x \mid U(x)\}$, 已知 $A = \{x \mid p(x)\}$, $B = \{x \mid q(x)\}$, 则:

$$(1) A \cap B = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\};$$

$$(2) A \cup B = \{x \mid p(x) \vee q(x)\};$$

$$(3) \complement_U A = \{x \mid \neg p(x)\}.$$

示例点拨

【例 1】(2001 年烟台市统考) 分别写出由下列各组命题构成的“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”形式的复合命题:

$$(1) p: \sqrt{2} \text{ 是无理数}, q: \sqrt{2} \text{ 大于 } 1;$$

$$(2) p: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, q: \{0\} \in \mathbb{N};$$

$$(3) p: x^2 + 1 > x - 4, q: x^2 + 1 < x - 4.$$

解答 (1) p 或 $q: \sqrt{2}$ 是无理数或大于 1;

p 且 $q: \sqrt{2}$ 是无理数且大于 1;

非 $p: \sqrt{2}$ 不是无理数.

$$(2) p \text{ 或 } q: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \text{ 或 } \{0\} \in \mathbb{N};$$

$$p \text{ 且 } q: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \text{ 且 } \{0\} \in \mathbb{N};$$

非 $p: \mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}.$

$$(3) p \text{ 或 } q: x^2 + 1 \neq x - 4;$$

$$p \text{ 且 } q: x^2 + 1 > x - 4 \text{ 且 } x^2 + 1 < x - 4;$$

$$\text{非 } p: x^2 + 1 \leq x - 4.$$

评析 在由简单命题写出复合命题时, 可直接使用逻辑联结词, 如本例的(1)(2), 也可以不使用逻辑联结词, 如例(3)中的“ p 或 q ”、“非 p ”. 写复合命题时, 关键要搞清“且”“或”“非”的意义.

【例 2】指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题.

(1) 96 是 48 与 16 的倍数;

(2) 方程 $x^2 - 3 = 0$ 没有有理根;

(3) 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$.

解答 (1) 这个命题是“ $p \wedge q$ ”形式. 其中: p : 96 是 48 的倍数, q : 96 是 16 的倍数.

(2) 这个命题为“ $\neg p$ ”形式. 其中: p : 方程 $x^2 - 3 = 0$ 有有理根.

(3) 这个命题为“ $p \vee q$ ”形式. 其中: p : 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x > 2\}$, q : 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -1\}$.

评析 正确理解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义是解题的关键, 应根据组成上述各复合命题的语句中所出现的逻辑联结词或语句的意义确定复合命题的形式.

【例 3】命题: “方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解是 $x = \pm 2$ ”, 在这个命题中, 使用的逻辑联结词的情况是 ()

- A. 没有使用逻辑联结词
- B. 使用了逻辑联结词“且”
- C. 使用了逻辑联结词“或”
- D. 使用了逻辑联结词“非”

解析 “ $x^2 - 4 = 0$ 的解是 $x = \pm 2$ ”就是指“ $x^2 - 4 = 0$ 的解是 $x = 2$ 或 $x = -2$ ”.

因此该命题是用逻辑联结词“或”联结的.

答案 C

评析 要理解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义.

逻辑联结词中的“或”相当于集合中的“并集”, 它与日常用语中的“或”含义不同, 一般地, 日常用语用的“或”是两个中任选一个, 不能都选, 而逻辑联结词中的“或”, 可以是两个都选, 但又不是两个都必须都选, 而是两个中至少有一个, 相当于“并集”定义中的“或”. 逻辑联结词中的“且”相当于集合中的“交集”, 即必须两个都选.

逻辑联结词中的“非”相当于集合中在全集中的补集. 逻辑联结词中的“非”的含义有否定的意思, “等于”的否定是“不等于”, “大于”的否定是“不大于”, 即“小于或等于”“都是”的否定是“不都是”, “至少有一个”的否定是“没有一个”, “ $x = a$ 或 $x = b$ ”的否定是“ $x \neq a$ 且 $x \neq b$ ”.

$x \neq b$ ”.

【例4】 把下列各组命题用“或”联结成新命题,并判断它们的真假:

(1) $p: 10=10; q: 10<10$; (2) $p: N \subseteq R; q: Q \subseteq R$.

解答 (1) 因为 $10=10$ 为真, $10<10$ 为假, 所以命题 $p \vee q$ 是真命题.

(2) 因为 $N \subseteq R$ 为真命题, $Q \subseteq R$ 为真命题, 所以命题 $p \vee q$ 是真命题.

【例5】 指出下列命题的真假:

(1) $3 \leq 3$; (2) $5 \geq 6$.

解答 (1) $3 \leq 3$ 的含义是 $3 < 3$ 或 $3 = 3$.

因为 $3 = 3$ 为真, 所以 $3 \leq 3$ 是真命题.

(2) $5 \geq 6$ 的含义是 $5 > 6$ 或 $5 = 6$.

因为 $5 > 6$ 和 $5 = 6$ 都是假命题, 所以 $5 \geq 6$ 是假命题.

变式引申 判断下列命题的真假:

(1) $10 \leq 11$; (2) $15 \geq 16$;

(3) $3 > 2$ 或 $4 > 5$; (4) $3 > 2$ 且 $4 < 5$.

解答 (1) 真. (2) 假. (3) 真. (4) 真.

评析 我们已学习了三个主要的逻辑联结词: 且, 或, 非. 这三个联结词同样可用来联结含有变量的语句. 用联结词联结含有变量的语句时, 得到的新语句, 一般仍为含有变量的语句. 它的真假要根据语句中变量的取值来确定.

【例6】 分别指出下列命题的形式及构成它的简单命题, 并判断真假.

(1) 相似三角形周长相等或对应角相等;

(2) 9 的算术平方根不是一3;

(3) 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两段弧.

思路与技巧 复合命题有三种: “且”“或”“非”. 找出各小题对应哪种, 并用真值表判断真假.

解答 (1) 这个命题是 p 或 q 的形式, 其中 p : 相似三角形周长相等, q : 相似三角形对应角相等, 因为 p 假 q 真, 所以 p 或 q 为真.

(2) 这个命题是 $\neg p$ 的形式, 其中 p : 9 的算术平方根是一3, 因为 p 假, 所以 $\neg p$ 为真.

(3) 这个命题是 p 且 q 的形式, 其中 p : 垂直于弦的直径平分这条弦, q : 垂直于弦的直径平分这条弦所对的两段弧, 因为 p 真 q 真, 所以 p 且 q 为真.

评析 把简单命题写成复合命题, 或把复合命题写成简单命题并判断真假是本节的基本要求, 关键在于理解逻辑联结词的意义, 逻辑联结词中的“且”“或”“非”与日常用语中的“且”“或”“非”的意义是不尽相同的, 熟悉有关复合命题的真值表可以加快这类题的解

题速度和提高准确性.

【例7】 分别写出由下列各组命题构成的“ $p \vee q$ ”、“ $p \wedge q$ ”、“ $\neg p$ ”形式的复合命题, 并判断其真假:

(1) p : 3 是 9 的约数, q : 3 是 18 的约数;

(2) p : 菱形的对角线相等, q : 菱形的对角线互相垂直;

(3) p : 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实根符号相同, q : 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实根绝对值相等.

解答 (1) $p \vee q$: 3 是 9 的约数或是 18 的约数. (真)

$p \wedge q$: 3 是 9 的约数且是 18 的约数. (真)

$\neg p$: 3 不是 9 的约数. (假)

(2) $p \vee q$: 菱形的对角线相等或互相垂直. (真)

$p \wedge q$: 菱形的对角线相等且互相垂直. (假)

$\neg p$: 菱形的对角线不相等. (真)

(3) $p \vee q$: 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实根符号相同或绝对值相等. (假)

$p \wedge q$: 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实根符号相同且绝对值相等. (假)

$\neg p$: 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实根符号相反. (真)



【案例】 设 p : 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根, q : 方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根. 若 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 求 m 的取值范围.

思路与技巧 应先求出方程的根所满足的条件, 从而得出命题 p 和命题 q , 再依据其复合命题的真假去求实数 m 的取值范围.

解答 若方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根,

则 $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0, \\ -m < 0, \end{cases} \therefore m > 2, \text{ 即 } p: m > 2.$

若方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根.

则 $\Delta = 16(m-2)^2 - 16 < 0$, 即 $1 < m < 3$,

$\therefore q: 1 < m < 3.$

$\therefore p$ 或 q 为真, 则 p, q 至少一个为真, 又 p 且 q 为假, 则 p, q 至少一个为假.

$\therefore p, q$ 一真一假, p 真 q 假, 或 p 假 q 真.

$\therefore \begin{cases} m > 2, \\ m \leq 1, \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m \leq 2, \\ 1 < m < 3. \end{cases}$

$\therefore m \geq 3, \text{ 或 } 1 < m \leq 2.$

评析 由简单命题和逻辑联结词构成的复合命题的真假可以用真值表来判断, 反之根据复合命题的真假也可以判断简单命题的真假. 假若 p 且 q 真, 则 p

真, q 也真,若 p 或 q 真,则 p, q 至少有一个真,若 p 且 q 假,则 p, q 至少有一个假.

探究训练

练一练,你会了吗?

1. 设 p, q 是两个命题,若 $p \wedge q$ 为真,则 ()
A. p 真 q 真 B. p 真 q 假
C. p 假 q 真 D. p 假 q 假
2. 设 p, q 是两个命题,若 $p \vee q$ 为假,则 ()
A. p 真 q 真 B. p 真 q 假
C. p 假 q 真 D. p 假 q 假
3. 若 $p: 27$ 是 3 的倍数, $q: 27$ 是 9 的倍数,则 $p \wedge q$ 是_____,是_____命题; $p \vee q$ 是_____,是_____命题.
4. 若 p :平行四边形对角线互相平分, q :平行四边形对角线相等,则 $p \wedge q$ 是_____,是_____命题; $p \vee q$ 是_____,是_____命题.
5. $p: 2 \notin \{1, 3\}, q: 2 \notin \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$,则 $p \wedge q$ 是_____,是_____命题, $p \vee q$ 是_____,是_____命题.
6. 若 p :实数的平方是正数,则 $\neg p$ 是_____,是_____命题.
7. 若 $p: 3+4 \geq 7$,则 $\neg p$ 是_____,是_____命题.
8. 若 p :方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解是 $x = 1$,则 $\neg p$ 是_____,是_____命题.
9. 若 p :明天刮风或下雨,则 $\neg p$ 是_____.
10. 若 p :明天刮风且下雨,则 $\neg p$ 是_____.

试一试,经历这些活动

1. 若命题 $p: 2n-1$ 是奇数, $q: 2n+1$ 是偶数, $n \in \mathbf{Z}$,则下列说法正确的是 ()
A. $p \vee q$ 为真 B. $p \wedge q$ 为真
C. $\neg p$ 为真 D. $\neg p$ 为假
2. 对命题 $p: A \cap \emptyset = \emptyset$,命题 $q: A \cup \emptyset = A$,则下列说法正确的是 ()
A. $p \wedge q$ 为假 B. $p \vee q$ 为假
C. $\neg p$ 为真 D. $\neg p$ 为假
3. 语句 $|x| \leq 3$ 或 $|x| > 5$ 的否定是 ()
A. $|x| \geq 3$ 或 $|x| < 5$ B. $|x| > 3$ 或 $|x| \leq 5$
C. $|x| \geq 3$ 且 $|x| < 5$ D. $|x| > 3$ 且 $|x| \leq 5$
4. 已知全集 $U = \mathbf{R}, A \subsetneq U, B \subsetneq U$,如果命题 $p: \sqrt{3} \in A \cup$

B ,则命题 $\neg p$ 是 ()

- A. $\sqrt{3} \notin A$ B. $\sqrt{3} \in \complement_U B$
C. $\sqrt{3} \notin A \cap B$ D. $\sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
5. 设 p, q 是两个命题,若 $p \vee q$ 为真, $\neg p$ 为真,则 ()
A. p 不一定是假命题
B. q 一定是真命题
C. q 不一定是真命题
D. p 与 q 同真
6. 设命题 $p: 2x - y = 5, q: x + y = 4$,若 $p \wedge q$ 为真,则 $x =$ _____, $y =$ _____.

想一想,如何探究?

已知: p :关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根, q :关于 x 的方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根.

若“ $p \vee q$ ”为真,“ $p \wedge q$ ”为假,求 m 的取值范围.

1.4 全称量词与存在量词

探究目标

逻辑中通常有哪些全称量词?有哪些存在量词?

什么叫全称命题?什么叫特称命题?这两种命题的一般数学表达形式是怎样的?如何判断这两种命题的真假?

全称命题的否命题是什么?

特称命题的否命题是什么?

探究指导



数学宫殿

知识回顾

1. 逻辑中的全称量词主要有“所有的”“任意一个”“每一个”“一切”“任给”等短语;存在量词主要有“存在一个”“至少有一个”“有些”“有一个”“对某个”“有的”等短语.

2. 含有全称量词的命题叫全称命题,它的一般形式是: $\forall x \in M, p(x)$,读作“对任意 x 属于 M ,都有 $p(x)$ 成立”.要判定全称命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”是真命题,需要对集合 M 中每个元素 x ,证明 $p(x)$ 成立;如果在集合 M 中找到一个元素 x_0 ,使得 $p(x_0)$ 不成立,那么这个全称命题就是假命题.

含有存在量词的命题叫特称命题,它的一般形式是: $\exists x \in M, p(x)$,读作“存在一个 x 属于 M ,使得 $p(x)$ 成立”.要判定特称命题“ $\exists x \in M, p(x)$ ”是真命题,只需在集合 M 中找到一个元素 x_0 ,使得 $p(x_0)$ 成立即可;如果在集合 M 中,使 $p(x)$ 成立的元素 x 不存在,那么这个特称命题是假命题.

3. 全称命题 $p: \forall x \in M, p(x)$,

否定命题 $\neg p: \exists x \in M, \neg p(x)$,

全称命题的否定是特称命题;

特称命题 $p: \exists x \in M, p(x)$,

否定命题 $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$,

特称命题的否定是全称命题.

示例点拨

【例1】试判断以下命题的真假:

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$;

(2) $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$;

(3) $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$;

(4) $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$.

思路与技巧 要判定一个全称命题是真命题,必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立;但要判定全称命题是假命题,却只要能举出集合 M 中的一个 $x = x_0$,使得 $p(x_0)$ 不成立即可(这就是通常所说的“举出一个反例”).

要判定一个特称命题是真命题,只要在限定集合 M 中,至少能找到一个 $x = x_0$,使 $p(x_0)$ 成立即可;否则,这一特称命题就是假命题.

解答 (1) 由于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 \geq 0$, 因而有 $x^2 + 2 \geq 2 > 0$, 即 $x^2 + 2 > 0$. 所以命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$ ”是真命题.

(2) 由于 $0 \in \mathbf{N}$, 当 $x = 0$ 时, $x^4 \geq 1$ 不成立. 所以命题“ $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$ ”是假命题.

(3) 由于 $-1 \in \mathbf{Z}$, 当 $x = -1$ 时, 能使 $x^3 < 1$. 所以命题“ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$ ”是真命题.

(4) 由于使 $x^2 = 3$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{3}$, 而它们都不是有理数. 因此, 没有任何一个有理数的平方能等于 3. 所以命题“ $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$ ”是假命题.

变式引申 判断下列命题的真假:

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 2 = 0$;

(2) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0$.

解答 (1) 假命题; (2) 假命题.

评析 在数学中, 经常有含有变量 x 的语句 $p(x)$, $q(x)$ 构成形如“若 $p(x)$, 则 $q(x)$ ”的命题, 这时应理解为“它是关于某集合 M 的一切元素 x 的全称命题”. 例如: “若 $\frac{x}{4} > 3$, 则 $x > 12$ ”. 通常的意思是: $\forall x \in \mathbf{R}$, 若 $\frac{x}{4} > 3$, 则 $x > 12$.

【例2】设集合 $S = \{\text{四边形}\}$, $p(x)$: 内角和为 360° . 试用不同的表述写出全称命题“ $\forall x \in S, p(x)$ ”.

解答 对所有的四边形 x , x 的内角和为 360° ;

对一切四边形 x , x 的内角和为 360° ;

每一个四边形 x 的内角和为 360° ;

任一个四边形 x 的内角和为 360° ;

凡是四边形 x , 它的内角和为 360° .

【例3】设 $q(x): x^2 = x$, 试用不同的表达方法写出特称命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, q(x)$ ”.

解答 存在实数 x , 使 $x^2 = x$ 成立;

至少有一个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 = x$ 成立;

对有些实数 x , 使 $x^2 = x$ 成立;

有一个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 = x$ 成立;

对某个 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 = x$ 成立.

评析 一个全称命题, 可以包含多个变数, 比如: 全称命题“ $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ ”.

【例4】考察以下推导:

设 $a = b$, 则有 $a^2 = ab \Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$

$$\Rightarrow (a+b)(a-b)=b(a-b) \Rightarrow a+b=b$$

$$\Rightarrow 2b=b \Rightarrow 2=1.$$

请从逻辑角度去找出问题并分析原因.

解答 由 $a=b$ 命题真, 可以导出以下三个命题真: $a^2=ab, a^2-b^2=ab-b^2, (a+b)(a-b)=b(a-b)$. 但下一步导出 $a+b=b$ 是错误的, 由于它引用了一个不真的全称命题“ $\forall d \in \mathbf{R}$, 等式两边可以除以 d ”(因为 $d=0$ 时它是假命题). 同样的错误是由 $2b=b$ 导出 $2=1$.

评析 全称命题真, 意味着对限定集合中的每一个元素都能具有某性质, 使所给语句真. 因此, 当给出限定集合中的任一个特殊的元素时, 自然应导出“这个特殊元素具有这个性质”(这类似于“代入”思想); 例如, 正由于“ $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ”真, 因此, 当 $a=3, b=5$ 时, $(3+5)(9-15+25)=3^3+5^3$ 自然是正确的, 以上思想要注意准确理解并运用.

【例 5】 写出下列命题的否定, 并判断其真假:

$$(1) p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0;$$

$$(2) q: \text{所有的正方形都是矩形};$$

$$(3) r: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0;$$

$$(4) s: \text{至少有一个实数 } x, \text{ 使 } x^3 + 1 = 0.$$

$$\text{解答 } (1) \neg p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0. (\text{假})$$

这是由于 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ 恒成立.

$$(2) \neg q: \text{至少存在一个正方形不是矩形}. (\text{假})$$

$$(3) \neg r: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0. (\text{真})$$

这是由于 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ 成立.

$$(4) \neg s: \forall x \in \mathbf{R}, x^3 + 1 \neq 0. (\text{假})$$

$$\text{这是由于 } x = -1 \text{ 时, } x^3 + 1 = 0.$$

变式引申 1. 设集合 $M = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. 试写出下列各命题的否定, 并判断其真假.

$$(1) p: \forall n \in M, n < 12;$$

$$(2) q: \exists m \in \{\text{奇数}\}, \text{使 } m \in M.$$

$$\text{解答 } (1) \neg p: \exists n \in M, n \geq 12. (\text{真})$$

$$(2) \neg q: \forall m \in \{\text{奇数}\}, m \notin M. (\text{假})$$

2. 写出下列各命题的否定, 并判断其真假:

$$(1) p: \text{一切分数都是有理数};$$

$$(2) q: \text{有些三角形是锐角三角形};$$

$$(3) r: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x = x + 2;$$

$$(4) s: \forall x \in \mathbf{R}, 2x + 4 \geq 0.$$

解答 (1) $\neg p$: 有些分数不是有理数; 或 $\neg p: x \in \{\text{分数}\}, \text{使 } x \notin \mathbf{Q}. (\text{假})$

(2) $\neg q$: 所有三角形不是锐角三角形; 或 $\neg q: \forall x \in \{\text{三角形}\}, x \notin \{\text{锐角三角形}\}. (\text{假})$

$$(3) \neg r: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x \neq x + 2. (\text{假})$$

$$(4) \neg s: \exists x \in \mathbf{R}, 2x + 4 < 0. (\text{真})$$

【例 6】 判断下列全称命题的真假, 并写出其否定:

$$(1) \text{对所有的正实数 } x, \text{ 都有 } \sqrt{x} < x;$$

$$(2) \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 5x = 24.$$

解答 (1) 假命题, 如 $x = 0.01$ 等. 其否定为: $\exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{x} \geq x.$

(2) 假命题, 如 $x = 1$ 等. 其否定为: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 5x \neq 24.$

变式引申 写出下列特称命题的否定:

$$(1) \exists x \in \mathbf{R}, |x+1| \leq 1;$$

$$(2) \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x - 4 \leq 0.$$

$$\text{解答 } (1) \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1;$$

$$(2) \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x - 4 > 0.$$

【例 7】 举一反例, 证明命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \text{使 } x \cdot y = 1$ ”是假命题.

解答 如 $x = 0$, 则 $\forall y \in \mathbf{R}, x \cdot y = 1$ 都不成立.

这说明命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \text{使 } x \cdot y = 1$ ”是假命题.

变式引申 举反例证明下列命题是假命题:

$$(1) \forall x \in \mathbf{R}, |x| > 0;$$

$$(2) \forall x \in \mathbf{R}, \text{有 } x^2 + 2x - 3 > 0;$$

$$(3) \text{任意一元二次方程都有实数解};$$

$$(4) \text{凡 } x < 2, \text{ 都有 } x < 1 (x \in \mathbf{R}).$$

$$\text{解答 } (1) \text{如 } x = 0; (2) \text{如 } x = 0;$$

$$(3) \text{如 } x^2 + x + 1 = 0; (4) \text{如 } x = 1.5 \text{ 等}.$$

评析 从命题形式上看, 全称命题的否定是特称命题, 特称命题的否定是全称命题. 因此, 我们可以通过举反例来否定一个全称命题.



【案例】 用逻辑符号 $\cap, \cup, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 和量词符号 $\forall, \exists$ 把下列命题表示出来:

$$(1) x = 1 \text{ 或 } x = 3 \text{ 是 } x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ 的充要条件};$$

- (2) $x=5$ 是 $x^2=25$ 的充分条件;
 (3) $x \in A \cap B$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $x \in B$;
 (4) $x \in \mathbf{Z}$ 或 $x \in \mathbf{Q}$ 是 $x \in \mathbf{R}$ 的充分条件;
 (5) 有一个正整数,既是质数,又是偶数;
 (6) 任一个整数,或者是奇数或者是偶数;
 (7) 没有一个整数 a ,使 $a^2+1=0$ 成立;
 (8) 如果两个集合 A, B 至少有一个公共元素,则它们的交集不空.

思路与技巧 弄清逻辑符号 $\wedge, \vee$ 与集合运算符号 $\cap, \cup$ 的联交,理解量词符号 $\forall, \exists$ 与全称、特称的关系.

- 解答** (1) “ $x=1$ ” $\vee$ “ $x=3$ ” $\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$;
 (2) $x=5 \Rightarrow x^2=25$;
 (3) $x \in A \cap B \Leftrightarrow “x \in A” \wedge “x \in B”$;
 (4) “ $x \in \mathbf{Z}$ ” $\vee$ “ $x \in \mathbf{Q}$ ” $\Rightarrow x \in \mathbf{R}$;
 (5) $\exists p \in \mathbf{N}_+ \Rightarrow p \in \{\text{质数}\} \cap \{\text{偶数}\}$;
 (6) $\forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow “n \text{ 是奇数}” \vee “n \text{ 是偶数}”$;
 (7) 设 $p: \exists a \in \mathbf{Z}, q: a^2+1=0$,
 则可表示为: $\neg p \Rightarrow q$;
 (8) $\exists “x \in A” \wedge “x \in B” \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

评析 本题是该章的一个综合问题,逻辑符号与量词符号要准确运用.

探究训练

练一练,你会了吗?

- 在下列四个命题中,真命题有 ()
 ① $\forall x \in \mathbf{R}, x > 0$; ② $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+x+1 > 0$;
 ③ 若 $|x| > |y|$, 则 $x > y$; ④ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2-x-1=0$.
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 在下列四个命题中,假命题共有 ()
 ① $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+2 > 0$; ② $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$;
 ③ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$; ④ $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2=3$.
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 下列命题不是全称命题的是 ()
 A. 所有自然数的平方是正数
 B. 若一个四边形是正方形,则它的四条边相等
 C. 对任意实数 x , 存在实数 y , 使 $x+y > 0$
 D. 有些质数是奇数
- 选择适当的量词填空,使它们成为真命题:
 (1) _____, $x^2-2x+3 > 0$
 (2) _____, $x^2+2x=0$
- 用量词符号“ $\forall$ ”“ $\exists$ ”表达下列命题:

- 若 $x^2 > 4$, 则 $x > 2$;
- 若 $m \geq 0$, 则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根;
- 若一个四边形是正方形,则它的四条边相等;
- 有一个实数,使得 $x^2+2x+3=0$.



试一试,经历这些活动

- 在下列四个命题中,真命题的个数是 ()
 ① $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+x+3 > 0$;
 ② $\forall x \in \mathbf{Q}, \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ 是有理数;
 ③ $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 使 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$;
 ④ $\exists x, y \in \mathbf{Z}$, 使 $3x-2y=10$.
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 写出下列命题的非:
 (1) $p: \forall x \in \mathbf{R}, x-4 \geq 0$;
 (2) $p: \forall x \in \mathbf{Z}, \sqrt{x} \in \mathbf{Q}$;
 (3) $p: \forall A \in \mathbf{R}$, 函数 $y=A \sin x$ 是周期函数.



想一想,如何探究?

用量词符号“ $\forall$ ”“ $\exists$ ”表达下列命题:

- 有理数都能写成分数形式;
- n 边形的内角和等于 $(n-2) \times 180^\circ$;
- 两个有理数之间,都有另一个有理数;
- 有一个实数乘以任意一个实数都等于 0.